Лицей-интернат для одаренных детей с углубленным изучением химии - филиал ФГБОУ ВО "КНИТУ" в п. Дубровка Республики Татарстан

Тевелева Елена Львовна учитель математики и информатики

Варианты 13, 15 и 18 заданий ЕГЭ по математике 2017 года в Республике Татарстан

(основная волна)

**Задание 13**

**Вариант 1.**

$$81^{Cos x}-12∙9^{Cos x}+27=0$$

а) решить уравнение;

б) найти все корни уравнения на интервале [-4π; -$\frac{5}{2}$π].

Решение:

a) Приводим исходное уравнение к обычному квадратному уравнению, используя замену переменных:

$9^{2Cosx}-12∙9^{Cosx}+27=0$, замена b=$9^{Cosx}$, при b>0.

$$b^{2}-12b+27=0$$

D=36 → b1 = 3, b2 = 9.

Обратная замена: 3 = $9^{Cosx}$ 9 = $9^{Cosx}$

$9^{\frac{1}{2}}$=$ 9^{Cos x}$Cos x = 1, x= 2πn, nϵZ

 Cos x = $\frac{1}{2}$, x= ±$\frac{π}{3}$ + 2πk, kϵZ.

б) Произведем отбор корней, принадлежащих интервалу [-4π; -$\frac{5}{2}$π] с помощью числовой окружности или числовой прямой:



Ответ: а) x1= 2πn, nϵZ,

 х2= ±$\frac{π}{3}$ + 2πk, kϵZ;

 б) -4π$; -\frac{11}{3}π$.

Пояснение к заданию:

1.Некоторые учащиеся предпочитают выходить на минимальное основание – число 3, получая биквадратное уравнение: $3^{4Cosx}-12∙3^{2Cosx}+27=0.$Далее все как обычно, вводим замену b=$3^{Cosx}$, при b>0.

$$(b^{2})^{2}-12b^{2}+27=0$$

D= 36 →$b^{2}$= 3, с учетом ОДЗ b1=$\sqrt{3},$

$b^{2}$ = 9, с учетом ОДЗ b2= 3.

Обратная замена: $3^{Cosx}= \sqrt{3}3^{Cosx}= 3$

$3^{Cos x}=3^{\frac{1}{2}}$ Cos x = 1, x= 2πn, nϵZ

 Cosx= $\frac{1}{2}$, x= ±$\frac{π}{3}$ + 2πk, kϵZ.

2. Некоторым учащимся расставить точки на числовой прямой легче и понятнее, чем на числовой окружности (я не запрещаю ☺).

**Вариант 2**

$$8∙16^{Cos x}-6∙4^{Cos x}+1=0$$

а) решить уравнение;

б) найти все корни уравнения на интервале [$\frac{3}{2}$π; 3π].

Решение:

a) Приводим исходное уравнение к обычному квадратному уравнению, используя замену переменных:

$8∙4^{2Cosx}-6∙4^{Cosx}+1=0$, замена b=$ 4^{Cosx}$, при b>0.

$$8b^{2}-6b+1=0$$

D=4→ b1 = $\frac{1}{2}$, b2 = $\frac{1}{4}$.

Обратная замена: $\frac{1}{2}$ = $4^{Cosx}\frac{1}{4}$ = $4^{Cosx}$

$2^{-1}$=$ 2^{2Cosx} 4^{-1}$=$4^{Cosx}$

Cosx= $-\frac{1}{2}$, x= ±$\frac{2π}{3}$ + 2πk, kϵZ;Cosx = -1, x= π + 2πn, nϵZ

б) Произведем отбор корней, принадлежащих интервалу [$\frac{3}{2}$π; 3π]с помощью числовой окружности или числовой прямой:



Ответ: а) x1= ±$\frac{2π}{3}$ + 2πk, kϵZ;

 х2= π + 2πn, nϵZ.

 б) $\frac{8}{3}π$; 3π.

**Вариант 3**

$$9∙81^{Cos x}-28∙9^{Cos x}+3=0$$

а) решить уравнение;

б) найти все корни уравнения на интервале [$\frac{5}{2}$π; 4π].

Ответ: а) x1= ±$\frac{π}{3}$ + 2πk, kϵZ;

 х2= π + 2πn, nϵZ.

 б) 3π; $\frac{11}{3}π$.

