От авторов

Учебник «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый уровень. 10—11 классы» И. Ф. Шарыгина является продолжением учебника «Геометрия. 7—9 классы» того же автора. Первые четыре главы учебника для 10—11 классов содержат материал для изучения в 10 классе. Последние четыре главы, с 5-й по 8-ю, не только завершают курс «Стереометрия» (геометрия в пространстве), но и подводят черту под всем курсом школьной геометрии.

Изучение этого предмета заключается вовсе не в формулах для вычисления объемов многогранников или круглых тел или любых других формулах и теоремах, знание которых бывает полезным в обыденной жизни. Главное, что геометрия способствует развитию таких важнейших качеств личности, как наблюдательность и пространственное воображение, знакомит учеников с удивительным миром геометрических фигур и тел.

Для выпускников, которым предстоит в дальнейшем изучать математику в высшей школе, именно стереометрия, и особенно ее последние главы, является наиболее значимой. Знание этого материала будет полезным и при изучении ряда разделов высшей математики. Отметим, что автор сознательно не включил в учебник (даже в качестве дополнительного материала) многие теоремы и формулы, изучаемые в высшей школе, которые иногда вводят в школьный курс для классов с углубленным изучением математики. Гораздо важнее, по мнению автора, развить и углубить базовый школьный курс. Но с другой стороны некоторые идеи этой «чисто школьной» геометрии ближе к современной науке, чем разделы вузовских курсов. Об этом, в частности, рассказывается в послесловии к учебнику. Поэтому, прежде чем расстаться с учебником, обязательно прочтите, а еще лучше — изучите это послесловие.

Предисловие

Учебно-методический комплекс по геометрии для базового уровня реализует системно-деятельностный подход к обучению: формирует готовность обучающихся к саморазвитию и непрерывному образованию; создает развивающую образовательную среду; активизирует учебно-познавательную деятельность обучающихся; строит обучение с учетом индивидуальных, возрастных и психолого-физиологических особенностей обучающихся.

Учебно-методический комплекс по геометрии позволяет решать следующие задачи:

— формирование представлений о геометрии как особом языке науки, средстве моделирования явлений, об идеях и методах геометрии;

— развитие логического мышления, пространственного воображения, критичности мышления, необходимых для будущей профессиональной деятельности, а также для обучения в вузе;

— воспитание общей культуры личности, понимание значимости идей и методов геометрии для науки и культуры;

— систематизация полученных сведений о плоских геометрических фигурах; совершенствование навыков изображения плоских и пространственных фигур; расширение и совершенствование геометрического аппарата, сформированного на ступени основного общего образования, и его применение к решению геометрических задач;

— овладение знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для изучения других школьных предметов на базовом уровне, для получения образования;

— формирование представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений;

— формирование понятийного аппарата по основным разделам курса геометрии; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач.

В своей совокупности они учитывают современные тенденции отечественной и зарубежной школы и позволяют реализовать поставленные перед школьным образованием цели на информационноемком и практически значимом материале.

Материал учебников основан на авторской, так называемой наглядно-эмпирической концепции построения школьного курса геометрии, полностью соответствующей современным образовательным стандартам.

Систематический курс геометрии для 10—11 классов имеет ряд особенностей, отличающих его от других учебников.

Первое — и самое главное — он учит геометрии. В учебнике не просто приводятся определения и теоремы в сопровождении примеров и задач, а реализована направленность на формирование геометрического мышления. Уменьшена роль формально-логических рассуждений, больше внимания уделяется методам решения геометрических задач.

Отказ от аксиоматического подхода (означающий, по существу, отказ от излишней схоластики), т. е. наглядно-эмпирическое построение курса, позволяет уже на самом раннем этапе геометрии решать содержательные, интересные и красивые задачи.

Курс стереометрии способствует развитию таких важных качеств личности школьников, как наблюдательность и пространственное воображение, знакомит с удивительным миром геометрических фигур и тел, которые должен знать каждый культурный человек.

В школьный курс геометрии И. Ф. Шарыгин сознательно не включил многие теоремы и формулы, которые изучают в высших учебных заведениях и иногда вводят в программу для классов с углубленным уровнем изучения математики. Он считал, что гораздо важнее развить и углубить базовый школьный курс. Но оказалось, что некоторые идеи школьной геометрии ближе к современной науке, чем некоторые вопросы вузовских курсов. Об этом идет речь в послесловии к учебнику.

В соответствии с авторской концепцией полноценный курс геометрии состоит из геометрической теории, методов геометрии и системы задач.

Поставив во главу угла умение школьников решать задачи, автор рассмотрел различные методы решения и доказательства, что формирует мощную мотивацию к изучению предмета. Это главенство задачи выгодно отличает данный учебник геометрии от большинства других.

Материал учебников полностью отвечает содержанию Федерального государственного образовательного стандарта по геометрии средней школы и включает в себя дополнительный материал (соответствующим образом помеченный), позволяющий использовать учебники в классах с углубленным изучением математики.

Задачи в учебниках дифференцированы по уровню сложности, причем среди них выделены задачи важные, полезные и трудные, что позволяет учителю достаточно свободно ориентироваться в их многообразии.

В учебник геометрии для 10—11 классов включены: введение, главы и пункты содержания, дополнительные задачи и задачи для повторения, «Проверь свои знания» (тест на истинность и ложность геометрических утверждений), «Вместо послесловия» (краткая история геометрии), ответы и указания ко всем задачам учебника, полезные теоремы и формулы основной школы.

Если рассматривать курс 11 класса в целом с точки зрения сложившейся практики, то главными, безусловно, являются главы 5 и 8. Но, хотя для различных экзаменов и конкурсов материал глав 6 и 7 является относительно малозначимым, к ним следует отнестись достаточно внимательно. Эти главы очень важны для развития математической культуры. Кроме того, по темам глав 5 и 8 мы имеем большую и хорошо разработанную систему задач, и уровень освоения этих глав можно оценить с помощью традиционных контрольных работ, в то время как при изучении глав 6 и 7 контроль большей частью сводится к проверке знания теоретического материала. Здесь очень важно найти методы, позволяющие отделить формальное знание от ясного понимания.

В пятой главе «Объемы многогранников» речь идет об аналогиях в курсах планиметрии и стереометрии, которые наиболее наглядно просматриваются в темах «Площади» и «Объемы». С основными свойствами площадей и объемов, простейшими формулами для вычислений учащиеся уже знакомы. Теоретическое построение пятой главы идейно повторяет раздел «Площади многоугольников» из курса планиметрии. Подобно тому как в планиметрии рассматривался метод площадей, в стереометрии представлен метод объемов. При этом основные идеи и модификации этих методов сходны.

В шестой главе «Объемы и поверхности круглых тел» изучаются объемы и поверхности круглых тел: цилиндра, конуса и шара (сферы). Но главным является не только вывод соответствующих формул. Очень важен философский аспект. При выводе формул автор не прибегает к понятию интеграла, а использует либо интуитивно понятный предельный переход (в темах «Объем цилиндра» и «Объем конуса»), либо столь же интуитивно очевидный принцип Кавальери (в теме «Объем шара»). При этом автор опирался при написании учебника на историческую традицию и следовал принципу историзма. Столь же традиционно вводится понятие площади поверхности круглого тела и выводятся соответствующие формулы. В учебнике есть одна не очень привычная для школьных учебников идея, также относящаяся к философской стороне геометрии. Это попытка обратить внимание школьников на то, что понятие площади поверхности круглого тела не так очевидно, как может показаться на первый взгляд. С одной стороны, особенностью этой главы является приоритет теории над решением задач, с другой стороны, построение траектории изучения этого материала реализовано и через теорию, и через систему задач.

Седьмая глава «Правильные многогранники» занимает особое место в курсе. С одной стороны, по сложившейся традиции правильные многогранники редко включают в курс стереометрии. Исключение составляют только правильный тетраэдр и куб. Иногда ученики встречаются с октаэдром как объединением двух правильных четырехугольных пирамид. А такие интересные многогранники, как додекаэдр и икосаэдр, изучаются редко, хотя теория правильных многогранников является частью многовековой истории геометрии. Трудно говорить о геометрической культуре человека, незнакомого с правильными многогранниками. Так как важнейшей целью курса геометрии И. Ф. Шарыгина является развитие геометрической культуры обучающихся, то в учебник включена глава, посвященная этому вопросу. Самой трудной проблемой, по словам автора учебника, стало обоснование факта о количестве правильных многогранников. В учебнике представлены все пять видов многогранников. Важно, что доказывается существование додекаэдра и икосаэдра, а затем обосновывается, что каждый многогранник определяется своим ребром. Соответствующее рассуждение относится к октаэдру и икосаэдру — единственной паре многогранников, у которых углы при вершинах не являются трехгранными. На базовом уровне можно ограничиться знакомством со всем семейством правильных многогранников. На углубленном же уровне изучить полезно всю главу. Так как задачи из седьмой главы технически сложны, даже на углубленном уровне не следует требовать от учеников самостоятельного и полного решения, лучше разбирать их решения при фронтальной работе со всем классом.

Восьмая глава «Координаты и векторы в пространстве» посвящена важнейшим методам в геометрических исследованиях. В материал включены основные сведения традиционного школьного курса стереометрии, но в лаконичной форме. Согласно авторской концепции, с одной стороны, подробная теория векторного и координатного метода изучается в высших учебных заведениях в курсе аналитической геометрии, и нет необходимости излагать этот курс в сокращенном виде в школе. С другой стороны, эти методы не совсем соответствуют целям обучения школьной геометрии, как их понимал автор учебника. Координатный и векторный методы менее всего помогают достижению цели развития пространственного воображения учащихся. В данном учебнике эти методы являются инструментом повторения курса геометрии, так как дают возможность рассмотреть многие факты с новой точки зрения. Теоретическое содержание этой главы сходно с изложением аналогичного раздела в курсе планиметрии этого же автора, правда, несколько отличается системой задач.

Девятая глава «Движения пространства» ориентирована на классы с углубленным изучением математики и посвящена изучению следующих видов движений: вращение вокруг оси (поворот) и винтовое движение, центральная симметрия и симметрия относительно прямой, зеркальная симметрия (симметрия относительно плоскости) и скользящие симметрии. Большое внимание уделено композициям разных видов движений. Главная цель при этом — сформировать понятие движения пространства и его видов, научить применять геометрические преобразования в качестве аппарата решения стереометрических задач.

Программа предполагает достижение выпускниками старшей школы следующих личностных, метапредметных и предметных результатов.

В личностных результатах сформированность:

— целостного мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки математики и общественной практики ее применения;

— основ саморазвития и самовоспитания в соответствии с общечеловеческими ценностями и идеалами гражданского общества; готовности и способности к самостоятельной, творческой и ответственной деятельности с применением методов математики;

— готовности и способности к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательного отношения к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности на основе развитой мотивации учебной деятельности и личностного смысла изучения математики, заинтересованности в приобретении и расширении математических знаний и способов действий, осознанности в построении индивидуальной образовательной траектории;

— осознанного выбора будущей профессии, ориентированной в применении математических методов и возможностей реализации собственных жизненных планов; отношение к профессиональной деятельности как возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем;

— логического мышления: критичности (умение распознавать логически некорректные высказывания), креативности (собственная аргументация, опровержения, постановка задач, формулировка проблем, работа над исследовательским проектом и др.).

В метапредметных результатах сформированность:

— способности самостоятельно ставить цели учебной и исследовательской, проектной деятельности, планировать, осуществлять, контролировать и оценивать учебные действия в соответствии с поставленной задачей и условиями ее выполнения;

— умения самостоятельно планировать альтернативные пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач;

— умения находить необходимую информацию, критически оценивать и интерпретировать информацию в различных источниках (в справочниках, литературе, Интернете), представлять информацию в различной форме (словесной, табличной, графической, символической), обрабатывать, хранить и передавать информацию в соответствии с познавательными или коммуникативными задачами;

— навыков осуществления познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыков разрешения проблем; способности и готовности к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

— умения продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты;

— умения владения языковыми средствами — умения ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;

— умения представлять информацию в словесной, графической, табличной, символической форме;

— навыков познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств их достижения.

В предметных результатах сформированность[1]**:**

— представлений о геометрии как части мировой культуры и о ее месте в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;

— представлений об историческом пути развития геометрии как науки;

— представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;

— умения применять методы доказательств и алгоритмы решения, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

---

[1] См.: Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования / М-во образования и науки РФ. — (Стандарты второго поколения). Приказ Министерства образования и науки РФ от 17.05.2012 № 413, с. 15.

— умения пользоваться основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основными свойствами;

— умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры;

— умения выполнять геометрические построения, строить простейшие сечения геометрических тел;

— умения исследовать и описывать пространственные объекты, для чего использовать свойства плоских и пространственных геометрических фигур, методы вычисления их линейных элементов и углов (плоских и двугранных);

— умения применять изученные свойства геометрических фигур и формулы для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;

— умения использовать готовые компьютерные программы при решении задач.

Тематическое планирование

Тематическое планирование реализует один из возможных подходов к распределению изучаемого материала. Оно не носит обязательного характера и не исключает возможностей иного распределения содержания.

В примерном тематическом планировании разделы основного содержания разбиты на темы в порядке их изучения.

Особенностью примерного тематического планирования является то, что в нем содержится описание возможных видов деятельности обучающихся в процессе усвоения соответствующего содержания, направленных на достижение поставленных целей обучения. Это ориентирует учителя на усиление деятельностного подхода в обучении, на организацию разнообразной учебной деятельности, отвечающей современным психолого-педагогическим взглядам, на использование современных технологий.

В учебнике реализована идея уровневой дифференциации: параграфы, отмеченные знаком *, предназначены для углубленной подготовки учащихся.

11 класс (35 ч/70 ч)

Содержание материала учебника	**Количество часов в неделю**		**Характеристика основных видов учебной деятельности учащихся**
	1	**2**	
Глава 5. Объемы многогранников	**13**	**18**	
5.1. Что такое объем? Определение объема и следствие из него	1	1	Формулировать определение объема и его основные свойства. Сравнивать понятия площади и объема
5.2. Объем прямоугольного параллелепипеда Формула объема прямоугольного параллелепипеда	2	2	Применять формулу объема прямоугольного параллелепипеда при решении задач на вычисления и доказательства
5.3. Объем призмы Формула объема призмы. Формула объема треугольной призмы через площадь боковой грани	2	2	Применять формулу объема призмы при решении задач на вычисления и доказательства
5.4. Принцип подобия Определение подобия многогранников. Коэффициент подобия. Принцип подобия многогранников	1	1	Формулировать определение подобия многогранников. Формулировать принцип подобия многогранников. Использовать принцип подобия для решения задач

Продолжение табл.

Содержание материала учебника	Количество часов в неделю		Характеристика основных видов учебной деятельности учащихся
	1	2	
5.5. Объем пирамиды Формула объема пирамиды	2	4	Применять формулу объема пирамиды при решении задач
Контрольная работа № 1	1	1	Контролировать и оценивать свою работу. Ставить цели на следующий этап обучения
5.6. Вычисление объемов многогранников Теорема об отношении объемов треугольных пирамид. Теорема об объеме описанного многогранника. Теоремы об объеме тетраэдра	3	4	Решать простейшие задачи на вычисление объемов многогранников
5.7*. Использование свойств объема при решении задач		2	Решать трудные задачи с использованием формул объемов многогранников
Контрольная работа № 2	1	1	Контролировать и оценивать свою работу. Ставить цели на следующий этап обучения
Глава 6. Объемы и поверхности круглых тел	**7**	**9**	

6.1. Объем цилиндра и конуса Формулы объема цилиндра и конуса	1	1	Решать задачи с применением формул объема цилиндра и конуса
6.2. Принцип Кавальери и объем шара История развития идей вычисления объемов: «метод исчерпывания» Архимеда, И. Кеплер, П. Ферма, Г. Галилей, Б. Кавальери, И. Ньютон и др.	2	2	Формулировать принцип Кавальери. Применять формулу объема шара при решении задач
6.3. Площадь поверхности цилиндра, конуса и сферы Формулы площадей поверхности цилиндра, конуса и сферы. Площадь боковой поверхности конуса. Формула объема многогранника через радиус вписанной сферы	2	2	Объяснять, что называется площадью поверхности геометрического тела. Применять формулы площадей поверхности цилиндра, конуса, сферы при решении задач
6.4*. Сапог Шварца, или что такое площадь поверхности?		1	
6.5. Площадь поверхности сферического пояса Сферический пояс, высота сферического пояса, сферический сегмент. Формула площади поверхности сферического пояса	1	2	Применять формулу площади поверхности сферического пояса при решении задач

Продолжение табл.