**Вариант 4**

$$2∙16^{Cos x}-9∙4^{Cos x}+4=0$$

а) решить уравнение;

б) найти все корни уравнения на интервале[- 3π; -$\frac{3}{2}$π].

Ответ: а) x1= ±$\frac{2π}{3}$ + 2πk, kϵZ;

 х2= 2πn, nϵZ.

 б) -2π;$-\frac{8}{3}π$.

**Задание 15**

**Вариант 1**

Решите неравенство:

$\frac{log\_{3}(81x)}{log\_{3}x-4}$+ $\frac{log\_{3}x-4}{log\_{3}(81x)}$≥$\frac{24-log\_{3}x^{8}}{log\_{3}^{2}x-16}$

Решение:

ОДЗ: $\left\{\begin{array}{c}x>0,\\log\_{3}x-4\ne 0,\\log\_{3}(81x)\ne 0.\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}x>0,\\log\_{3}x\ne 4,\\log\_{3}81+log\_{3}x\ne 0.\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}x>0,\\x\ne 81,\\log\_{3}x\ne -4.\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}x>0,\\x\ne 81,\\x\ne \frac{1}{81}.\end{array}\right.$

Переносим правую дробь через знак неравенства:

$\frac{log\_{3}(81x)}{log\_{3}x-4}$+ $\frac{log\_{3}x-4}{log\_{3}(81x)}-\frac{24-log\_{3}x^{8}}{log\_{3}^{2}x-16}\geq 0$**.**

Преобразуем произведение $log\_{3}\left(81x\right)$в сумму $log\_{3}81+log\_{3}x$ и разложим знаменатель последней дроби на множители:

$\frac{log\_{3}81+log\_{3}x}{log\_{3}x-4}$+ $\frac{log\_{3}x-4}{log\_{3}81+log\_{3}x}$ **-** $\frac{24-8log\_{3}x}{(log\_{3}x-4)(log\_{3}x+4)}$≥ 0.

$\frac{4+log\_{3}x}{log\_{3}x-4}$+ $\frac{log\_{3}x-4}{4+log\_{3}x}$ **-** $\frac{24-8log\_{3}x}{(log\_{3}x-4)(log\_{3}x+4)}$≥ 0.

Приводим все дроби к общему знаменателю:

$\frac{(4+log\_{3}x)^{2}+ (log\_{3}x-4)^{2}-24+8log\_{3}x}{(log\_{3} x-4)(log\_{3}x+4)}$≥ 0.

Введем замену $log\_{3}x=a$, получим неравенство вида:

$\frac{(4+a)^{2}+ (a-4)^{2}-24+8a}{(a-4)(a+4)}$≥ 0, в котором раскроем квадраты и приведем подобные слагаемые:

$\frac{2a^{2}+8a+8}{(a-4)(a+4)}$≥ 0 $ \rightarrow \frac{2(a^{2}+4a+4)}{(a-4)(a+4)}$≥ 0 $ \rightarrow \frac{2(a+4)^{2}}{(a-4)(a+4)}$≥ 0.

Решим получившееся неравенство методом интервалов:



Решения неравенства: $a\in $(- $\infty $; -4) $∪\left\{-2\right\}∪$ (4; $+\infty $)

Произведем обратную замену:

# $$\left\{\begin{array}{c}log\_{3}x<-4,\\log\_{3}x=-2,\\log\_{3}x>4.\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}x<\frac{1}{81},\\x=\frac{1}{9},\\x>81.\end{array}\right.$$

# Учтем ОДЗ: x> 0, запишем ответ и получим 2 балла за задание ☺.

**ОТВЕТ:** $x\in $**(0;**$\frac{1}{81}$**)** $∪\left\{\frac{1}{9}\right\}∪$ **(81;** $+\infty $**)**

**Вариант 2**

Решите неравенство:

$\frac{log\_{2}(32x)}{log\_{2}x-5}$+ $\frac{log\_{2}x-5}{log\_{2}(32x)}$≥$\frac{log\_{2}x^{16}+18}{log\_{2}^{2}x-25}$

Решение:

ОДЗ: $\left\{\begin{array}{c}x>0,\\log\_{2}x-5\ne 0,\\log\_{2}(32x)\ne 0.\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}x>0,\\log\_{2}x\ne 5,\\log\_{2}32+log\_{2}x\ne 0.\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}x>0,\\x\ne 32,\\log\_{2}x\ne -5.\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}x>0,\\x\ne 32,\\x\ne \frac{1}{32}.\end{array}\right.$