Содержание материала учебника	Количество часов в неделю		Характеристика основных видов учебной деятельности учащихся
	1	2	
Проекты 1. Точные и приближенные методы нахождения геометрических величин (площадей и объемов). 2. Применение методов математического анализа в геометрии			Искать, отбирать, анализировать, систематизировать и классифицировать информацию. Использовать различные источники информации для работы над проектом
Контрольная работа № 3	1	1	Контролировать и оценивать свою работу. Ставить цели на следующий этап обучения
Глава 7. Правильные многогранники	**4**	**10**	
7.1. Определение правильного многогранника Виды правильных многогранников: тетраэдр, гексаэдр, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр. История вопроса: Платон, Аристотель, Евклид, И. Кеплер и др.	1	1	Формулировать определение правильного многогранника. Приводить примеры правильных многогранников. Распознавать и называть правильные многогранники

7.2*. Ограниченность числа видов правильных многогранников Теорема о числе правильных многогранников		1	
Проекты 1. Геометрия кристаллических структур. 2. Правильные многогранники			Искать, отбирать, анализировать, систематизировать и классифицировать информацию. Использовать различные источники информации для работы над проектом
7.3*. Тетраэдр, гексаэдр (куб) и октаэдр Доказательство существования тетраэдра, гексаэдра, октаэдра	1	3	
7.4*. Октаэдр и икосаэдр Доказательство существования икосаэдра		1	
7.5*. Додекаэдр Доказательство существования додекаэдра	1	1	
7.6*. Взаимосвязь между всеми правильными многогранниками		2	
Контрольная работа № 4	1	1	Контролировать и оценивать свою работу. Ставить цели на следующий этап обучения

Продолжение табл.

Содержание материала учебника	Количество часов в неделю		Характеристика основных видов учебной деятельности учащихся
	1	2	
Глава 8. Координаты и векторы в пространстве	**10**	**11**	
8.1. Декартовы координаты в пространстве Координатные оси, декартова система координат	1	1	Объяснять и иллюстрировать понятия декартовой системы координат в пространстве. Формулировать определение декартовых прямоугольных координат точки в пространстве. Вычислять расстояние между двумя точками, заданными координатами. Задавать сферу уравнением. Строить сферу, заданную уравнением. Решать задачи с использованием уравнения сферы
8.2. Формула расстояния между двумя точками. Уравнение сферы Формула расстояния между двумя точками, заданными координатами. Уравнение сферы		1	Иллюстрировать применение формул: расстояния между двумя точками и уравнения сферы. Решать задачи на вычисления и доказательство с использованием изученных формул
8.3. Уравнение плоскости Общее уравнение плоскости	2	2	Решать задачи с использованием уравнения плоскости

8.4. Уравнение прямой линии	2	2	Решать задачи с использованием уравнения прямой
Проект «Координатный метод решения задач»			Искать, отбирать, анализировать, систематизировать и классифицировать информацию. Использовать различные источники информации для работы над проектом
8.5. Векторы в пространстве Вектор. Длина вектора. Равные векторы, коллинеарные векторы, компланарные векторы. Сумма векторов, умножение вектора на число	1	1	Формулировать определение: вектора в пространстве; коллинеарных векторов; суммы, разности двух векторов; произведения вектора на число. Формулировать свойства линейных операций над векторами и иллюстрировать их, используя изображения многогранников. Решать задачи с использованием векторов, заданными координатами
8.6. Теорема о единственности представления любого вектора в пространстве через три некомпланарных вектора Теорема о единственности разложения вектора. Координаты вектора. Аффинная система векторов	1	1	Формулировать определение: компланарных векторов; векторного базиса на плоскости и в пространстве; теоремы о разложении вектора по двум неколлинеарным и трем некомпланарным векторам. Раскладывать вектор по некомпланарным векторам. Решать задачи векторным методом: переводить условие геометрической задачи в векторную терминологию, выполнять алгебраические операции над векторами и полученный в векторной форме результат переводить обратно на геометрический язык

Продолжение табл.

Содержание материала учебника	Количество часов в неделю		Характеристика основных видов учебной деятельности учащихся
	1	2	
8.7. Скалярное произведение векторов. Определение скалярного произведения и его свойства	2	2	Формулировать определение: угла между двумя ненулевыми векторами; скалярного произведения двух ненулевых векторов. Формулировать признак перпендикулярности двух векторов. Используя изображения куба, правильного тетраэдра, прямоугольного параллелепипеда, векторным методом доказывать параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, содержащих ребра, грани и сечения этих многогранников. С помощью скалярного произведения находить величины углов между прямыми и плоскостями, вычислять длины отрезков, расстояния от точки до прямой и плоскости, используя модели и изображения куба, правильного тетраэдра
Проект «Векторный метод решения задач»			Искать, отбирать, анализировать, систематизировать и классифицировать информацию. Использовать различные источники информации для работы над проектом

Контрольная работа № 5	1	1	Контролировать и оценивать свою работу. Ставить цели на следующий этап обучения
Глава 9*. Движения пространства		**10**	
9.1*. Определение движений **Определение движения пространства** **9.2*. Вращение вокруг оси и винтовое движение** **9.3*. Центральная симметрия и симметрия относительно прямой** **9.4*. Зеркальная симметрия и скользящие симметрии**		4	Формулировать и иллюстрировать определения: преобразования пространства; композиции преобразований; равенства двух преобразований; неподвижной фигуры при данном преобразовании Формулировать определения и свойства движений пространства, видов движений: центральной и осевой симметрии, симметрии относительно плоскости. Формулировать: определение равенства двух фигур на основе движений; определение фигуры, симметричной относительно точки, прямой, плоскости. Строить образы точки, прямой, плоскости, многогранника, сферы при симметрии относительно точки, плоскости. Выводить координатные формулы центральной, плоскостной симметрии пространства и строить образы фигур, пользуясь формулами этих преобразований

Окончание табл.

Содержание материала учебника	Количество часов в неделю		Характеристика основных видов учебной деятельности учащихся
	1	2	
9.5*. Разложение движений в композицию зеркальных симметрий Теорема о представлении движения		1	Находить неподвижные фигуры при различных симметриях и корректно обосновывать существование центра (плоскости, оси) симметрии данной геометрической фигуры. Используя куб, правильный тетраэдр, правильные призмы, применять различные симметрии при решении стереометрических задач на доказательство, построение и вычисление, обосновывая при этом утверждения логического и вычислительного характера
9.6*. Композиция двух зеркальных симметрий		1	
9.7*. Композиция двух вращений		1	
9.8*. Композиция поворотов вокруг скрещивающихся прямых		1	
Проект «Движения. Виды движений. Композиции движений»			Искать, отбирать, анализировать, систематизировать и классифицировать информацию. Использовать различные источники информации для работы над проектом
Итоговая контрольная работа		2	Контролировать и оценивать свою работу
Повторение	**1**	12	
Всего	**35**	**70**	

Методические рекомендации к изучению материала

Глава 5
Объемы многогранников

В этой главе рассматривается одна из важнейших тем курса геометрии — «Объемы многогранников». И если говорить об аналогиях в курсах планиметрии и стереометрии, то наиболее отчетливо они видны в темах «Площади» и «Объемы». На всех этапах школьного курса математики геометрические разделы содержат эти темы. С основными свойствами площадей и объемов, простейшими формулами для их вычисления учащиеся познакомились уже в начальной школе. Теоретическое построение главы 5, по существу, повторяет раздел «Площади многоугольников» в курсе «Планиметрия». Основные свойства объемов и определения аналогичны свойствам и определениям площади. Так же как и тема «Площади многоугольников» в планиметрии, тема «Объемы многогранников» является инструментом для повторения. Мы можем рассматривать уже известные конструкции задач, предлагая в качестве задания «найти объем». Подобно тому как в планиметрии мы рассматривали метод площадей, в стереометрии мы рассматриваем метод объемов. При этом основные идеи и модификации этих методов очень сходны.

5.1. Что такое объем?

В этом параграфе дается определение понятия объема и формулируется одно следствие из определения.

Предметные результаты:

— формулировать определение объема и его основные свойства;

— сравнивать понятия площади и объема.

Примерное планирование изучения материала

Изучению этого параграфа следует отвести один урок. В качестве домашнего задания можно предложить учащимся повторить тему «Площади» из курса планиметрии, а также главу 3 «Многогранники» из курса стереометрии и решенные ранее задачи из этой главы.

5.2. Объем прямоугольного параллелепипеда

Основное содержание параграфа — вывод формулы объема прямоугольного параллелепипеда:

$$V = abc.$$

Учебный материал может быть освоен на разных уровнях.

Предметные результаты на минимальном уровне:

— применять формулу объема прямоугольного параллелепипеда при решении задач на вычисления и доказателства.

Предметные результаты на более высоком уровне:

— воспроизводить вывод формулы объема прямоугольного параллелепипеда для случая, когда длины ребер — произвольные числа.

Следует обратить внимание на то, что для вывода основной формулы предлагается несколько иная схема, чем та, которая использовалась в курсе планиметрии при выводе формулы площади прямоугольника. Однако в принципе можно было бы почти дословно повторить здесь старое рассуждение, равно как и воспользоваться приведенным рассуждением при выводе формулы площади прямоугольника.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Вывод формулы объема прямоугольного параллелепипеда (теорема 5.1).

Задание на дом: доказательство теоремы 5.1, задачи 1, 2, 3 (после параграфа 5.3).

Урок 2. Разбор домашнего задания, проверка умения доказывать теорему 5.1. Решение задачи 4.

Задание на дом: задачи 6, 12 (после параграфа 5.3); можно также добавить несколько задач из дополнительного списка.

5.3. Объем призмы

Содержание данного параграфа — вывод формул для объема произвольной призмы. Основной является формула из теоремы 5.2. Вначале нужная формула доказывается для четырехугольной призмы (параллелепипеда), при этом предлагается иная схема, чем использовавшаяся в курсе планиметрии при доказательстве формулы площади произвольного параллелограмма. В данном случае это имеет принципиальное значение, поскольку попытка воспользоваться старой идеей натыкается на существенные технические трудности. Предлагаемый же здесь способ универсален: им вполне можно пользоваться для вывода формулы площади произвольного параллелограмма.

Полученная сначала для четырехугольной призмы формула без труда распространяется на треугольные, а затем и на произвольные призмы. Полезной с точки зрения теории и практики является простая и даже очевидная формула вычисления объема треугольной призмы через площадь боковой грани (теорема 5.3).

Предметные результаты:

— применять формулу объема призмы при решении задач на вычисления и доказательства.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Разбор домашнего задания. Вывод формулы для объема произвольной призмы (теорема 5.2). Доказательство теоремы 5.3.

Задание на дом: § 5.3, задачи 5, 10.

Урок 2. Разбор домашнего задания. Решение задач 7, 8, 13.

Задание на дом: задачи 9, 11, 16.

Указания к решению задач учебника

1. Если a, b и c — ребра данного параллелепипеда, то $PQL = a^2b^2c^2$.

2. Ребра параллелепипеда, образующие с диагональю углы 60° и 45°, равны

$d\cos 60° = \dfrac{d}{2}$ и $d\cos\ 45° = \dfrac{d\sqrt{2}}{2}$ соответственно.

Третье ребро равно $\sqrt{d^2 - \left(\dfrac{d}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{d\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{d}{2}$.

3. Ребра данного параллелепипеда равны $d\sin\alpha$, $d\sin\beta$ и $\sqrt{d^2 - (d\sin\ \alpha)^2 - (d\sin\ \beta)^2}$ (так как сумма квадратов ребер равна квадрату диагонали параллелепипеда).

4. Пусть a, b и c — ребра параллелепипеда. Тогда $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{3+4+5}{2} = 6$. Таким образом, $a = \sqrt{6-3}$, $b = \sqrt{6-5}$, $c = \sqrt{6-4}$.

5. Основание призмы — правильный треугольник со стороной 1. Высота призмы равна 1.

6. Расстояние между центрами соседних кубиков равно 1. Так как длина ломаной равна 101, то количество кубиков равно 102.

7. Площади граней параллелепипеда обратно пропорциональны высотам, проведенным к ним (так как $h_1S_1 = h_2S_2 = 3V$). Значит, они относятся как 4 : 3 : 2, а их сумма равна 18.

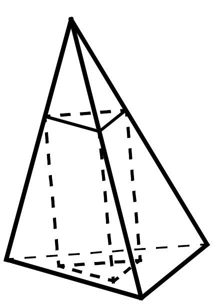

Рис. 1

8. Основание призмы подобно основанию пирамиды с коэффициентом подобия $\dfrac{1}{3}$ (рис. 1), поэтому площадь основания призмы равна $\dfrac{1}{9}$ площади основания пирамиды и равна 1. Высота призмы равна 2. Вообще, если расстояние от «верхнего» основания до вершины пирамиды равно x, то коэффициент подобия равен $\dfrac{x}{3}$, площадь основания призмы — $9 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2$, ее высота — $(3 - x)$, а объем призмы равен $x^2(3 - x)$. Максимальное значение эта функция принимает при $x = 2$.

9. Основанием данного параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом 60°, площадь которого равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$, а высота параллелепипеда равна 1.

10. Объем данного многогранника равен объему призмы, основанием которой является равносторонний треугольник ABC со стороной 1 и высота которой равна 5 (рис. 2).

11. Объем получившегося многогранника равен объему прямоугольного параллелепипеда, одной из граней которого является квадрат со стороной 1, а третья сторона которого равна $\frac{3 + 4 + 6 + 5}{4} = 4{,}5$ (рис. 3).

12. Если a, b и c — ребра параллелепипеда, то $a\sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{13}$, $b\sqrt{a^2 + c^2} = 2\sqrt{10}$, $c\sqrt{a^2 + b^2} = 3\sqrt{5}$. Отсюда $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. Соответственно объем параллелепипеда равен 6.

13. Данный каркас состоит из 8 единичных кубиков, расположенных в вершинах исходного куба, и 12 прямоугольных параллелепипедов со сторонами 1, 1 и 6 (вдоль ребер исходного куба).

14. а) Данное множество состоит из 8 единичных кубиков (в вершинах исходного куба).

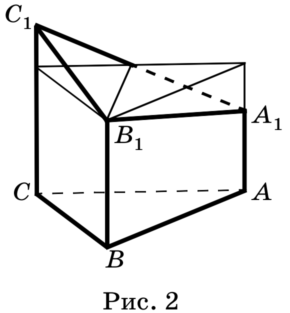

Рис. 2

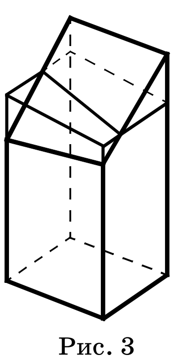

Рис. 3

б) Данное множество состоит из 12 прямоугольных параллелепипедов со сторонами 1, 1 и 8 (вдоль ребер исходного куба).

в) Данное множество состоит из 6 прямоугольных параллелепипедов со сторонами 8, 8 и 1 (вдоль граней исходного куба).

15. Площадь основания данного параллелепипеда равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (удвоенная площадь правильного треугольника со стороной 1), а его высота равна высоте правильного тетраэдра со стороной 1. Нетрудно доказать, что основание высоты правильного тетраэдра совпадает с центром правильного треугольника (его основания). Таким образом, длина высоты равна $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

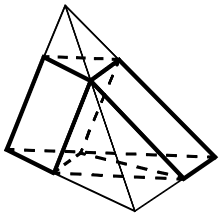

Рис. 4

16. Оставшуюся фигуру можно разбить на две призмы (рис. 4). У одной из них основание — это правильный треугольник со стороной $\frac{1}{3}$, а высота равна $\frac{2}{3}$ высоты правильного тетраэдра. У второй в основании лежит правильный треугольник со стороной $\frac{2}{3}$, а высота равна $\frac{2}{3}$ высоты тетраэдра.

17. Проведем плоскость, параллельную основанию призмы и проходящую через ту же точку на ее оси. Эта плоскость делит ось призмы, ее боковую поверхность и объем на такие же (равновеликие) части, что и исходная. (Объемы тел при противоположных гранях призмы и площади на них «взаимно уничтожаются».)

5.4. Принцип подобия

Содержание этого параграфа можно разбить на две небольшие части: определение подобия (для многогранников) и принцип подобия (опять-таки для многогранников). Здесь необходимо подчеркнуть, что и то, и другое распространяется на произвольные тела. Но при этом определение подобия для произвольных тел существенно отличается от соответствующего определения для многогранников. Аналогично плоскому случаю *два тела называются подобными, если между их точками можно установить взаимно-однозначное соответствие, при котором отношение расстояний между соответствующими точками постоянно*. Это отношение расстояний называется *коэффициентом подобия*, причем соответствующие углы в подобных телах равны. Здесь следует заметить, что эквивалентность этих определений для многогранников хотя и достаточно очевидна, но ее доказательство требует преодоления определенных технических трудностей. Прежде всего, речь идет о доказательстве того, что два многогранника, подобные в смысле определения 25, являются подобными и в смысле общего определения. Можно специально не привлекать внимания учащихся к этому обстоятельству, но сам учитель это понимать должен.

Что же касается самого принципа подобия, то он верен и для произвольных тел. Достаточно лишь в формулировке, данной в учебнике, заменить слово «многогранников» на слово «тел».

Предметные результаты:

— формулировать определение подобия многогранников;

— формулировать принцип подобия многогранников;

— использовать принцип подобия для решения задач.

Примерное планирование изучения материала

По теме данного параграфа достаточно провести *один урок*, на котором разобрать его содержание и решить задачи 1 и 2.

Задание на дом: задачи 3 и 4.

Указания к решению задач учебника

1. Искомый объем равен разности объемов двух пирамид, подобных данной, с коэффициентами подобия $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$ соответственно.

2. Объем части данного шара, находящейся внутри двугранного угла, равен $\frac{\alpha}{2\pi}$ части объема всего шара, а отношение объемов любых двух шаров равно кубу отношения их радиусов.

3. Верхняя часть — это пирамида, подобная исходной с коэффициентом подобия $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ (ее объем равен половине объема исходной пирамиды).

4. Искомый объем равен разности объемов двух пирамид, подобных данной. Их основания — многоугольники, подобные основанию исходной пирамиды с коэффициентами подобия $\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{\frac{2}{3}}$ соответственно (отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия). Следовательно, их объемы равны: $3 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3$ и $3 \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3$.

5.5. Объем пирамиды

Содержание этого параграфа — вывод формулы объема пирамиды. Следует сказать, что формула объема пирамиды является центральной не только в разделе «Объемы», но и во всем курсе стереометрии. Идея, на которой основывается ее вывод, восходит к Архимеду. Но если Архимед продолжал процесс, который он назвал «методом исчерпывания», вписывая во вновь возникающие треугольные пирамиды треугольные призмы, и в результате представлял объем исходной пирамиды в виде суммы бесконечного ряда, то в учебнике делается лишь один первый шаг «процедуры Архимеда», после чего на основании принципа подобия составляется уравнение для искомой величины объема. Следует сказать, что во времена Архимеда отсутствовал сколько-нибудь развитый алгебраический аппарат, и поэтому он в принципе не мог воспользоваться «методом уравнений», с которым сегодня школьники знакомятся уже в начальной школе. И еще на один момент должен обратить внимание учитель (именно учитель!). Кажется, что предлагаемый метод позволяет обойтись при выводе формулы объема пирамиды без интеграла. Но это не совсем так. По существу, идея интегрирования оказалась «спрятанной» в «принцип подобия». Позже в параграфе 6.2 в учебнике показывается, как можно вывести формулу для объема пирамиды, основываясь на «принципе Кавальери», и здесь идея интегрирования прячется в «принцип Кавальери», являющийся более общим по отношению к «принципу подобия».

Предметные результаты:

— применять формулу объема пирамиды при решении задач.

Необходимо подчеркнуть, что умения, связанные с формулой (4) из 5.5, не ограничиваются вычислением объемов и список этих умений не заканчивается в параграфе 5.5. В дальнейшем учащимся регулярно придется сталкиваться с задачами, в которых надо использовать основную формулу для объема пирамиды в различных ситуациях и в разных методах решения (при непосредственном вычислении, для составления уравнений и т. д.).

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Доказательство теоремы 5.4. Задачи 1, 2, 6.

Задание на дом: задачи 3, 4, 5, 13.

Урок 2. Разбор домашнего задания. Начало решения задачи 8.

Задание на дом: продолжение решения задачи 8. Здесь следует сказать, что задачи 8, 9 и 10 очень громоздки, поскольку состоят из большого числа внешне однотипных, но значительно отличающихся друг от друга по сложности заданий. Полезно предложить учащимся разбиться на группы, где каждая группа решает свои несколько пунктов указанных задач. Результат этой работы полезно оформить в виде большой таблицы и повесить в классе. Окончательное завершение работы может быть отложено до конца полугодия.

Урок 3. Обсуждение предварительных результатов по задаче 8. Решение задачи 7.

Задание на дом: продолжить работу над задачей 8, начать работу над задачами 9 и 10.

Урок 4. Обсуждение предварительных результатов по задачам 8, 9 и 10. Задача 11.

Задание на дом: продолжить работу над задачами 8, 9 и 10.

Урок 5. Контрольная работа № 1.

Указания к решению задач учебника

1. Основание тетраэдра — правильный треугольник со стороной a. Его площадь равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Высота тетраэдра равна $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

2. Изменение в условии: вместо пирамиды ACA_1D_1 — пирамида ACB_1D_1. Площадь основания ABC пирамиды $ABCC_1$ равна половине площади соответствующей грани параллелепипеда, а ее высота, опущенная из вершины C_1, — равна высоте параллелепипеда. Таким образом, объем пирамиды $ABCC_1$ равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда. Аналогично находится объем пирамиды $ABDB_1$, у которой в качестве основания выбирается грань ABD. Пирамида ACB_1D_1 получается из параллелепипеда отрезанием четырех пирамид $ADCD_1$, $B_1D_1C_1C$, $ABCB_1$ и $A_1B_1D_1A$, объем каждой из которых равен $\frac{V}{6}$ (основание — половина соответствующей грани параллелепипеда, а высота равна высоте параллелепипеда). Многогранник, вершинами которого являются центры граней данного параллелепипеда, состоит из двух равных четырехугольных пирамид с общим основанием (рис. 5). Площадь основания равна половине площади соответствующей грани параллелепипеда, а высота — половине высоты параллелепипеда. Таким образом, объем каждой пирамиды равен $\frac{V}{12}$.

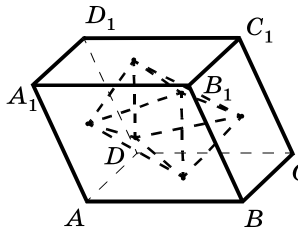

Рис. 5

3. Рассмотрев в качестве основания пирамиды одну из ее боковых граней (например, со сторонами a и b), мы получим: основание пирамиды — прямоугольный треугольник со сторонами a и b, высота — c.

4. Объем данной пирамиды равен 4 (см. задачу 3). Найти площадь основания пирамиды можно, найдя по теореме Пифагора его стороны. Но лучше воспользоваться результатом задачи 20 (п. 2) из параграфа 1.7 учебника (для треугольной пирамиды с попарно перпендикулярными боковыми ребрами квадрат площади основания равен сумме квадратов площадей боковых граней). Зная площадь основания и объем пирамиды, можно найти ее высоту.

5. Площадь основания данной пирамиды (правильного шестиугольника со стороной 1) равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (он состоит из 6 правильных треугольников со стороной 1). Высота пирамиды равна $\sqrt{3}$ (основание высоты — центр шестиугольника).

6. Возьмем в качестве основания данной пирамиды треугольник со сторонами 2, 2 и $\sqrt{6}$. Его площадь равна $\frac{\sqrt{15}}{2}$. Так как боковые ребра пирамиды равны, то основание высоты совпадает с центром окружности, описанной около основания. Радиус этой окружности равен $2\sqrt{\frac{2}{5}}$. Таким образом, высота пирамиды равна $2\sqrt{\frac{3}{5}}$.

7. Зафиксируем один из отрезков, а второй будем перемещать. Докажем, что объемы всевозможных тетраэдров с вершинами в концах данных отрезков равны. Площадь треугольника, две вершины которого — концы перемещающегося по данной прямой отрезка, а третья фиксирована, постоянна (длина основания и высота — расстояния от заданной точки до заданной прямой — не меняются). Расстояние от четвертой вершины тетраэдра до плоскости этого треугольника постоянно (и плоскость, и точка — фиксированные). Таким образом, объемы всех возможных таких тетраэдров равны. То же самое будет, если мы будем перемещать другой отрезок, т. е. объемы всех таких тетраэдров равны.

8. Запишем сначала некоторые соотношения между величинами, указанными в условии. Рассмотрим случай треугольной пирамиды (пункт а). Обозначим через A, S и Q соответственно одну из вершин основания пирамиды, ее вершину и центр основания.

1. Из прямоугольного треугольника ASQ получаем:

$$h^2 = b^2 - \frac{a^2}{3}. \qquad (1)$$

2. Пусть прямая SQ вторично пересекает описанную около пирамиды сферу в точке P. В прямоугольном треугольнике ASP гипотенуза SP равна $2R$, катет AS равен b, а его проекция на гипотенузу равна h. Отсюда получаем соотношение:

$$b^2 = 2Rh. \qquad (2)$$

3. Площадь боковой грани нетрудно выразить через a и b. Имеем:

$$Q = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}. \qquad (3)$$

4. Если φ — двугранный угол при основании пирамиды, то $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{h}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \dfrac{2h\sqrt{3}}{a}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{2r\sqrt{3}}{a}$. Используя формулу тангенса двойного угла, получим:

$$h = \frac{2ra^2}{a^2 - 12r^2}. \qquad (4)$$

Теперь выразим объем через всевозможные пары (кроме указанных в условии):

1. $V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{1}{12}a^2\sqrt{3b^2 - a^2}$.

2. $V = \frac{1}{12}a^2h\sqrt{3}$.

3. Заменим в формуле (1) b^2 по формуле (2). Получим квадратное уравнение относительно h. Найдем h через a и R и подставим в формулу п. 2. Получим

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2\left(R \pm \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}}\right).$$

4. Заменяя в формуле п. 2 h по формуле (4), получим $V = \frac{a^4 r\sqrt{3}}{6(a^2 - 12r^2)}$.

5. Выразим из формулы (3) b и подставим в формулу п. 1. Получим $V = \frac{a}{24}\sqrt{48Q^2 - a^4}$.

6. Выразим по формуле (1) a^2 и подставим в формулу п. 2. Получим $V = \frac{\sqrt{3}}{4}h(b^2 - h^2)$.

7. Выразим h из формулы (2) и подставим в предыдущую формулу (п. 6). Получим $V = \frac{\sqrt{3}b^4(4R^2 - b^2)}{32R^3}$.

8. Возведя в квадрат формулу (3), получим уравнение, из которого найдем a^2 (два значения). Подставив найденные значения в формулу п. 1, получим $V = \frac{1}{6}(b^2 \pm \sqrt{b^4 - 4Q^2})\sqrt{b^2 \mp 2\sqrt{b^4 - 4Q^2}}$ (берутся либо верхние, либо нижние знаки). Задача имеет решение при условии $2Q \leqslant b^2$. Задача имеет два решения, если $2Q < b^2 < \frac{4}{\sqrt{3}}Q$.

9. Заменяя b^2 в формуле п. 6 по формуле (2), получим $V = \frac{\sqrt{3}}{4}h^2(2R - h)$.

10. Из формулы (4) найдем a^2 и подставим в формулу п. 2. Получим $V = \frac{r^2h^2\sqrt{3}}{h - 2r}$.

11. Заменим в формуле (3) b^2, выразив эту величину из формулы (1). После возведения в квадрат получим биквадратное относительно a уравнение.

Найдем a^2 и подставим в формулу п. 2. Получим

$$V = \frac{\sqrt{3}}{6}\,h(\sqrt{9h^4 + 12Q^2} - 3h^2).$$

12. Из формул (1) и (2) получим $6Rh = 3h^2 + a^2$. Найдем отсюда a^2 и подставим в формулу (4). После преобразований относительно h получим квадратное уравнение: $h^2 - 2h(R + r) + 4r(R + r) = 0$. Из этого уравнения получим $h^2 = 2(R + r)(h - 2r)$. Заменим h^2 в числителе формулы п. 10. Получим

$$V = 2\sqrt{3}\,(R + r)r^2.$$

Для случая б) точно такими же методами, как и в предыдущем случае, получим следующие соотношения:

$$h^2 = b^2 - \frac{a^2}{2}, \tag{1}$$

$$b^2 = 2Rh, \tag{2}$$

$$Q = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}, \tag{3}$$

$$h = \frac{2ra^2}{a^2 - 4r^2}. \tag{4}$$

Как видим, только две формулы — (1) и (3) — отличаются от соответствующих формул предыдущего случая.

Найдем объем через соответствующие пары данных величин.

1. $V = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{6}\sqrt{2b^2 - a^2}$.

2. $V = \dfrac{1}{3}a^2h$.

3. $V = \dfrac{2}{3}h(b^2 - h^2)$.

4. $V = \dfrac{a^2}{3}\left(R \pm \sqrt{R^2 - \dfrac{a^2}{2}}\right)$.

5. $V = \dfrac{b^4}{12R^3}(4R^2 - b^2)$.

6. $V = \dfrac{2}{3}h^2(2R - h)$.

7. $V = \dfrac{2a^4r}{3(a^2 - 4r^2)}$.

8. $V = \dfrac{a}{6}\sqrt{16Q^2 - a^4}$.

9. Сначала из равенства (3) выразим a^2 и подставим в равенство (1). При этом один из корней отпадет. Найдем h, а затем получим

$$V = \frac{2}{3}\left(b^2 - \sqrt{b^4 - 4Q^2}\right)\sqrt[4]{b^4 - 4Q^2}.$$

10. Из равенств (1) и (3) выразим a^2 через h и Q. Получим $V = \dfrac{2}{3}h\left(\sqrt{h^4 + 4Q^2} - h^2\right)$.

11. Из (4) выразим a^2. Получим $V = \dfrac{4h^2r^2}{3(h - 2r)}$.

12. Используя соотношения (1), (2) и (4), получим для h квадратное уравнение $h^2 - 2(R + r)h + 4Rr + 2r^2 = 0$. Найдем из этого уравнения h и подставим в предыдущую формулу для объема. После преобразований получим

$$V = \frac{4}{3}r^2\left(3R + r \pm \sqrt{R^2 - 2Rr - r^2}\right).$$

9. Рассмотрим правильную треугольную пирамиду с указанными в условии параметрами.

1. Имеем:

$$a = 2b\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Выразим из этого равенства b и подставим в формулу для объема (см. задачу 8, случай а), п. 1). Получим $V = \dfrac{a^3}{24\sin\dfrac{\alpha}{2}}\sqrt{1 + 2\cos\alpha}$.

2. Заменив в предыдущей формуле для объема a через b по формуле (1), получим

$$V = \frac{b^3}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{1 + 2\cos\alpha}.$$

3. В равенстве $h^2 = b^2 - \frac{a^2}{3}$ заменим a по формуле (1). После несложных преобразований получим $b^2 = h^2\frac{3}{1 + 2\cos\alpha}$. Учитывая результат предыдущего пункта, получим $V = \frac{h^3\sqrt{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1 + 2\cos\alpha}$.

4. В равенстве $b^2 = 2Rh$ заменим b (см. предыдущий пункт). Получим $h = \frac{2}{3}(1 + 2\cos\alpha)R$. Теперь по формуле из предыдущего пункта получим

$$V = \frac{8R^3\sqrt{3}}{27}(1 + 2\cos\alpha)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

5. При выводе формулы объема через r и α воспользуемся теоремой 5.6 из следующего параграфа об объеме описанного многогранника $\left(V = \frac{1}{3}rS\right.$, где r — радиус вписанного шара, а S — площадь полной поверхности многогранника$\left.\right)$. Выразим сначала полную поверхность пирамиды через b и α. Тогда нетрудно получить равенство $S = b^2\left(\frac{3}{2}\sin\alpha + \sqrt{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$. Приравнивая два выражения для объема: полученное в п. 2 и по формуле теоремы 5.6, найдем $b = \frac{2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1 + 2\cos\alpha}}r$. Подставляя это значение b в формулу п. 2, получим $V = \frac{8r^3\sqrt{3}\cos^3\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1 + 2\cos\alpha}}$.

З а м е ч а н и е. Можно обойтись без использования формулы из следующего параграфа, чтобы выразить b через r и α. Для этого выразим последовательно через b и α высоту боковой грани (так называемую *апофему*) $p = b\cos\frac{\alpha}{2}$, сторону основания, радиус окружности $\rho = \frac{b}{\sqrt{3}}\sin\frac{\alpha}{2}$, вписанной в основание, и h. В прямоугольном треугольнике с гипотенузой p и катетами ρ и h биссектриса, проведенная к катету h, делит его на отрезки r и $h - r$. Из уравнения $\frac{p}{\rho} = \frac{h-r}{r}$ найдем нужное представление b через r и α.

6. Имеем $2Q = b^2\sin\alpha$. Находим b и подставляем в формулу п. 2. Получим

$$V = \frac{1}{3}Q^{3/2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{2(1 + 2\cos\alpha)}{\sin\alpha}}.$$

7. $h = \frac{a}{\sqrt{3}}\,\mathrm{tg}\,\beta$. Значит, $V = \frac{a^3}{12}\,\mathrm{tg}\,\beta$.

8. $b\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Находим a и подставляем в предыдущую формулу. Получим $V = \frac{1}{4}b^3\sqrt{3}\cos^2\beta\sin\beta$.

9. $h = b\sin\beta$. Выражаем b и подставляем в формулу из предыдущего пункта. Получим

$$V = \frac{1}{4}h^3\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}^2\beta.$$

10. Имеем $b = 2R\sin\beta$. Затем воспользуемся формулой п. 8. Получим $V = \frac{1}{2}R^3\sqrt{3}\sin^2 2\beta\sin^2\beta$.

11. Имеем $a = \sqrt{3}\,b\cos\beta$. Полная поверхность $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3\frac{a}{2}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$. Заменяя a и преобразуя формулу, получим

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{4}b^2\cos\beta(\cos\beta + \sqrt{1 + 3\sin^2\beta}).$$

Приравнивая два выражения для объема: полученное в п. 2 и по формуле теоремы 5.6 (так же, как мы поступали в пункте 5), найдем

$$b = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\,\mathrm{tg}^2\beta}}{\sin\beta}\,r.$$

Подставив найденное выражение в формулу п. 2, получим $V = r^3 \frac{\sqrt{3}}{4}\ \mathrm{ctg}^2\beta\,(1 + \sqrt{1 + 4\,\mathrm{tg}^2\beta}\,)^3$.