Переносим правую дробь через знак неравенства:

$\frac{log\_{2}(32x)}{log\_{2}x-5}$+$\frac{log\_{2}x-5}{log\_{2}(32x)}$ - $\frac{log\_{2}x^{16}+18}{log\_{2}^{2}x-25}\geq 0$**.**

Преобразуем произведение $log\_{2}\left(32x\right)$в сумму $log\_{2}32+log\_{2}x$ и разложим знаменатель последней дроби на множители:

$\frac{log\_{2}32+log\_{2}x}{log\_{2}x-5}$+ $\frac{log\_{2}x-5}{log\_{2}32+log\_{2}x}$ **-** $\frac{16log\_{2}x+18}{(log\_{2}x-5)(log\_{2}x+5)}$≥ 0.

$\frac{5+log\_{2}x}{log\_{2}x-5}$+ $\frac{log\_{2}x-5}{5+log\_{2}x}$ **-** $\frac{16log\_{2}x+18}{(log\_{2}x-5)(log\_{2}x+5)}$≥ 0.

Приводим все дроби к общему знаменателю:

$\frac{(5+log\_{2}x)^{2}+ (log\_{2}x-5)^{2}-16log\_{2}x-18}{(log\_{2} x-5)(log\_{2}x+5)}$≥ 0.

Введем замену $log\_{2}x=a$, получим неравенство вида:

$\frac{(5+a)^{2}+ (a-5)^{2}-18-16a}{(a-5)(a+5)}$≥ 0, в котором раскроем квадраты и приведем подобные слагаемые:

$\frac{2a^{2}-16a+32}{(a-5)(a+5)}$≥ 0 $ \rightarrow \frac{2(a^{2}-8a+16)}{(a-5)(a+5)}$≥ 0 $ \rightarrow \frac{2(a-4)^{2}}{(a-5)(a+5)}$≥ 0.

Решим получившееся неравенство методом интервалов:



Решения неравенства: $a\in $(- $\infty $; -5) $∪\left\{4\right\}∪$ (5; $+\infty $)

Произведем обратную замену:

# $$\left\{\begin{array}{c}log\_{2}x<-5,\\log\_{2}x=4,\\log\_{2}x>5.\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}x<\frac{1}{32},\\x=16,\\x>32.\end{array}\right.$$

# Учтем ОДЗ: x> 0, запишем ответ.

**ОТВЕТ:** $x\in $**(0;**$\frac{1}{32}$**)** $∪\left\{16\right\}∪$ **(32;** $+\infty $**)**

**Вариант 3**

Решите неравенство:

$\frac{log\_{5}(25x)}{log\_{5}x-2}$+ $\frac{log\_{5}x-2}{log\_{5}(24x)}$≥$\frac{6-log\_{5}x^{4}}{log\_{5}^{2}x-4}$

**ОТВЕТ:** $x\in $**(0;**$\frac{1}{25}$**)** $∪\left\{\frac{1}{25}\right\}∪$ **(25;** $+\infty $**)**

**Вариант 4**

Решите неравенство:

$\frac{log\_{4}(64x)}{log\_{4}x-3}$+ $\frac{log\_{4}x-3}{log\_{4}(64x)}$≥$\frac{log\_{4}x^{4}+16}{log\_{4}^{2}x-9}$

**ОТВЕТ:** $x\in $**(0;**$\frac{1}{64}$**)** $∪\left\{4\right\}∪$ **(64;** $+\infty $**)**

**Задание 18**

**Вариант 1**

Найдите все значения *а*, при каждом из которых уравнение

$\sqrt{5x-3}$ln(3x - a)= $\sqrt{5x-3}$ln(4x + a) имеет ровно один корень на отрезке [0; 1].

Решение:

Перенесем все влево, вынесем общий множитель за скобку и получим уравнение вида:

$\sqrt{5x-3}$ln(3x - a) - $\sqrt{5x-3}$ln(4x + a) = 0.