12. Имеем $a = \sqrt{3}\,b\cos\beta$, $Q = \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$. Выразим Q через b. Получим $Q = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2\sqrt{4 - 3\cos\beta}$. Из этого равенства найдем b и подставим в формулу п. 8. Получим $V = \dfrac{2Q^{3/2}\sqrt{\mathrm{ctg}\,\beta}}{\sqrt[4]{3(4 + \mathrm{ctg}^2\beta)^3}}$.

13. $h = \frac{a}{2\sqrt{3}}\ \mathrm{tg}\,\gamma$, $V = \frac{a^3}{24}\ \mathrm{tg}\,\gamma$.

14. $b = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\gamma}{12} + \frac{1}{3}}$. Следовательно, $a = b\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\gamma + 4}}$. Подставляя в предыдущую формулу, получим $V = \dfrac{b^3\sqrt{3}}{(\mathrm{tg}^2\gamma + 4)^{3/2}}\,\mathrm{tg}\,\gamma$.

15. $V = h^3\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}^2\gamma$.

16. Имеем $b^2 = 2Rh$. Кроме того, $h = \frac{a}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{tg}\,\gamma$ (см. п. 13) и $a = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\gamma + 4}}$ (п. 14). Из последних двух равенств выразим h через b:

$$h = \frac{b\,\mathrm{tg}\,\gamma}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\gamma + 4}} = \frac{b}{\sqrt{1 + 4\mathrm{ctg}^2\gamma}}$$

и подставим в первое равенство. Получим

$$b = \frac{2R}{\sqrt{1 + 4\mathrm{ctg}^2\gamma}}.$$

По формуле п. 14 найдем $V = \dfrac{8R^3\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}^2\gamma}{(1 + 4\mathrm{ctg}^2\gamma)^3}$.

17. Имеем:

$$h = r\,\mathrm{ctg}\,\frac{\gamma}{2}\ \mathrm{tg}\,\gamma = r\frac{1 + \cos\gamma}{\sin\gamma}\,\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = r\frac{1 + \cos\gamma}{\cos\gamma}.$$

Заменяя h в формуле п. 15, получаем

$$V = r^3 \sqrt{3}\, \frac{(1 + \cos\gamma)^3}{\cos\gamma\, \sin\gamma^2}.$$

18. Пусть сторона основания равна a. Поскольку площадь проекции боковой грани на основание равна трети площади основания, получаем равенство $Q\cos\gamma = a^2 \dfrac{\sqrt{3}}{12}$. Из этого равенства выразим a и подставим в формулу п. 13. После преобразований получаем $V = \dfrac{Q^{3/2}}{\sqrt[4]{3}} \sin\gamma \sqrt{\cos\gamma}$.

19. Проведем сечение через сторону основания перпендикулярно противоположному боковому ребру. В сечении будет равнобедренный треугольник с углом φ против основания. Высота, проведенная к основанию, будет равна $d = \dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$. С другой стороны, $d = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta$. Таким образом, $\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$. Значит, $\cos\beta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}^2\dfrac{\varphi}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}(1 - 2\cos\varphi)}$. Заменяя в формуле п. 7 тригонометрические функции от угла β их выражениями через угол φ, получим:

$$V = \frac{a^3\cos\frac{\varphi}{2}}{12\sqrt{1 - 2\cos\varphi}}.$$

20. См. п. 19 и 8, $V = \dfrac{b^3(1 - 2\cos\varphi)\cos\frac{\varphi}{2}}{12\sin^3\frac{\varphi}{2}}$.

21. См. п. 19 и 9, $V = \dfrac{h^3\sqrt{3}(1 - 2\cos\varphi)}{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}$.

22. См. п. 19 и 10, $V = \dfrac{2R^3\sqrt{3}\cos^4\frac{\varphi}{2}(1 - 2\cos\varphi)}{27\sin^6\frac{\varphi}{2}}$.

23. См. п. 19 и 11, $V = \dfrac{r^3\sqrt{3}(\sqrt{1-2\cos\varphi}+\sqrt{3})^3}{4\sqrt{1-2\cos\varphi}\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}$.

24. См. п. 19 и 12, $V = \dfrac{2}{3}Q^{3/2}\cos\dfrac{\varphi}{2}\sqrt[4]{1-2\cos\varphi}$.

10. Рассмотрим правильную четырехугольную пирамиду.

1. Имеем:

$$a = 2b\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Выразим из этого равенства b и подставим в формулу для объема (см. задачу 8, случай б), п. 1). Получим $V = \dfrac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

2. Заменив в предыдущей формуле для объема a через b по формуле (1), получим

$$V = \frac{4}{3}b^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}.$$

3. В равенстве $h^2 = b^2 - \dfrac{a^2}{2}$ заменим a по формуле (1). После преобразований получим $b^2 = h^2\dfrac{1}{\cos\alpha}$. Учитывая результат предыдущего пункта, получим

$$V = \frac{4}{3}h^3\frac{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

4. В равенстве $b^2 = 2Rh$ заменим b (см. п. 3). Получим $h = 2R\cos\alpha$. Теперь по формуле предыдущего пункта получим

$$V = \frac{32}{3}R^3\cos^2\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

5. Рассмотрим сечение плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и середины двух противоположных сторон основания. Радиус окружности, вписанной в это сечение, равен r. Указанное сечение является равнобедренным треугольником с боковыми сторонами $b\cos\dfrac{\alpha}{2}$ и основанием $2b\sin\dfrac{\alpha}{2}$. Пери-

метр этого сечения равен $2b\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right) = 2b\sqrt{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$. Высота, проведенная к основанию, равна $b\sqrt{\cos\alpha}$. Выражая площадь треугольника двумя способами и приравнивая эти выражения, получим $br\sqrt{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = b^2\sqrt{\cos\alpha}\,\sin\frac{\alpha}{2}$. Выразим из этого равенства b и подставим в формулу п. 2.

Получим $V = \frac{8\sqrt{2}}{3}r^3\frac{\cos^3\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}$.

6. Имеем $2Q = b^2\sin\alpha$. Находим b и подставим в формулу п. 2. Получим $V = \frac{4\sqrt{2}}{3}Q^{3/2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}$.

7. $h = \frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\beta$. Следовательно, $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}\operatorname{tg}\beta$.

8. $b\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Находим a и подставим в формулу из п. 7. Получим $V = \frac{2}{3}b^3\cos^2\beta\sin\beta$.

9. $\frac{2}{3}h^3\operatorname{ctg}^2\beta$.

10. Имеем $b = 2R\sin\beta$. Затем воспользуемся формулой пункта 8. Получим $V = \frac{4}{3}R^3\sin^2 2\beta\sin^2\beta$.

11. Имеем $a = \sqrt{2}\,b\cos\beta$. Рассмотрим сечение плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и середины двух противоположных сторон основания. Радиус окружности, вписанной в это сечение, равен r. Указанное сечение является равнобедренным треугольником с боковыми сторонами $\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2} = b\sqrt{1 - \frac{1}{2}\cos^2\beta}$ и основанием $a = \sqrt{2}\,b\cos\beta$. Его высо-

та $b\sin\beta$, а периметр равен $b\left(2\sqrt{1-\frac{1}{2}\cos^2\beta}\right. +$
$\left.+\sqrt{2}\cos\beta\right)$. Получим равенство (см., например, п. 5)
$br\left(2\sqrt{1-\frac{1}{2}\cos^2\beta}+\sqrt{2}\cos\beta\right)=\sqrt{2}\,b^2\cos\beta\sin\beta$. Отсюда $b=\dfrac{\sqrt{2-\cos^2\beta}+\cos\beta}{\cos\beta\sin\beta}r=\dfrac{r}{\sin\beta}\left(1+\sqrt{2\operatorname{tg}^2\beta+1}\right)$.
Подставляя найденное выражение в формулу п. 8, получим $V=\frac{2}{3}r^3\operatorname{ctg}^2\beta\left(1+\sqrt{2\operatorname{tg}^2\beta+1}\right)^3$.

12. Имеем $a=\sqrt{2}\,b\cos\beta$. Кроме того, высота боковой грани (см. п. 11) равна $b\sqrt{1-\frac{1}{2}\cos^2\beta}$. Получим равенство:

$$2Q=\sqrt{2}\,b^2\cos\beta\sqrt{1-\frac{1}{2}\cos^2\beta}=b^2\cos\beta\sqrt{2-\cos^2\beta}.$$

Находим из последнего равенства b и подставим в формулу п. 8. Получим:

$$V=\frac{4\sqrt{2}}{3}Q^{3/2}\cdot\frac{\sqrt{\operatorname{ctg}\beta}}{\sqrt{(2+\operatorname{ctg}^2\beta)^3}}.$$

13. $h=\frac{1}{2}a\operatorname{tg}\gamma$; $V=\frac{1}{6}a^3\operatorname{tg}\gamma$.

14. $b^2=h^2+\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{4}a^2(\operatorname{tg}^2\gamma+2)$. Выразим из этого равенства a и подставим в формулу предыдущего пункта. Получим $V=\dfrac{4b^3\operatorname{tg}\gamma}{3\sqrt{(\operatorname{tg}^2\gamma+2)^3}}$.

15. $V=\frac{4}{3}h^3\operatorname{ctg}^2\gamma$.

16. Имеем $b^2=2Rh$. Кроме того, $h=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\gamma$ (см. п. 13) и $a=b\dfrac{2}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\gamma+2}}$ (п. 14). Из последних двух равенств выразим h через b: $h=\dfrac{b\operatorname{tg}\gamma}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\gamma+2}}=$

$= \dfrac{b}{\sqrt{1 + 2\operatorname{ctg}^2\gamma}}$ и подставим в первое равенство. Получим $b = \dfrac{2R}{\sqrt{1 + 2\operatorname{ctg}^2\gamma}}$. По формуле п. 14 найдем $V = \dfrac{32R^3\operatorname{ctg}^2\gamma}{3(1 + 2\operatorname{ctg}^2\gamma)^3}$.

17. Имеем: $h = r\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\gamma = r\dfrac{1 + \cos\gamma}{\sin\gamma}\dfrac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = r\dfrac{1 + \cos\gamma}{\cos\gamma}$. Заменяя h в формуле п. 15, получим $V = \dfrac{4}{3}\,r^3\dfrac{(1 + \cos\gamma)^3}{\cos\gamma\sin^2\gamma}$.

18. Пусть сторона основания равна a. Поскольку площадь проекции боковой грани на основание равна четверти площади основания, получим равенство $Q\cos\gamma = \dfrac{1}{4}a^2$. Из этого равенства выразим a и подставим в формулу п. 13. После преобразований получим $V = \dfrac{4Q^{3/2}}{3}\sin\gamma\sqrt{\cos\gamma}$.

19. $\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2} = \sin\beta$ (1), $\cos\beta = \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\dfrac{\varphi}{2}} = \dfrac{1}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}\sqrt{-\cos\varphi}$ (2). Заменяя тригонометрические функции угла β в формуле п. 7, получим

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}}{2\sqrt{-\cos\varphi}}.$$

20. Из формулы п. 8 на основании равенств (1) и (2) п. 19 получаем $V = -\dfrac{2b^3\cos\varphi\cos\dfrac{\varphi}{2}}{3\sin^3\dfrac{\varphi}{2}}$.

21. Из формулы п. 9 на основании равенств (1) и (2) п. 19 получаем $V = -\dfrac{2h^3\cos\varphi}{3\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}$.

22. Из формулы п. 10 на основании равенств (1) и (2) п. 19 получаем $V = -\dfrac{16R^3\cos^4\dfrac{\varphi}{2}\cos\varphi}{3\sin^6\dfrac{\varphi}{2}}$.

23. Из формулы п. 11 на основании равенств (1) и (2) п. 19 получаем

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\cos\dfrac{\varphi}{2}}{\sqrt{-\cos\varphi}}, \quad V = \frac{2}{3}r^3\frac{(1+\sqrt{-\cos\varphi})^3}{\cos^2\dfrac{\varphi}{2}\sqrt{-\cos\varphi}}.$$

24. Из формулы п. 12 на основании равенств (1) и (2) п. 19 получаем $V = \dfrac{4}{3}Q^{3/2}\cos\dfrac{\varphi}{2}\sqrt[4]{-\cos\varphi}$.

11. Объем пирамиды ACB_1D_1 равен $\frac{1}{3}$ (см. решение задачи 2). Каждая грань пирамиды A_1C_1BD пересекает ее ребра в серединах и отсекает от нее пирамиду, подобную ACB_1D_1, с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$ (рис. 6) и объемом, равным $\frac{1}{8}$ объема пирамиды ACB_1D_1.

12. а) Плоскость, проходящая через диагонали трех соседних граней куба (рис. 7), перпендикулярна соответствующей диагонали куба и делит ее в отношении 1 : 2. Она отсекает от куба тетраэдр, объем которого равен $\frac{1}{6}$ части объема куба (см. решение задачи 2).

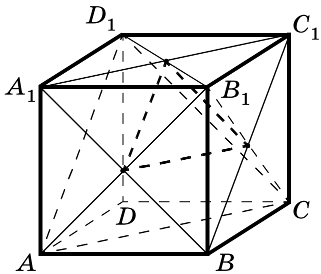

Рис. 6

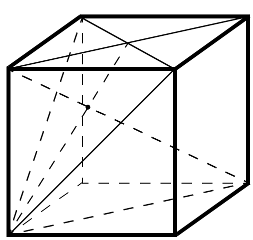
Рис. 7

б) Данная плоскость отсекает от куба пирамиду, подобную пирамиде из пункта а), с коэффициентом подобия $\frac{1}{4} : \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$. Таким образом, ее объем равен $\frac{27}{64}$ объема большей пирамиды или $\frac{9}{128}$ объема куба.

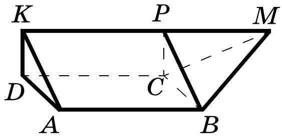

Рис. 8

13. Возьмем на отрезке KM точку P такую, что $KP = 2$. Таким образом, многогранник $ABCDKM$ можно разбить на две части: призму $ABCKP$ и пирамиду $BCPM$ (рис. 8). Объем призмы равен 3 (по теореме 5.3). Объем пирамиды $BCPM$ равен $\frac{1}{3}$ объема призмы с основанием BCP и боковыми ребрами, параллельными PM (ее объем находится аналогично).

14. Из формулы объема тетраэдра следует, что площади его граней обратно пропорциональны высотам. Таким образом, площади граней относятся как $1 : 2 : 3 : 6$, а этого не может быть, так как площадь любой грани тетраэдра больше суммы площадей остальных его граней.

15. Найдем объем многогранника, который отсекает от пирамиды одна из плоскостей. Он состоит из пирамиды, подобной пирамиде $ABCD$ с коэффициентом подобия $\frac{1}{3}$, и призмы, основание которой подобно основанию пирамиды с коэффициентом $\frac{1}{3}$ и высота которой равна $\frac{2}{3}$ высоты пирамиды (рис. 9).

Объем этого многогранника равен $\frac{7}{27}$ $\left(\text{объем пирамиды — } \frac{1}{27}, \text{ объем призмы — } \frac{1}{9}S \cdot \frac{2}{3}h = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3}Sh = \frac{2}{9}\right)$. Такой же многогранник отсекает от пирамиды и вторая плоскость.

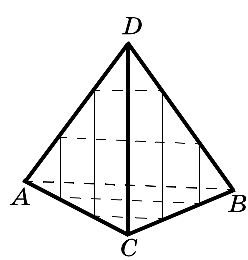

Рис. 9

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна 1 и образует с двумя из его ребер углы в $60°$.

2. Основаниями призмы являются правильные шестиугольники. Площадь одной из боковых граней равна S, а расстояние до этой грани от центра одного из оснований равно q. Найдите объем призмы.

3. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 10, а площадь боковой грани равна 30. Найдите объем этой пирамиды.

4. Радиус шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, равен 1, а двугранный угол между соседними боковыми гранями равен $120°$. Найдите объем этой пирамиды.

5. Боковые ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны. Два из них равны 1 и 2, а площадь основания равна 4. Найдите объем этой пирамиды.

6. Плоскость, перпендикулярная диагонали куба, делит его объем в отношении $77 : 4$. В каком отношении эта плоскость делит указанную диагональ?

Вариант 2

1. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна 1 и образует с двумя из его ребер углы в $60°$ и $45°$.

2. Основаниями призмы являются правильные восьмиугольники. Площадь одной из боковых граней равна S, а расстояние до этой грани от центра одного из оснований равно m. Найдите объем призмы.

3. Боковая сторона правильной треугольной пирамиды равна 5, а площадь боковой грани равна 10. Найдите объем этой пирамиды.

4. Двугранный угол между соседними боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равен $120°$. Ее объем равен $\frac{4}{3}$. Найдите радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

5. Боковые ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны. Площади двух боковых граней равны 3 и 2, а площадь основания равна 7. Найдите объем этой пирамиды.

6. Плоскость, перпендикулярная диагонали куба, делит его объем в отношении $19 : 9$. В каком отношении эта плоскость делит указанную диагональ?

Ответы и указания для учителя

Вариант 1. **1.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$. **2.** $3Sq$. **3.** Если φ — плоский угол при вершине, то $\sin\varphi = \frac{3}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Из этого следует, что φ — острый угол, поскольку в противном случае он будет больше $120°$. *Ответ*: $\frac{10}{6}\sqrt{260}$. **4.** Если у правильной четырехугольной пирамиды двугранный угол при боковом ребре равен $120°$, то ее высота равна половине стороны основания, а двугранные углы при основании равны $45°$. Это утверждение можно получить различными путями. Например, можно обойтись без всяких вычислений, рассмотрев пирамиду с вершиной в центре куба и основанием — гранью куба. *Ответ*: $\frac{1}{6}(7 + 5\sqrt{2})$. **5.** $\frac{\sqrt{10}}{3}$. Воспользуйтесь тем, что в данной пирамиде сумма квадратов площадей боковых граней равна квадрату площади основания (см. задачу 20 из параграфа 1.7). **6.** Докажите, что эта плоскость пересекает три ребра, выходящие из одного конца диагонали. В противном случае меньшая часть имела бы объем больше, чем $\frac{1}{6}$ от объема куба. *Ответ*: $7 : 2$.

Вариант 2. **1.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$. **2.** $4Sq$. **3.** $\frac{5}{3}\sqrt{55}$. **4.** $\sqrt{2}-1$. **5.** $2\sqrt{2}$. **6.** 3 : 1.

5.6. Вычисление объемов многогранников

Этот параграф наиболее насыщен теоремами, полезными для практики. Теорема 5.5 об отношении объемов треугольных пирамид, все вершины которых расположены на трех пересекающихся прямых, обобщает известный планиметрический факт об отношении площадей треугольников с вершинами на двух прямых. Доказательство этой теоремы также использует указанный планиметрический факт. Можно предложить и несколько иное, чем в учебнике, рассуждение (которое может быть использовано и в планиметрии). Проверим сначала справедливость утверждения теоремы 5.5 для случая, когда у рассматриваемых пирамид совпадают все вершины, кроме одной. Рассмотрим две пирамиды $ABCD$ и A_1BCD (рис. 10), где точка A_1 лежит на прямой DA. Нетрудно убедиться, что отношение объемов таких пирамид равно отношению ребер $DA : DA_1$. Затем рассмотрим две пирамиды A_1BCD и A_1B_1CD, где точка B_1 расположена на прямой DB. Отношение объемов этих пирамид вновь равно отношению ребер DB и DB_1. И наконец, рассмотрим пару пирамид A_1B_1CD и $A_1B_1C_1D$, у которых вершины C, C_1 и D лежат на одной прямой. Отношение их объемов равно отношению DC и DC_1. Теперь нетрудно получить, что отношение объемов пирамид $ABCD$ и $A_1B_1C_1D$ равно произведению $\frac{DA}{DA_1} \cdot \frac{DB}{DB_1} \cdot \frac{DC}{DC_1}$. Именно в этом и состоит утверждение теоремы 5.5 (с точностью до обозначений).

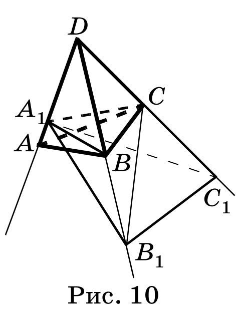

Рис. 10

Часто используется на практике и теорема 5.6 об объеме описанного многогранника. Особенно удобна она для нахождения радиуса шара, вписанного в пирамиду, не являющуюся правильной.

Две другие теоремы (5.7 и 5.8) менее традиционны для курса стереометрии. В теореме 5.7 выводится формула для вычисления объема треугольной пирамиды через длину ребра, площади содержащих его граней и синус двугранного угла между ними. Эта теорема дает способ нахождения двугранного угла пирамиды, который нередко используется на практике. Надо только не забывать, что по синусу мы находим два угла: острый и тупой, поэтому нужны дополнительные исследования для получения правильного ответа.

Предметные результаты:

— решать простейшие задачи на вычисление объемов многогранников.

Содержательные задачи на эту тему приводятся в следующем параграфе.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Теорема 5.5. Решение задач 5, 7.

Задание на дом: задачи 6, 11.

Урок 2. Разбор домашнего задания. Теорема 5.6, задача 8.

Задание на дом: задачи 1, 2, 14.

Урок 3. Разбор домашнего задания. Теоремы 5.7 и 5.8.

Задание на дом: задачи 3, 4, 9, 13.

Урок 4. Разбор домашнего задания. Решение задач 10 и 15.

Задание на дом: задачи 16 и 17 и из дополнительного списка.

Указания к решению задач учебника

1. Если a, b и c — длины боковых ребер, то SPQ $\frac{1}{8}a^2b^2c^2$, а объем пирамиды равен $\frac{1}{6}abc$.

2. Задача решается по формуле из теоремы 5.8.

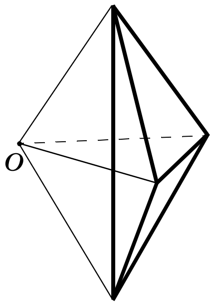

Рис. 11

3. Надо найти площади граней ABC и ABD и воспользоваться формулой из теоремы 5.7.

4. Две грани данной пирамиды — равносторонние треугольники со стороной 1. Двугранный угол между ними равен удвоенному двугранному углу в правильном тетраэдре (рис. 11). По теореме 5.7 можно найти ее объем. $\left(\text{Если } \alpha \text{ — двугранный угол в правильном тетраэдре, то } \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ и } \sin\alpha = \frac{1}{3}.\right)$

5. Покажем, как найти объем пирамиды $KLMG$, зная объемы пирамид $KLMC$ и $KLMP$. Если расстояния от P и C до плоскости KLM равны соответственно x и y, то расстояние от G до этой же плоскости будет равно $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y$. Таким образом, объем указанной пирамиды равен $\frac{2}{3}V_{KLMP} + \frac{1}{3}V_{KLMC} = \frac{23V}{180}$.

6. По теореме 5.5

$$\frac{V_{DKLM}}{V_{DABC}} = \frac{DK}{DA} \cdot \frac{DL}{DB} \cdot \frac{DM}{DC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{45},$$

откуда $V_{DKLM} = \frac{4}{45}$.

7. Ребра пирамиды с вершинами в точках пересечения медиан граней исходной пирамиды параллельны ребрам исходной пирамиды и равны $\frac{1}{3}$ соответствующих ребер (нужно рассмотреть сечение, проходящее через медианы двух соседних граней, выходящие из одной вершины).

8. Достаточно найти объем пирамиды и площади всех ее граней, после чего воспользоваться теоремой 5.6.

9. Объем тетраэдра, построенного на указанных в условии задачи диагоналях, равен $V = \frac{1}{6}$ (площадь основания $\frac{1}{2}$, высота $1\Big)$. По теореме 5.8 $V_{MNPQ} : V = \frac{MN \cdot PQ}{d^2}$, где d — длина диагонали грани куба.

10. Нужно записать формулу (7) из теоремы 5.8 для пирамид $ABCD$ и $MNPQ$ (противоположные ребра AB и CD и MN и PQ соответственно).

11. Площадь треугольника DKL в шесть раз меньше площади треугольника DCB, а расстояние от точки M до плоскости DCB равно $\frac{2}{5}$ расстояния от A до той же плоскости.

12. Для нахождения объема последней пирамиды воспользуйтесь равенством

$$V_{KLMN} = |V_{NKLB} + V_{NMLB} - V_{KNMB} - V_{KLMB}| = \frac{23}{120} V.$$

13. Пусть ABC — правильный треугольник, вписанный в одно из оснований цилиндра, а $A_1B_1C_1$ — правильный треугольник, вписанный в другое основание, причем AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через центр цилиндра. Указанные треугольники расположены относительно друг друга так, как сказано в условии. Объем многогранника равен удвоенному объему четырехугольной пирамиды ACA_1C_1B (ACA_1C_1 — основание). Объем же этой пирамиды равен удвоенному объему пирамиды $ABCA_1$. Искомый объем равен $\frac{1}{3} a^2 h \sqrt{3}$.

14. Согласно теореме 1.19 (о площади проекции), площадь основания пирамиды равна $6 \cdot \cos 60° = 3$. Таким образом, по теореме 5.6 ее объем равен $3r$. Радиус окружности, вписанной в основание, равен $r\sqrt{3}$. Он может быть сколь угодно малым, и он не больше радиуса окружности, вписанной в правильный треугольник площади 3. Таким образом, задача имеет решение, если $0 < r \leqslant \frac{\sqrt[4]{3}}{3}$.

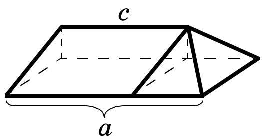

Рис. 12

15. Если $a > c$, то этот многогранник можно разбить на призму и четырехугольную пирамиду (рис. 12). Объем призмы (по теореме 5.3) равен $\frac{1}{2}cb \cdot h$ (боковая грань — прямоугольник со сторонами c и b, h — расстояние от противоположного ребра до этой грани). Объем пирамиды равен $\frac{1}{3}(a - c)b \cdot h$ (основание — прямоугольник со сторонами $a - c$ и b, высота — h). Если $a < c$, то объем вычисляется так же, как в задаче 13 (из параграфа 5.5) и равен $\frac{1}{2}ab \cdot h + \frac{1}{6}(c - a)b \cdot h$ (ответ в обоих случаях одинаковый).

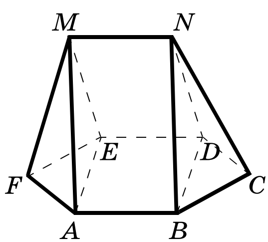

Рис. 13

16. Пусть отрезок MN параллелен стороне AB (тогда он параллелен и DE). Многогранник $ABCDEFMN$ состоит из призмы $ABDEMN$ и двух пирамид (рис. 13). Объем призмы равен $\frac{1}{2}a^2h\sqrt{3}$ ($ABDE$ — прямоугольник, $AE = BD = \sqrt{3}$). Объемы пирамид одинаковы и равны $\frac{1}{12}a^2h\sqrt{3}$ $\left(\text{основания — треугольники } EFA \text{ и } BCD \text{ площади } \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \text{ высота — } h\right)$.

17. См. решение задачи 12, последний пункт.

5.7*. Использование свойств объема при решении задач

Этот параграф рассчитан на классы с хорошей математической подготовкой. В них следует внимательно изучить задачи, разобранные в параграфе 5.7, и прорешать (разобрать) большую часть задач в конце этого параграфа. Решения трудных задач **(т)** учитель должен предварительно разобрать сам (например, по этому пособию).

Предметные результаты:

— решать трудные задачи с использованием формул объемов многогранников.

Примерное планирование изучения материала

Изучению параграфа следует отвести 2 урока.

В конце изучения главы 5 следует провести контрольную работу № 2.

Указания к решению задач учебника

1. По теореме 5.7 (формула (6)) отношение объемов пирамид, на которые делит пирамиду $ABCD$ данная биссекторная плоскость, равно $P : Q$, а по теореме 5.8 (формула (7)) это отношение равно отношению частей ребра BD, на которые его делит биссекторная плоскость двугранного угла с ребром AC.

2. Пусть площадь указанного треугольника равна S. По теореме 5.7

$$V_{ABCD} = \frac{2PQ\sin\alpha}{3a} = \frac{2PS\sin\frac{\alpha}{2}}{3a} + \frac{2SQ\sin\frac{\alpha}{2}}{3a},$$

где a — длина ребра AC. Отсюда находим S.

3. Нужно найти объем пирамиды, площади граней ABD и BCD (треугольник BCD — прямоугольный) и воспользоваться формулой (6) (теорема 5.7).

4. Аналогично предыдущей задаче (треугольник ABD — прямоугольный).

5. В отношении $2 : 1$ от вершины S. Положим $SP = xSD$, а объем данной пирамиды — $3V$. Тогда объем пирамиды $SABC$ равен $2V$. По теореме 5.5 $\frac{V_{SKLC}}{V_{SABC}} = \frac{SK}{SA} \cdot \frac{SL}{SB} \cdot \frac{SC}{SC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Значит, $V_{SKLC} = \frac{V}{6}$. Аналогично $V_{SKPC} = \frac{x}{3}V$, $V_{SLKP} = \frac{x}{12}V$ и $V_{SLPC} =$

$= \frac{x}{2}V$. Теперь из условия $V_{SKLC} + V_{SKPC} = V_{SLKP} + V_{SLPC}$ находим $x = \frac{2}{3}$.

6. Объем данной пирамиды равен $\frac{1}{3}\sqrt{2SPQ}$ (см. задачу 1 из параграфа 5.6), а площадь основания равна $\sqrt{S^2 + P^2 + Q^2}$ (задача 20 из параграфа 1.7). Теперь по теореме 5.6 можно найти радиус вписанного шара. Аналогично теореме 5.6 можно доказать, что объем пирамиды равен $\frac{1}{3}(S_1 - S_2) \cdot R$, где R — радиус шара, касающегося основания и продолжения боковых граней тетраэдра, S_1 — сумма площадей боковых граней, а S_2 — площадь основания, откуда можно найти радиус этого шара.

7. Пусть E — середина AB. Площадь треугольника KLE составляет $\frac{1}{4}$ площади треугольника ABD. (От площади ABD надо отнять площади треугольников KLD, AKE и BEL.) Примем объем исходной пирамиды за 1, тогда объем пирамиды $KLME$ равен $\frac{3}{16}$. Объем пирамиды $KLMC$ равен $\frac{1}{20}$. Отсюда получим, что объем пирамиды $KLMG$ равен $\frac{3}{16} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{3} = \frac{17}{120}$. Объем пирамиды $KLMD$ равен $\frac{3}{20}$. Искомое отношение равно отношению объемов пирамид $KLMD$ и $KLMG$, т. е. 18 : 17.

8. Пусть E — середина AD. Искомое отношение равно отношению объемов пирамид $BMEK$ и $BMEC$. Объем пирамиды $BMEK$ составляет $\frac{2}{15}$ от объема исходной пирамиды (основание BKE). Объем пирамиды $BMEC$ составляет соответственно $\frac{3}{10}$ от объема исходной пирамиды. Искомое отношение равно 4 : 9.

9. Пусть $AP = xAD$. Примем для удобства вычисления объем пирамиды $ABCD$ за 1. Тогда $V_{KPMB} = \frac{1}{2}x\frac{1}{4} = \frac{x}{8}$, $V_{KMLB} = \frac{1}{8}$, $V_{KPLB} = \frac{x}{6}$, $V_{PMLB} = \frac{1-x}{4}$. Из уравнения $V_{KPMB} + V_{KMLB} = V_{KPLB} + V_{PMLB}$ найдем $x = \frac{3}{5}$. Искомое отношение равно отношению объемов V_{KPMB} и V_{KMLB} (5 : 3).

10. Пусть боковые ребра пирамиды равны e. Решая задачу аналогично разобранной в параграфе 5.7 задаче 3, получаем: $\frac{a}{e}\cdot\frac{b}{e}\cdot\frac{c}{e} + \frac{c}{e}\cdot\frac{d}{e}\cdot\frac{a}{e} = \frac{a}{e}\cdot\frac{b}{e}\cdot\frac{d}{e} + \frac{d}{e}\cdot\frac{b}{e}\cdot\frac{c}{e}$ (условие принадлежности четырех точек одной плоскости), откуда $ac(b + d) = bd(a + c)$. Осталось поделить это равенство на $abcd$.

11. Площадь треугольника AMD равна 2. (Диагонали четырехугольника делят его на таких четыре треугольника, что произведения площадей противоположных треугольников равны.) Для упрощения вычислений будем считать, что объем пирамиды $SABM$ равен 1. Далее будем действовать по схеме, указанной в задаче 3 (в параграфе 5.7). Пусть $SP = xSD$. Имеем $V_{SAKM} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}V_{SABC} = \frac{1}{12}V_{SABC}$, $V_{SAMP} = \frac{9}{4}x$, $V_{SAKP} = \frac{4}{3}x$, $V_{SKMP} = \frac{2}{3}x$. Из уравнения $V_{SABC} + V_{SAKP} = V_{SAKP} + V_{SKMP}$ найдем $x = -1$. Оказывается, что точка P расположена симметрично точке D относительно S. (Формально надо вновь проделать все вычисления, считая, что $SP = xSD$, но P находится по другую сторону от S.)

12. Пусть расстояние от центра вписанного шара до плоскости ABK равно d. Будем считать, что этот центр расположен внутри пирамиды $ABCK$ (в ином случае d окажется отрицательным). Пусть далее площадь грани BCD равна $2m$, площадь грани ACD равна $2n$, а площади граней ABD, ABC и ABK равны соответственно q, f и l. По условию $f - q = kl$. Объемы пирамид $ABKD$ и $ABCK$ равны. Соединив центр вписанного шара со всеми вершинами указанных пирамид, представим объем каждой через объемы треугольных пирамид с общей вершиной в точке O. Получим $\left(\text{коэффициент } \frac{1}{3} \text{ опускаем}\right)$ уравнение $(q + m + n)R - dl = (f + m + n)R + dl$. Отсюда $d = -\frac{1}{2}kR$. (На самом деле центр вписанного шара находится внутри пирамиды $ABKD$.) Следовательно, радиус круга, по которому плоскость ABK пересекает вписанный шар, равен $R\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}$.