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю, а другой при этом не теряет смысла, отсюда имеем два случая: либо $\sqrt{5x-3}$ =0, а

ln(3x - a) - ln(4x + a) при этом значении не теряет смысла; либо ln(3x - a) - ln(4x + a)=0, а $\sqrt{5x-3}$ не теряет смысл, т.е. $\sqrt{5x-3}$≥ 0.

|  |  |
| --- | --- |
| 1 случай | 2 случай |
| $\sqrt{5x-3}$ =0 →5x=3→ x=0.6, проверим скобку с логарифмами при этом значении x:ln(3·0.6 - a) - ln(4·0.6 + a)= ln(1.8 - a) - ln(2.4 + a), выражение имеет смысл, если $$\left\{\begin{array}{c}1.8-a>0,\\2.4+a>0.\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}1.8>a,\\a>- 2.4 \end{array}\right.$$Отметим на числовой прямой решение данной системы:$a\in $($-2.4; 1.8)$.Решим уравнение для найденных значений параметра:$\sqrt{5x-3}$(ln(3x - a) - ln(4x + a)) = 0$$\sqrt{5x-3}=0$$$x\_{1}= 0.6$, $x\_{1}\in $ **[0;1]**при$a$ = - 2.4ln(3x +$2.4$) - ln(4x-$2.4$ ) = 0 ln(3x +$2.4$) =ln(4x-2.4) 3x +$2.4$=4x$-2.4$x2$=$4.8 , **x2**$\notin $**[0;1]**при$a$ = 1.8ln(3x -1.8) - ln(4x+1.8 ) = 0ln(3x -1.8) =ln(4x+1.8 ) 3x -1.8 = 4x+1.8 x3= -3.6, **x3**$\notin $**[0;1]**Вывод: при $a\in $(-2.4; 1.8) уравнение имеет один корень, принадлежащий интервалу [0;1]. | ln(3x - a) - ln(4x + a)=0 и$\sqrt{5x-3}$≥ 0Выражениеln(3x - a) - ln(4x + a) будет равняться 0 тогда, когда будут равны аргументы, т.е.(3x - a) = (4x + a). При этомвыражение$\sqrt{5x-3}$ не теряет смысла при 5х-3≥ 0. Найдем значение х из уравнения(3x - $a$) = (4x + $a$)х = - 2$a$ и подставим в неравенство 5х-3 ≥ 0:- 10$a$ – 3≥ 010$a$ ≤ - 3$a$ **≤ - 0.3**теперь чтобы корень х = -2 $a$ принадлежал интервалу [0;1], значение $a$ должно находится в интервале [-$0.5;0$]. Учтем, что $a$ ≤ - 0.3 и нанесем на числовую прямую полученные значения:$a\in $[-0.5; -0.3].Решим уравнение для найденных значений параметра:$\sqrt{5x-3}$(ln(3x - a) - ln(4x + a)) = 0$$\sqrt{5x-3}=0$$$x\_{1}= 0.6$ , $x\_{1}\in $ **[0;1]**при$a$ = -0.5ln(3x +0.5) - ln(4x-0.5) = 0, ln(3x +0.5) =ln(4x-0.5) 3x +0.5= 4x-0.5 x2=1, **x2**$\in $**[0;1]**,при $a$ = - 0.3ln(3x +0.3) - ln(4x – 0.3) = 0,ln(3x +0.3) =ln(4x – 0.3)3x +0.3 = 4x – 0.3x3=0.6 , **x3 совпадает с х1.**Получается, что при $a\in $[-0.5; -0.3]уравнение имеет два различных корня, кроме $a$ = -0.3 .  |
| Совмести найденные решения: **ОТВЕТ: при** $a$**(-2.4; -0.5)** $∪$**[-0.3; 1.8)уравнение имеет один корень, принадлежащий интервалу [0;1].** |

**Вариант 2**

Найдите все значения *а*, при каждом из которых уравнение

$\sqrt{3x-2}$ln(x - a)= $\sqrt{3x-2}$ln(2x + a) имеет ровно один корень на отрезке [0; 1].

Решение:

Перенесем все влево, вынесем общий множитель за скобку и получим уравнение вида:

$\sqrt{3x-2}$(ln(x - a) - ln(2x + a)) = 0.