Дополнительные задачи

1. Найдите ребро правильного тетраэдра, объем которого равен объему единичного куба. (*Ответ*: $\sqrt{2}\sqrt[3]{3}$).
2. Найдите объем выпуклого многогранника, вершины которого совпадают с серединами ребер параллелепипеда с объемом 1. $\left(\textit{Ответ}: \frac{5}{6}.\right)$
3. Найдите объем многогранника с вершинами в серединах ребер треугольной пирамиды с объемом 1. $\left(\textit{Ответ}: \frac{1}{2}.\right)$
4. Найдите объем многогранника с вершинами в серединах ребер четырехугольной пирамиды объема 1. $\left(\textit{Ответ}: \frac{5}{8}.\right)$
5. Имеется параллелепипед с объемом 1. Найдите объем выпуклого многогранника, четыре вершины которого совпадают с вершинами одной грани параллелепипеда, а две оставшиеся — с двумя противоположными вершинами противоположной грани. $\left(\textit{Ответ}: \frac{2}{3}.\right)$

6. Найдите объем параллелепипеда, две грани которого — ромбы с углом α, а все оставшиеся — единичные квадраты. (*Ответ*: $\sin\alpha$.)

7. Найдите объем параллелепипеда, три диагонали которого перпендикулярны и равны a, b и c. $\left(\textit{Ответ}: \frac{1}{4}abc.\right)$

8. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна 1, а ребра относятся как 1 : 2 : 3. $\left(\textit{Ответ}: \frac{3}{7\sqrt{14}}.\right)$

9. Грань ABC многогранника $ABCDE$ является равносторонним треугольником со стороной 1. Ребра AD и CE перпендикулярны плоскости ABC и равны 1 и 2. Найдите объем многогранника $ABCDE$. $\left(\textit{Ответ}: \frac{\sqrt{3}}{4}.\right)$

10. Два скрещивающихся ребра треугольной пирамиды равны 1 и 2, а четыре оставшихся равны $\sqrt{2}$. Найдите объем этой пирамиды и радиус вписанного в нее шара. $\left(\textit{Ответ}: \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{7}}.\right)$

11. Рассмотрим произвольную пирамиду и проведем сечение плоскостью, параллельной ее основанию. Многогранник, ограниченный основанием данной пирамиды и проведенной плоскостью, называется *усеченной пирамидой*. Параллельные грани усеченной пирамиды называются ее *основаниями*, а расстояние между ними — *высотой*. Найдите объем усеченной пирамиды, площади оснований которой равны S и Q, а высота равна h. $\left(\textit{Ответ}: \frac{h}{3}(S+Q+\sqrt{SQ}).\right)$

12. Вершина D треугольной пирамиды $ABCD$ проектируется в точку пересечения высот треугольника ABC. Ребра AB и CD равны 3 и 4, а расстояние между ними равно 5. Найдите объем этой пирамиды. (*Ответ*: 10. Докажите, что данные ребра перпендикулярны.)

13. Площади оснований призмы равны S. Известно, что в призму можно вписать шар и что радиус этого шара равен 1. Найдите площадь боковой поверхности и объем этой призмы. При каких значениях S задача имеет решение? (*Ответ*: боковая поверхность призмы равна $4S$, это следует из того, что каждую боковую грань можно разделить на 4 треугольника с общей вершиной в точке касания. Сумма площадей треугольников, прилежащих к боковым ребрам, равна сумме площадей, прилежащих к основаниям, а сумма последних — $2S$. Объем призмы численно равен $2S$. Задача имеет решение при $S > \pi$. Следует заметить, что при S, близком к π, число сторон в основании должно быть достаточно велико.)

14. В каком отношении делит объем правильной четырехугольной пирамиды плоскость, проходящая через середины двух соседних боковых ребер и не принадлежащую этим ребрам вершину? (*Ответ*: 5 : 3.)

15. Три ребра треугольной пирамиды, выходящие из одной вершины, равны между собой и равны 13. Три оставшиеся ребра имеют длины 6, 8, 10. Найдите объем этой пирамиды, радиус вписанного шара и все двугранные углы. $\Bigl($*Ответ*: объем пирамиды 96; радиус вписанного шара $\dfrac{24}{7+\sqrt{10}+\sqrt{17}}$; двугранные углы: $\dfrac{\pi}{2}$, $\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{17}}$, $\arcsin\dfrac{13}{5\sqrt{10}}$, $\pi - \arcsin\dfrac{13}{\sqrt{170}}$.$\Bigr)$

16. В треугольной пирамиде $SABC$ ребра SA и SB равны. Площади граней SAC и SBC соответственно равны 3 и 5. Двугранный угол при ребре SA равен 60°. Найдите двугранный угол при ребре SB. $\Bigl($*Ответ*: $\arcsin\dfrac{3\sqrt{3}}{10}$ или $\pi - \arcsin\dfrac{3\sqrt{3}}{10}$.$\Bigr)$

17. В треугольной пирамиде $SABC$ ребра SA и SB равны, двугранный угол при ребре SA равен α, площадь грани SAC равна q. Докажите, что площадь грани SBC не меньше чем $q \sin \alpha$. (*Ответ*: по формуле теоремы 5.7 выразим объем пирамиды двумя способами: через ребро SA и соответствующие величины и через ребро SB. Учитывая, что синус не превосходит 1, получим требуемое неравенство.)

18. Найдите наибольшее значение объема правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в единичный шар. $\left(\textit{Ответ}: \dfrac{64}{81}.\right)$

19. Среди всевозможных правильных n-угольных пирамид, вписанных в единичный шар, рассмотрим пирамиду с наибольшим объемом. Докажите, что высота этой пирамиды не зависит от n. Чему равна эта высота? (*Ответ*: пусть r и h — соответственно радиус окружности, описанной около основания, и высота пирамиды. Объем пирамиды равен kr^2h, где k — коэффициент, зависящий от n. Имеет место соотношение: $2h = r^2 + h^2$. Заменяя r^2 в формуле для объема, получим, что надо найти максимум выражения $2h^2 - h^3$. Он достигается при $h = \dfrac{4}{3}$.)

20. На двух скрещивающихся ребрах единичного куба взяты отрезки длиной $\dfrac{1}{2}$. Найдите объем тетраэдра с вершинами в концах этих отрезков. $\left(\textit{Ответ}: \dfrac{1}{24}.\right)$

21. Среди всех шестиугольных пирамид, в основании которых лежит правильный шестиугольник со стороной 2, а два соседних боковых ребра равны 3, возьмем ту, для которой радиус описанного шара наименьший. Найдите объем этой пирамиды. (*Ответ*: $\sqrt{47}$. Радиус описанного шара не может быть меньше радиуса окружности, описанной около основания, т. е. наименьший радиус равен 2.)

22. На сколько частей делят треугольную призму всевозможные плоскости, проходящие через три вершины? Найдите объем наименьшей части, если объем всей призмы равен 1. $\Big($*Ответ*: рассмотрим призму $ABCA_1B_1C_1$; A_2, B_2, C_2 — центры соответствующих боковых граней; M и M_1 — точки, делящие ее ось на три равные части. Указанные плоскости разделят плоскость на 18 частей: две пирамиды вида $ABCM$ с объемом $\frac{1}{9}$, шесть пирамид вида ABC_2M с объемом $\frac{1}{18}$, шесть — вида AB_2C_2M с объемом $\frac{1}{36}$, три — вида $AA_1B_2C_2$ с объемом $\frac{1}{12}$ и многогранник $A_2B_2C_2MM_1$ с объемом $\frac{1}{36}$.$\Big)$

23. В пространстве расположены три попарно перпендикулярных отрезка, причем один из них пересекается с двумя оставшимися. Докажите, что объем многогранника с вершинами в концах этих отрезков равен $\frac{1}{6}$ произведения их длин.

24. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 1, а площадь боковой грани равна S. Найдите объем пирамиды, если: а) $S = \frac{\sqrt{15}}{27}$ или $S = \frac{2\sqrt{3}}{27}$; б) $S = \frac{\sqrt{21}}{27}$.

25. Дана треугольная пирамида, у которой все плоские углы при одной вершине прямые, а ребра, выходящие из этой вершины, равны a, b и c. Найдите ребро куба, одна вершина которого совпадает с указанной вершиной, три вершины, соседние с ней, лежат на выходящих из нее ребрах, а противоположная вершина лежит на противоположной грани. $\left(\textit{Ответ}: \frac{abc}{ab + bc + ca}.\right)$

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. На ребрах AB, AC и AD пирамиды $ABCD$ взяты точки K, L и M соответственно так, что объем пирамиды $AKLM$ в 12 раз меньше объема пирамиды $ABCD$. Известно также, что $AK : KB = 1 : 3$, $AL : LC = 2 : 3$. В каком отношении точка M делит ребро AD?

2. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AB и AD равны, а площадь грани ABC в 2 раза меньше площади грани ACD. Двугранный угол при ребре AB равен $30°$, а двугранный угол при ребре AC равен $110°$. Найдите двугранный угол при ребре AD.

3. Известно, что в пирамиду можно вписать шар, причем радиус шара в 5 раз меньше высоты этой пирамиды. Во сколько раз боковая поверхность пирамиды больше площади ее основания?

4. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб со стороной 1, все двугранные углы при основании равны $45°$. Каков наибольший объем такой пирамиды?

5. На одном из ребер единичного куба и на скрещивающейся с ним диагонали расположены два отрезка длиной $\frac{1}{2}$. Найдите объем тетраэдра с вершинами в концах этих отрезков.

6. В каком отношении делит отрезок, соединяющий середины ребер AB и CD, плоскость, проходящая через AC и делящая в отношении $1 : 2$ ребро BD (от точки B)?

Вариант 2

1. На ребрах AB, AC и AD пирамиды $ABCD$ взяты точки K, L и M соответственно так, что объем пирамиды $AKLM$ в 6 раз меньше объема пирамиды $ABCD$. Известно также, что $AK : KB = 3 : 4$, $AL : LC = 2 : 3$. В каком отношении точка M делит ребро AD?

2. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро AB в 3 раза больше ребра AD, а площадь грани ABC в 2 раза больше площади грани ACD. Двугранный угол при ребре AB равен 30°, а двугранный угол при ребре AC — 115°. Найдите двугранный угол при ребре AD.

3. Известно, что в пирамиду можно вписать шар, причем радиус шара в 6 раз меньше высоты этой пирамиды. Во сколько раз боковая поверхность пирамиды больше площади ее основания?

4. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб со стороной 1, все двугранные углы при основании равны 60°. Каков наибольший объем такой пирамиды?

5. На одном из ребер единичного куба и на скрещивающейся с ним диагонали расположены два отрезка длиной $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$. Найдите объем тетраэдра с вершинами в концах этих отрезков.

6. В каком отношении делит отрезок, соединяющий середины ребер AB и CD, плоскость, проходящая через AC и делящая в отношении 2 : 3 ребро BD?

Ответы и указания для учителя

Вариант 1. **1.** 5 : 1. **2.** $\pi - \arcsin\frac{1}{4}$. По теореме 5.7 найдем синус искомого угла. Далее воспользуемся тем, что сумма двугранных углов трехгранного угла не менее π (см. задачу 15 из параграфа 2.4). **3.** В 4 раза. **4.** $\frac{1}{6}$. **5.** $\frac{1}{24}$. **6.** 1 : 2. Замените отношение отрезков отношением объемов соответствующих пирамид (см. рис. 98 и задачу 2 в тексте параграфа 5.7 учебника).

Вариант 2. **1.** 35 : 1. **2.** $\pi - \arcsin\frac{1}{3}$. **3.** В 5 раз. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **5.** $\frac{1}{36}$. **6.** 2 : 3.

Глава 6

Объемы и поверхности круглых тел

В шестой главе изучаются объемы и поверхности обычных для школьной программы круглых тел: цилиндра, конуса и шара (сферы). Но главным здесь является не только полный вывод соответствующих формул. Очень важен, если так можно выразиться, философский и идеологический аспект. Во-первых, при выводе формул автор не прибегает к понятию интеграла, а использует либо интуитивно очевидный предельный переход (объем цилиндра и конуса), либо столь же интуитивно очевидный принцип Кавальери (объем шара). При этом автор опирается на историческую традицию и тем самым следует заявленному в концепции принципу историзма. Столь же традиционно вводится понятие площади поверхности круглого тела и выводятся соответствующие формулы. Но в учебнике имеется и одна не слишком традиционная для наших учебников идея и тема, также относящаяся к философско-идеологической стороне геометрии. Это попытка обратить внимание школьников на то, что понятие площади поверхности, причем именно площади поверхности круглого тела, вовсе не так очевидно, как это может показаться на первый, поверхностный взгляд (§ 6.4), даже если рассматривать боковую поверхность одного из простейших тел — цилиндра.

Особенностью главы 6 является то, что на обычном, учебном уровне основной целью является изучение теории, а не решение задач. С другой стороны, в этой главе имеются очень большие возможности для уровневой дифференциации и теории, и задач. Здесь есть довольно много сложных задач, относящихся к высшим уровням освоения курса.

6.1. Объем цилиндра и конуса

В данном параграфе выводятся формулы для вычисления объема цилиндра и конуса. Делается это посредством очевидного предельного перехода, исходя из формул объема призмы и пирамиды. Более того, необходимо подчеркнуть, что это те же самые формулы! А именно объем призмы и цилиндра вычисляется по одной и той же формуле, так же как объем пирамиды и конуса. С точки зрения определений (см. параграф 3.1) в широком смысле призма есть цилиндр, а пирамида — конус.

Замечание. Следует также подчеркнуть, что указанные формулы объемов выполняются для произвольных цилиндров и конусов, основаниями которых являются произвольные фигуры.

Предметные результаты:

— решать задачи с применением формул объема цилиндра и конуса.

Примерное планирование изучения материала

Изучению параграфа следует посвятить один урок.

Задание на дом: задачи 2, 3, 4 к параграфу 6.2.

6.2. Принцип Кавальери и объем шара

Содержание данного параграфа состоит в формулировке принципа Кавальери и выводе с его помощью формулы объема шара.

Отметим, что принцип Кавальери лишь формулируется, но не доказывается. Нужно пояснить учащимся, что в математике в соответствии с исторической традицией существуют так называемые принципы. По сути, это небольшие теоремы, в которых формулируется важное и достаточно очевидное утверждение — настолько очевидное, что его можно принять без доказательства. В качестве примера можно привести принцип Дирихле. Подчеркивая его простоту и очевидность, математики иногда формулируют принцип Дирихле в полушутливой форме на примере кроликов и клеток: если количество кроликов, сидящих в клетках, больше числа клеток, то хотя бы в одной клетке находится более одного кролика. (Если в n клетках сидит не меньше чем $n + 1$

кроликов, то хотя бы в одной клетке сидит не менее 2 кроликов.)

Что же касается принципа Кавальери, то он также вполне очевиден. Рассмотрим два тела, удовлетворяющих условиям, сформулированным в принципе Кавальери (см. параграф 6.2 учебника). Рассмотрим набор плоскостей, параллельных указанной плоскости и таких, что расстояние между двумя соседними из них равно h, где h мало. Если мы для каждого тела и для каждого сечения построим цилиндр с основанием, совпадающим с этим сечением, высотой h, то получим два тела, составленные из таких цилиндров. Согласно условию, объемы этих тел равны, и при уменьшении h они сколь угодно мало отличаются от объемов исходных тел.

Необходимо обратить внимание на то, что использовавшийся ранее при первом выводе формулы для объема пирамиды принцип подобия, с одной стороны, более очевиден и привычен для учеников, а с другой — формально является следствием принципа Кавальери.

Следует также объяснить ученикам, что термин «принцип» в русском языке обычно понимается в узком смысле: как правило поведения, нравственный закон (принцип — принципиальный). Но в западноевропейских языках это слово имеет много значений: правило, закон (научный), причина и др. В данном случае более всего подходит понимание термина «принцип» как научного закона (правила).

Предметные результаты:

— формулировать принцип Кавальери;

— применять формулу объема шара при решении задач.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Вывод формулы объема шара. Задача 1.

Задание на дом: задачи 5, 6, 11.

Урок 2. Обсуждение принципа Кавальери. Вывод с его помощью формулы объема пирамиды. Разбор задачи 13.

Задание на дом: задачи 7, 8, 12.

Указания к решению задач учебника

1. Искомое тело состоит из цилиндра высотой l и радиусом основания, равным d, и из двух полушаров радиуса d.

2. Искомое тело состоит из двух равных конусов. Высота каждого равна половине меньшей диагонали $\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)$, а радиус основания — половине большей диагонали $\left(\frac{\cos\alpha}{2}\right)$. Объем этого тела равен $\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2}$.

3. Тело получается из цилиндра с радиусом основания 1 и высотой 2 и из двух конусов с радиусом основания также 1. При этом формально возможны два случая: оба конуса добавляются к цилиндру, и тогда сумма их высот равна 1, либо один конус удаляется, а другой добавляется, и при этом высота добавляемого конуса на 1 больше высоты удаляемого конуса. Ответ в обоих случаях одинаков: $2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$.

6. Искомое тело представляет собой объединение правильной четырехугольной призмы (параллелепипеда) со стороной основания a и высотой $2r$, четырех «половинок» цилиндров с высотой a и радиусом r и четырех «четвертинок» шара радиуса r. Таким образом, искомый объем равен: $2a^2r + 2\pi ar^2 + \frac{4}{3}\pi r^3$.

7. Соответствующая часть пространства представляет собой тело, состоящее из самого куба, шести (по числу граней) правильных четырехугольных призм с высотой d и основаниями — гранями куба, двенадцати (по числу ребер) «четвертушек» цилиндра с высотой a и радиусом d и восьми (по числу вершин) «восьмушек» шара. Объем этого тела равен $a^3 + 6a^2d + 3\pi ad^2 + \frac{4}{3}\pi d^3$.

8. Указанная часть пространства состоит из призмы (ее объем дается первым слагаемым), «половинок» цилиндров, соответствующих сторонам многоугольника (сумма их объемов — второе слагаемое) и шаровых «долек». Нам надо доказать, что сумма линейных углов, соответствующих «долькам», равна 2π, т. е. указанные «дольки» в сумме дают шар радиуса r (третье слагаемое). Линейным углом одной шаровой «дольки», соответствующим одному углу многоугольника, является угол, образованный двумя лучами, выходящими из соответствующей вершины многоугольника перпендикулярно соседним сторонам и направленными во внешнюю по отношению к многоугольнику сторону. Нетрудно понять, что этот угол равен соответствующему внешнему углу многоугольника. А сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 2π, что и требовалось.

9. Легко доказать, что площадь кольца, получающегося в результате вращения отрезка вокруг точки (речь идет о плоском случае: вращение происходит в плоскости, содержащей центр вращения и отрезок), равноудаленной от концов отрезка, не зависит от расстояния от центра вращения до отрезка и равно площади круга с диаметром, равным длине отрезка. Из этого утверждения получается и результат задачи. Любое сечение нашего тела вращения плоскостью, перпендикулярной оси вращения, есть кольцо, получающееся в результате указанного вращения отрезка. Таким образом, площадь каждого такого сечения равна площади сечения указанного конуса. В соответствии с принципом Кавальери из этого следует утверждение задачи.

10. Эта задача представляет собой обобщение предыдущей. Докажем, что объем искомого тела равен объему конуса, диаметр основания которого равен a, а высота равна $h\cos\alpha$. Проведем плоскость через ось вращения параллельно основанию данного треугольника. Спроектируем данный треугольник на эту плоскость. Получим равнобедренный треугольник с основанием, равным a, и высотой $h\cos\alpha$. Рассмотрим два тела вращения. Первое — указанное в условии. Второе тело получается при вращении получившегося при проектировании равнобедренного треугольника вокруг той же оси. Как и в предыдущей задаче, нетрудно доказать, что соответствующие площади сечений этих тел плоскостями, перпендикулярными оси вращения, равны. Согласно принципу Кавальери, равны и их объемы. Отсюда объем тела равен $\frac{1}{12}\pi a^2 h\cos\alpha$.

11. Пусть R — радиус сферы. Тогда радиус оснований цилиндра равен $r = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}$. Рассмотрим сечение заданного тела плоскостью, параллельной основаниям цилиндра и проходящей на расстоянии x от центра сферы. Сечением сферы будет окружность радиуса $\sqrt{R^2 - x^2}$. Следовательно, площадь сечения заданного тела (это кольцо) будет равна $\pi\left((R^2 - x^2) - \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)\right) = \pi\left(\frac{h^2}{4} - x^2\right)$. Таким образом, площадь этого сечения не зависит от радиуса сферы и равна площади соответствующего сечения шара радиуса $\frac{h}{2}$. Отсюда объем искомой части шара равен $\frac{1}{6}\pi h^3$.

12. Возьмем сферу радиуса r с центром в точке пересечения осей цилиндров. Рассмотрим сечение заданного тела плоскостью, параллельной осям цилиндров. Получим вписанный в окружности квадрат, являющийся сечением построенной сферы. В соответствии с принципом Кавальери отношение объемов шара (ограниченного построенной сферой) и искомого тела равно отношению площади круга к площади описанного около него квадрата, т. е. равно $\frac{\pi}{2}$.

13. Рассмотрим плоскость, перпендикулярную AB и пересекающую AB, CD и CE в точках M, K и L соответственно. Тогда площадь сечения заданного тела плоскостью, проходящей через M и перпендикулярной AB, будет равна $\pi ML^2 = \pi MK^2 + \pi KL^2$. То есть площадь сечения равна сумме площадей сечений указанных в условии тел, а объем искомого тела в соответствии с принципом Кавальери равен сумме объемов указанных тел.

14. Пусть A — одна из вершин куба, а O — его центр. Куб вращается вокруг диагонали, проходящей через A. Пусть AB — ребро куба, а P — середина ребра, отличного от AB и выходящего из B. Понятно, что в результате вращения ломаной $ABPO$ вокруг AO мы получим половину искомого тела вращения. Обозначим через Q проекцию B на AO. AQ составляет треть диагонали куба, т. е. $AQ = \frac{\sqrt{3}}{3}$. В результате вращения AB вокруг AO мы получим боковую поверхность конуса с высотой, равной $\frac{\sqrt{3}}{3}$, и с радиусом основания $BQ = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Его объем равен $\frac{2\pi\sqrt{3}}{27}$. Нам теперь надо найти объем тела, получающегося при вращении тетраэдра $BQPO$ вокруг QO. Рассмотрим прямоугольник $POQL$. Докажем, что BL перпендикулярна плоскости $POQL$. Имеем: PL перпендикулярна QL и BQ (PL параллельна OQ), следовательно, PL перпендикулярна плоскоскости BLQ, а значит, и прямой BL. Далее: QL перпендикулярна PL и PB/QL параллельна PO, а PO перпендикулярна PB и OQ, следовательно, BL перпендикулярна плоскости прямоугольника $POQL$. В соответствии с утверждением предыдущей задачи объем тела, получающегося при вращении тетраэдра $BQPO$ вокруг QO, равен сумме объемов цилиндра с высотой $QO = \frac{\sqrt{3}}{6}$ и радиусом основания $OP = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left(\text{объем цилиндра равен } \frac{\pi\sqrt{3}}{12}\right)$ и конуса с высотой $QO = \frac{\sqrt{3}}{6}$ и радиусом основания $BL = \frac{1}{\sqrt{6}}$ $\left(\text{его объем равен } \frac{\pi\sqrt{3}}{108}\right)$.

Объем искомого тела равен $2\left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{27} + \frac{\pi\sqrt{3}}{12} + \frac{\pi\sqrt{3}}{108}\right) =$

$= \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$.

15. Пусть центр круга (радиуса r) описывает окружность, принадлежащую плоскости α. Рассмотрим цилиндр с указанными в условии размерами, ось которого принадлежит плоскости α. Затем докажем, что любая плоскость, параллельная плоскости α, пересекает тор и цилиндр по фигурам одинаковой площади. Если плоскость сечения находится на расстоянии x от плоскости α, то сечением тора будет кольцо с внутренним радиусом $R - \sqrt{r^2 - x^2}$ и внешним радиусом $R + \sqrt{r^2 - x^2}$. Площадь этого кольца равна $4\pi R\sqrt{r^2 - x^2}$. Сечением же цилиндра будет прямоугольник со сторонами $2\pi R$ и $2\sqrt{r^2 - x^2}$.

6.3. Площадь поверхности цилиндра, конуса и сферы

В содержание параграфа входят определение и вывод формул для площади поверхности основных изучаемых в школе тел.

Следует обратить внимание, что мы различным образом определяем площади поверхностей цилиндра и конуса, с одной стороны, и шара (сферы) — с другой. Существование развертки (плоской) боковой поверхности цилиндра или конуса позволяет нам естественным образом считать, что площадь боковой поверхности цилиндра или конуса равна площади соответствующей развертки. Поверхность же сферы мы определяем посредством предельного перехода. Как показывает пример, рассмотренный в следующем параграфе, утверждение, что указанным в учебнике образом мы в пределе получаем поверхность шара (площадь сферы), вовсе не столь очевидно. Здесь следует обратить внимание на то, что мы в качестве площади сферы получаем величину, *не зависящую от того, каким образом уменьшаются площади граней*. (В то время как в примере из параграфа 6.4 предел существенно зависит от процесса его определения.)

Можно дать и другой способ вывода (обоснования) формулы площади сферы. Рассмотрим два шара с радиусами R и $R + \varepsilon$, где ε — малое число. Объем тела между соответствующими сферами равен $\frac{4}{3}\pi((R + \varepsilon)^3 - R^3) = 4\pi R^2\varepsilon + 4\pi R\varepsilon^2 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$. При малом ε второе и третье слагаемое значительно меньше первого, поэтому ими можно пренебречь. С другой стороны, объем тела, ограниченного сферами с радиусами $R + \varepsilon$ и R, при малом ε можно считать равным $S_{сф}\varepsilon$, где $S_{сф}$ — поверхность сферы. Значит, имеет место равенство $S_{сф}\varepsilon = 4\pi R^2\varepsilon$, откуда $S_{сф} = 4\pi R^2$.

Предметные результаты:

— объяснять, что называется площадью поверхности геометрического тела;

— применять формулы площадей поверхности цилиндра, конуса, сферы при решении задач.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Вывод формул для площади поверхности цилиндра, конуса и сферы. Задачи 1, 2 и 5.

Задание на дом: задачи 3, 4.

Урок 2. Разбор домашнего задания. Обсуждение формулы площади поверхности сферы. Решение задач 6 и 7.

Задание на дом: задачи 8, 13; задача 15 из параграфа 6.2.

Указания к решению задач учебника

3. Каждое из искомых тел состоит из двух равных конусов с общим основанием. Радиус основания первого конуса равен $\cos\frac{\alpha}{2}$, а второго — $\sin\frac{\alpha}{2}$. Образующие у всех конусов равны 1. Следовательно, полная поверхность первого тела равна $2\pi\cos\frac{\alpha}{2}$, а второго — $2\pi\sin\frac{\alpha}{2}$. Поверхность первого тела больше.

4. Если V — объем куба, то его полная поверхность равна $6V^{2/3}$. Площадь сферы, ограничивающей шар объема V, равна $(36\pi)^{1/3}V^{2/3}$. У куба поверхность больше.

5. Утверждение задачи следует из теоремы 1.19 (о площади проекции). При этом надо воспользоваться предельным переходом, который в данной ситуации достаточно очевиден. Сначала мы получим справедливость равенства нашей задачи для правильной пирамиды. Затем будем рассматривать правильные пирамиды, описанные около данного конуса. Двугранные углы при основании у таких пирамид постоянны и равны α, площади оснований пирамид стремятся к площади основания конуса, а боковые поверхности — к боковой поверхности конуса.

6. В результате вращения треугольников ABC и AKC получаются два конуса. Искомое тело получается удалением второго конуса из первого. Полная поверхность равна сумме боковых поверхностей этих конусов плюс разность площадей их оснований. Объем искомого тела равен $2\pi\sqrt{3}$, а полная поверхность равна $(11 + \sqrt{13})\pi$.

7. Осевое сечение получившегося тела является невыпуклым 12-угольником (рис. 14). На этом рисунке исходный треугольник обозначен его вершинами ABC, O — его центр, ось вращения параллельна AB и пересекает сторону AC в точке M. Как определяются точки P и K, понятно из рисунка. Тело, получающееся при вращении пятиугольника $MPKCO$ вокруг MO, представляет собой половину искомого тела. Его объем можно получить как сумму объемов конуса, получающегося при вращении треугольника MCO, и цилиндра, боковая поверхность которого получается при вращении PK, минус сумма объемов двух равных конусов, боковая поверхность которых есть результат вращения MP и MK. Легко видеть, что объемы двух последних конусов в 8 раз меньше объема первого конуса (из треугольника MCO). Имеем: ради-

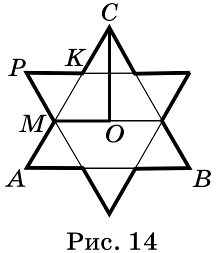

Рис. 14

ус основания $CO = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, высота $MO = \dfrac{a}{3}$. Объем этого конуса равен $\dfrac{\pi a^3}{27}$. Объем указанного выше цилиндра $\left(\text{образующая } \dfrac{a}{3}\text{, радиус основания } \dfrac{a}{2\sqrt{3}}\right)$ равен $\dfrac{\pi a^3}{36}$. Далее находим объем всего искомого тела. Аналогичные соображения позволяют найти и площадь полной поверхности искомого тела.

8. Если $\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$, то объем искомой части шара и площадь части сферы будут составлять $\dfrac{1}{n}$ соответственно от объема всего шара и площади сферы, т. е. они будут получаться из объема шара и площади сферы умножением на $\dfrac{\alpha}{2\pi}$. Для этого случая объем и площадь части сферы внутри двугранного угла равны соответственно $\dfrac{2\alpha}{3}R^3$ и $2\alpha R^2$. Такими же они будут и для произвольного α. $\Big($Сначала получаем справедливость этих формул, если $\dfrac{\alpha}{2\pi}$ рационально, а затем и для произвольного$\Big)$.

З а м е ч а н и е. Можно сразу считать очевидным, что нужные формулы для объема и площади имеют вид $C\alpha R^3$ и $C\alpha R^2$, а затем найти величины неизвестных констант, исходя из того, что мы знаем соответствующий объем и площадь поверхности при $\alpha = \pi$.

6.4*. Сапог Шварца, или Что такое площадь поверхности?

Этот параграф следует рассмотреть в сильных классах, посвятив ему один урок. На дом учащимся дается задание разобраться в рассуждениях, приведенных в тексте параграфа.

6.5. Площадь поверхности сферического пояса

При выводе формулы площади поверхности сферического пояса автор учебника следует традиционной, классической схеме. Здесь необходимо подчеркнуть эстетическую сторону как самой формулы, так и метода ее получения. Полученная формула очень изящна (компактна). Но самое главное, оказывается, что для данной сферы площадь поверхности сферического пояса (и в частности, сферической шапочки) полностью определяется высотой этого пояса и никак не зависит от расстояния до центра ограничивающих плоскостей.

На минимальном уровне можно ограничиться знанием соответствующей формулы и умением пользоваться ею в достаточно простых ситуациях. На высоком уровне необходимо уметь воспроизводить вывод формулы.

Предметные результаты:

— применять формулу площади поверхности сферического пояса при решении задач.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Вывод формулы площади сферического пояса.

Задание на дом: параграф 6.5, теория.

Урок 2. Решение задач 1, 3, 4.

Задание на дом: задачи 2 и 5.

Урок 3. Контрольная работа.

Указания к решению задач учебника

1. Утверждение данной задачи непосредственно следует из формулы 17 (теорема 6.3).

2. Радиус сферы равен расстоянию от вершины пирамиды до ребра основания, т. е. соответствующей высоте боковой грани. Радиус сферы равен $\sqrt{5}$. Плоскость основания пирамиды делит сферу на два сегмента с высотой $\sqrt{5} - 2$ и $\sqrt{5} + 2$. Их площади равны соответственно $2\pi(5 - 2\sqrt{5})$ и $2\pi(5 + 2\sqrt{5})$.

3. Сфера разделена на 6 сферических сегментов (они отсекаются гранями куба) и 8 криволинейных треугольников, соответствующих вершинам куба. Найдя площадь каждого из 6 сегментов, мы затем можем найти и площадь каждого из 8 треугольников (площадь всей сферы мы знаем). Радиус сферы равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$, высота сегмента равна $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$, а его площадь $\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Площадь каждого треугольника равна $\frac{\pi(3\sqrt{2} - 4)}{8}$.

4. Заметим, что часть шара, расположенная по одну сторону от пересекающей его плоскости, называется *шаровым сегментом*, а часть сферы соответственно называется *сферическим сегментом*. Для площади сферического сегмента верна формула (17). (Что такое высота сферического сегмента, достаточно понятно.) Для вывода формулы объема шарового сегмента рассмотрим сегмент, не превосходящий половины шара. Соединим все точки окружности, ограничивающей сферический сегмент, с центром сферы. Получим боковую поверхность конуса. Рассмотрим тело T, поверхность которого состоит из боковой поверхности этого конуса и поверхности сферического сегмента. Если S — поверхность сегмента, а R — радиус сферы, то объем тела T будет равен $\frac{1}{3}SR$. Убедиться в этом можно, например, следующим образом. Рассмотрим многогранник с большим числом граней n. Будем увеличивать число n так, чтобы вершины многогранника неограниченно приближались к поверхности сферы. Обозначим через S_n площадь поверхности этого многогранника, расположенной с той же стороны от плоскости окружности, ограничивающей сегмент, что и сам сегмент. Соединив все точки этой части поверхности многогранника с центром сферы, получим тело T_n, составленное из пирамид с одинаковой высотой R и основаниями, сумма площадей которых равна S_n. Объем этого тела равен $\frac{1}{3}S_nR$. С ростом n значение S_n стремится к S, а объем тела T_n стремится к объему тела T. Итак, объем тела T действительно равен $\frac{1}{3}SR$. Нам остается теперь из этой величины вычесть объем конуса, основанием которого является окружность сегмента, а высота равна расстоянию от центра шара до плоскости этой окружности.

В нашем случае высота меньшего сегмента равна $R - d$, следовательно, $S = 2\pi R(R - d)$. Радиус окружности, ограничивающей сегмент, равен $\sqrt{R^2 - d^2}$.