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю, а другой при этом не теряет смысла, отсюда имеем два случая: либо $\sqrt{3x-2}$ =0, а

ln(x - a) - ln(2x + a) при этом значении не теряет смысла; либо ln(x - a) - ln(2x + a)=0, а $\sqrt{3x-2}$ не теряет смысл, т.е. $\sqrt{3x-2}$≥ 0.

|  |  |
| --- | --- |
| 1 случай | 2 случай |
| $\sqrt{3x-2}$ =0 →3x=2 → x=$\frac{2}{3}$, проверим скобку с логарифмами при этом значении x:ln($\frac{2}{3}$ - a) - ln(2·$\frac{2}{3}$ + a)= ln($\frac{2}{3}$ - a) - ln($\frac{4}{3}$ + a), выражение имеет смысл, если $$\left\{\begin{array}{c}\frac{2}{3}-a>0,\\\frac{4}{3}+a>0.\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}\frac{2}{3}>a,\\a>-\frac{4}{3}.\end{array}\right.$$Отметим на числовой прямой решение данной системы:$a\in $($-\frac{4}{3}; \frac{2}{3})$. Решим уравнение для найденных значений параметра:$\sqrt{3x-2}$(ln(x - a) - ln(2x + a)) = 0$$\sqrt{3x-2}=0$$$x\_{1}= \frac{2}{3}$ , $x\_{1}\in $ **[0;1]**при$a$ =$-\frac{4}{3}$при$a$ =$\frac{2}{3}$ln(x +$\frac{4}{3}$) - ln(2x$-\frac{4}{3}$ ) = 0, ln(x- $\frac{2}{3}$) - ln(2x+$\frac{2}{3}$ ) = 0, ln(x +$\frac{4}{3}$) =ln(2x$-\frac{4}{3}$ ), ln(x- $\frac{2}{3}$) =ln(2x+$\frac{2}{3}$ )x +$\frac{4}{3}=$ 2x$-\frac{4}{3}$ x- $\frac{2}{3}$= 2x+$\frac{2}{3}$x2$=$ -$\frac{8}{3}$ , **x2**$\notin $**[0;1]**x3$=$ -$\frac{4}{3}$ , **x3**$\notin $**[0;1]**Вывод: при $a\in $($-\frac{4}{3}; \frac{2}{3})$уравнение имеет один корень, принадлежащий интервалу [0;1]. | ln(x - a) - ln(2x + a)=0 и$\sqrt{3x-2}$≥ 0Выражениеln(x - a) - ln(2x + a) будет равняться 0 тогда, когда будут равны аргументы, т.е.(x - a) = (2x + a). При этомвыражение$\sqrt{3x-2}$ не теряет смысла при 3х-2 ≥ 0. Найдем значение х из уравнения(x - $a$) = (2x + $a$)х = - 2$a$ и подставим в неравенство 3х-2 ≥ 0:- 6 $a$– 2 ≥ 06$a$ ≤ - 2$a$ **≤ -**$\frac{1}{3}$теперь чтобы корень х = -2 $a$ принадлежал интервалу [0;1], значение $a$ должно находится в интервале [-$\frac{1}{ 2};0$]. Учтем, что $a$ ≤ -$\frac{1}{3}$ и нанесем на числовую прямую полученные значения:$a\in $[$-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}]$.Решим уравнение для найденных значений параметра:$\sqrt{3x-2}$(ln(x - a) - ln(2x + a)) = 0$$\sqrt{3x-2}=0$$$x\_{1}= \frac{2}{3}$ , $x\_{1}\in $ **[0;1]**при$a$ =$-\frac{1}{2}$при $a$ = - $\frac{1}{3}$ln(x +$\frac{1}{2}$) - ln(2x$-\frac{1}{2}$ ) = 0, ln(x+$\frac{1}{3}$) - ln(2x - $\frac{1}{3}$ ) = 0, ln(x +$\frac{1}{2}$) =ln(2x$-\frac{1}{2}$ ), ln(x+$\frac{1}{3}$) =ln(2x - $\frac{1}{3}$ )x +$\frac{1}{2}=$ 2x$-\frac{1}{2}$x+$\frac{1}{3}$ = 2x- $\frac{1}{3}$x2$=1$, **x2**$\in $**[0;1]**,x3=$\frac{2}{3}$ , **x3 совпадает с х1.**Получается, что при $a\in $[$-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}]$уравнение имеет два различных корня, кроме $a$ =$-\frac{1}{3}$.  |
| Совмести найденные решения: **ОТВЕТ: при** $a\in \left(-\frac{4}{3}; -\frac{1}{2}\right)∪ $**[**$-\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ **уравнение имеет один корень, принадлежащий интервалу [0;1].** |