Теперь нетрудно найти объем меньшей части $\frac{\pi}{3}(2R^3 - 3R^2d + d^3)$. Объем второй части соответственно будет равен $\frac{\pi}{3}(2R^3 + 3R^2d - d^3)$. Его также можно получить из формулы для объема меньшей части заменой d на $-d$.

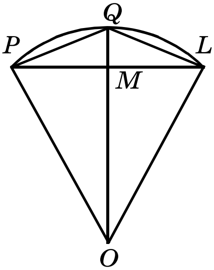

Рис. 15

5. Пусть X — радиус второй сферы, O — ее центр, а Q — центр первой сферы. Часть второй сферы внутри первой представляет собой сферический сегмент. Рассмотрим произвольное сечение данных сфер, проходящее через их центры (рис. 15). Имеем $OP = OQ = OL = X$, $QP = QL = R$, QM — высота рассматриваемого сегмента. Пусть N — диаметрально противоположная Q точка второй сферы. Треугольник QPN прямоугольный. QM — проекция PQ на QN. Из известного соотношения $PQ^2 = QM \cdot QN$ найдем $QM = \frac{R^2}{2X}$. Далее по формуле (17) получаем, что искомая площадь равна $2\pi X \frac{R^2}{2X} = \pi R^2$.

Дополнительные задачи

1. Найдите объем цилиндра, если радиус основания равен r, а площадь боковой поверхности равна S. $\left(\textit{Ответ}: \frac{1}{2}Sr.\right)$

2. Найдите объем конуса, если радиус основания равен r, а площадь боковой поверхности равна S. $\left(Ответ\text{: } \frac{r}{3}\sqrt{\pi S^2 - \pi^2 r^4}\,.\right)$

3. Найдите объем цилиндра, если радиус основания равен r, а площадь осевого сечения равна S. $\left(Ответ\text{: } \frac{\pi}{2} Sr.\right)$

4. Найдите объем конуса, если радиус основания равен r, а площадь осевого сечения равна S. $\left(Ответ\text{: } \frac{\pi}{3} Sr.\right)$

5. Докажите, что плоскость, пересекающая боковую поверхность цилиндра, делит его ось, боковую поверхность и объем в одном и том же отношении.

6. Два конуса имеют общее основание, радиус которого равен r, причем вершина одного из них расположена внутри другого. Разность высот равна α. Найдите объем тела, состоящего из точек, лежащих между боковыми поверхностями этих конусов. $\left(Ответ\text{: } \frac{1}{3}\pi r^2\alpha.\right)$

7. Найдите объем и площадь поверхности тела, получающегося в результате вращения единичного квадрата вокруг его диагонали. $\left(Ответ\text{: } \frac{\pi\sqrt{2}}{6}\,.\right)$

8. Имеется треугольник, все стороны которого различны. Рассмотрим три тела, получающиеся при вращении этого треугольника вокруг меньшей, средней и большей стороны соответственно. У какого тела объем наибольший? (*Ответ*: у тела, полученного в результате вращения вокруг большей стороны.)

9. Имеется цилиндр с радиусом основания 1 и высотой 3. В плоскости его основания расположена прямая l на расстоянии 2 от центра основания.

Через прямую l проходит плоскость, образующая угол $\alpha \leqslant 45^\circ$ с плоскостью основания и пересекающая ось цилиндра. Найдите объем каждой из частей, на которые эта плоскость делит цилиндр. (*Ответ*: $2\pi \operatorname{tg} \pi$ и $\pi(3 - 2\operatorname{tg} \alpha)$.)

10. Найдите объем конуса, площадь боковой поверхности которого равна S, а радиус описанной сферы равен R. $\Big($*Ответ*: если r, h и l — соответственно радиус основания, высота и образующая конуса, то $2Rh = l^2$, $\pi rl = S$. Из этих равенств получаем, что

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{S}{\pi l}\right)^2 \cdot \frac{l^2}{2R} = \frac{S^2}{6R\pi}.\Big)$$

11. Основание прямой призмы принадлежит конусу. Высота призмы больше высоты конуса. Площадь основания призмы равна S, а образующие конуса образуют с основанием угол α. Найдите площадь части боковой поверхности конуса, расположенной внутри призмы. $\left(\textit{Ответ}: \dfrac{S}{\cos\alpha}.\right)$

Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны 2. Найдите объем тела, получающегося при вращении этого треугольника вокруг прямой, перпендикулярной одному из катетов и проходящей через его середину (прямая принадлежит плоскости треугольника).

2. Внутри цилиндра расположены три равных, попарно касающихся шара. Каждый шар касается оснований цилиндра и его боковой поверхности. Найдите отношение объема шара и объема цилиндра, а также отношение площади поверхности соответствующей сферы и площади полной поверхности цилиндра.

3. Основания двух равных конусов принадлежат одной плоскости. Осевым сечением каждого является треугольник, один угол которого равен 120°, а наибольшая сторона 2. Расстояние между осями равно 1. Боковые поверхности конусов пересекаются. Найдите радиус наибольшего шара, касающегося оснований конусов и касающегося изнутри боковой поверхности каждого.

4. Осевым сечением конуса является правильный треугольник со стороной 2. Рассмотрите сферу, радиус которой равен радиусу основания конуса, а центр совпадает с центром основания конуса. Найдите площадь поверхности части сферы, расположенной внутри конуса.

5. В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник со сторонами 1 и 2. Высота пирамиды равна 3, а ее вершина проектируется в точку на одной из сторон длины 1. Найдите объем тела, получающегося в результате вращения этой пирамиды вокруг другой стороны длины 1.

Вариант 2

1. Найдите объем тела, получающегося в результате вращения правильного треугольника со стороной 4 вокруг его средней линии.

2. Внутри цилиндра расположены четыре равных шара. Каждый шар касается двух других шаров, а также оснований цилиндра и его боковой поверхности. Найдите отношение объема шара и объема цилиндра, а также отношение площади поверхности соответствующей сферы и площади полной поверхности цилиндра.

3. Основания двух равных конусов принадлежат одной плоскости. Осевым сечением каждого является правильный треугольник со стороной 2. Расстояние между осями равно 1. Боковые поверхности конусов пересекаются. Найдите радиус наибольшего шара, касающегося оснований конусов и касающегося изнутри боковой поверхности каждого.

4. Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник с углом 120° и основанием 6. Высота конуса служит диаметром сферы. Найдите площадь части поверхности сферы, расположенной внутри конуса.

5. В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник со сторонами 1 и 2. Высота пирамиды равна 3 и ее вершина проектируется в точку на одной из сторон длины 2. Найдите объем тела, получающегося в результате вращения этой пирамиды вокруг другой стороны длины 2.

Ответы и указания для учителя

***Вариант 1*.** **1.** $\frac{5}{3}\pi$. **2.** $\frac{2}{7+2\sqrt{3}}$, $\frac{6}{13+8\sqrt{3}}$. **3.** Радиус шара равен радиусу окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с углом 120° и основанием 1. Он равен $\frac{1}{2}\operatorname{tg}15° = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. **4.** $\pi(2-\sqrt{3})$. **5.** Воспользуйтесь результатом задачи 13 из параграфа 6.2. Объем тела равен 7π.

***Вариант 2*.** **1.** 10π. **2.** $\frac{2}{3}(3-2\sqrt{2})$. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **4.** $\frac{9}{4}\pi$. **5.** 8π.

Глава 7
Правильные многогранники

Эта глава занимает особое положение в курсе. С одной стороны, по сложившейся (почему-то) традиции правильные многогранники не включаются в содержание курса стереометрии. Исключение составляют лишь правильный тетраэдр и куб. Эти тела изучаются достаточно подробно, но не с точки зрения их принадлежности к классу правильных многогранников. Иногда учащиеся знакомятся и с октаэдром, но опять-таки октаэдр рассматривается как объединение двух правильных четырехугольных пирамид. А такие замечательные многогранники, как додекаэдр и икосаэдр, остаются практически неизвестными. Однако правильные многогранники — важнейшая часть многовековой геометрической культуры. Без знакомства с ними геометрическое знание остается неполным, и даже более того, ни о какой геометрической культуре человека, незнакомого с правильными многогранниками, говорить не приходится.

Именно по этой причине, согласно авторской концепции, в которой важнейшей целью обучения является развитие геометрической культуры, в учебник включена специальная глава, посвященная правильным многогранникам.

Самой трудной учебной проблемой здесь стало обоснование основного факта о количестве правильных многогранников. Здесь главное — не допустить профанации, с которой часто приходится встречаться. В качестве «обоснования» чаще всего предъявляется следующее «рассуждение»:

«Все грани правильного многогранника либо треугольники, либо четырехугольники, либо пятиугольники (разумеется, правильные). Уже шестиугольники не могут являться гранями правильного многогранника, поскольку при каждой вершине должно сходиться не менее трех граней, а сумма трех углов правильного шестиугольника равна 180°. При этом если все грани — треугольники, то при каждой вершине может сходиться не более пяти граней, т. е. пяти правильных треугольников».

Такое псевдодоказательство встречается даже в некоторых учебниках. Учителю необходимо четко понимать, в чем ошибочность этого «рассуждения». Иначе может возникнуть недоумение: зачем автор «нагородил» столько сложностей, если все предельно просто?

Прежде всего, следует сказать, что обычно дается несколько иное, чем в данном учебнике, определение правильного многогранника:

правильным многогранником называется выпуклый многогранник, все грани которого — равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число ребер.

Из этого определения в самом деле следует, что существует не более пяти типов правильных многогранников (по числу сходящихся при каждой вершине многоугольников). Но из этого вовсе не следует, что многогранник каждого типа существует (теорема существования), а также что все многогранники одного типа одинаковы с точностью до подобия (теорема единственности). Они могут оказаться нежесткими (подобно тому, как нежесткими являются четырехугольники с заданными сторонами). Например, рассмотрим октаэдр. Каждой вершине октаэдра соответствует четырехгранный угол, плоские углы которого составляют по 60°. Но четырехгранный угол, в отличие от трехгранного, не определяется своими плоскими углами. И ни из чего не следует, что поверхность октаэдра, составленная из 8 равных правильных треугольников, не может изменяться и задавать различные многогранники. Единственность октаэдра (а также икосаэдра, у которого пятигранные углы) при традиционном определении правильного многогранника следует из теоремы Коши о жесткости выпуклых многогранников. (Прочитайте раздел в конце учебника, озаглавленный «Вместо послесловия».) Эта теорема утверждает, что выпуклый многогранник, у которого заданы грани и указаны пары соседних граней, единственен. Для того чтобы избежать ссылки на теорему Коши и сохранить строгость изложения, автор добавил к традиционному определению правильного многогранника одно-единственное и вполне естественное условие: *равенство двугранных углов*.

В учебнике «предъявляются» все пять видов многогранников. Самое главное — доказывается существование додекаэдра и икосаэдра. Затем доказывается, что каждый многогранник полностью определяется своим ребром. Соответствующее рассуждение относится к октаэдру и икосаэдру — единственной паре многогранников, у которых углы при вершинах не являются трехгранными.

Глава 7 относительно невелика по объему. И несмотря на достаточно нетрадиционное содержание, ей следует посвятить от 4 до 10 ч. В полной мере главу 7 следует изучить в сильных классах; в слабых же можно ограничиться просто знакомством со всем семейством правильных многогранников. Необходимо подчеркнуть, что многие задачи, содержащиеся в этой главе, непривычны и достаточно сложны технически. Даже в сильных классах можно не требовать самостоятельного и полного решения некоторых задач. Но при этом необходимо, чтобы учитель сам разобрался в решениях, приведенных в этом пособии, и объяснил их школьникам. Можно тем или иным способом размножить эти решения и предложить школьникам самостоятельно изучить их. Можно, наконец, предложить сделать это наиболее сильным, чтобы те, в свою очередь, объяснили решения своим товарищам.

7.1. Определение правильного многогранника

7.2*. Ограниченность числа видов правильных многогранников

Предметные результаты:

— формулировать определение правильного многогранника;

— приводить примеры правильных многогранников;

— распознавать и называть правильные многогранники.

Примерное планирование изучения материала

Этим двум параграфам в слабом классе следует посвятить 1 урок, а в сильном — 2 урока. В сильном классе главное — доказательство теоремы 7.1 и объяснение ее смысла. В слабом можно ограничиться определением правильного многогранника, а затем решить несколько задач про куб и правильный тетраэдр (на усмотрение учителя).

7.3. Тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр

Теоретическое содержание данного параграфа незначительно. Главное здесь — доказательство существования октаэдра. Факт этот достаточно очевиден, но все же нуждается в доказательстве. А именно надо доказать, что все двугранные углы построенного многогранника равны.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Обсуждение свойств правильного тетраэдра и куба. Задача 1.

Задание на дом: задачи 6, 11.

Урок 2. Обсуждение задачи 11. Октаэдр. Задачи 2, 3, 10.

Задание на дом: задачи 4, 5, 7.

Урок 3. Обсуждение домашнего задания, прежде всего задачи 7.

Задание на дом: задачи 8, 9.

Указания к решению задач учебника

1. Изменение в условии: тетраэдр с вершинами в центрах граней данного тетраэдра.

Указанная плоскость проходит через середины четырех ребер тетраэдра, исключая два каких-то противоположных ребра. Сторона получившегося квадрата равна $\frac{1}{2}$. У тетраэдра с вершинами в центрах данного тетраэдра ребра параллельны соответствующим ребрам данного тетраэдра и в три раза меньше их. При этом указанные два тетраэдра имеют общий центр. Второй тетраэдр получается из исходного посредством гомотетии с центром в центре исходного тетраэдра и коэффициентом, равным $-\frac{1}{3}$. (Это утверждение остается верным для произвольного тетраэдра, но в качестве центра гомотетии надо взять *центр тяжести* тетраэдра — точку, в которой пересекаются отрезки, соединяющие вершины с точками пересечения медиан противоположных граней.) Отсюда следует, что указанная в условии плоскость будет проходить также и через середины соответствующих ребер маленького тетраэдра (прямая, проходящая через середину ребра и центр тетраэдра, проходит также и через середину отрезка, соединяющего центры соответствующих граней.) Площадь искомого сечения равна $\frac{1}{108}$.

2. Объем октаэдра равен $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$, радиус описанного шара равен $\frac{a}{\sqrt{2}}$, радиус вписанного шара равен $\frac{a}{\sqrt{6}}$.

3. Диагонали октаэдра, вписанного в куб, равны ребру куба. Объем октаэдра равен $\frac{1}{6}d^3$, где d — диагональ октаэдра. Таким образом, объем октаэдра, вписанного в куб, в 6 раз меньше объема куба.

4. Плоскость, содержащая грань куба, пересекает октаэдр по квадрату со стороной $\frac{2}{3}a$, где a — ребро октаэдра. Вершины грани — середины сторон этого квадрата. Значит, ребро куба равно $\frac{a\sqrt{2}}{3}$, а его объем равен $\frac{2a^3\sqrt{2}}{27}$. Искомое отношение равно $4\frac{1}{2}$.

5. Указанная в условии плоскость пересекает куб по правильному шестиугольнику со стороной, равной половине диагонали грани куба. (Докажите это самостоятельно.) С другой стороны, каждая грань вписанного в куб октаэдра перпендикулярна одной из диагоналей куба. Следовательно, указанная в условии плоскость параллельна двум противоположным граням октаэдра. Кроме того, она проходит через центр октаэдра, а значит, пересекает непараллельные ей ребра октаэдра в их серединах. Теперь нетрудно доказать, что искомое сечение есть правильный шестиугольник со стороной, равной половине ребра октаэдра или четверти диагонали грани куба. Площади соответствующих сечений равны $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ и $\frac{3\sqrt{3}}{16}$.

6. Указанный многогранник есть октаэдр.

7. Указанные в условии плоскости, в свою очередь, образуют правильный тетраэдр. Искомый многогранник есть пересечение двух правильных тетраэдров.

1) Если второй тетраэдр расположен целиком внутри первого, то его ребро не превосходит половины ребра исходного, а объем составляет не более $\frac{1}{8}$ от объема исходного. Значит, в этом случае искомое отношение меняется от 0 до $\frac{1}{8}$.

2) Если эти тетраэдры пересекаются, то у получающегося многогранника имеется грань, являющаяся пересечением грани одного из тетраэдров с поверхностью другого. Все углы соответствующего многоугольника равны 60° либо 120°. Следовательно, это правильный треугольник либо правильный шестиугольник. Кроме того, все вершины второго тетраэдра должны быть расположены вне первого. В самом деле, пусть одна из вершин второго тетраэдра расположена внутри первого, а одна — вне первого. Проведем плоскость через грань, содержащую эти две вершины. Получим два правильных треугольника: грань второго тетраэдра и сечение первого. Общая часть этих треугольников, как легко видеть, не может являться правильным многоугольником. Итак, если второй тетраэдр не расположен целиком внутри первого, то все его вершины находятся вне первого. Понятно, что вершины первого находятся вне второго. Общая часть — восьмигранник. Возможны три случая.

1-й случай. Поверхности тетраэдров пересекаются, но шестиугольных граней у пересечения нет. Тогда все его грани — правильные треугольники. При этом ни одно из ребер любого тетраэдра не может пересекать грань другого во внутренней точке. То есть вершины всех треугольных граней восьмигранника лежат на ребрах тетраэдров. Это возможно, когда тетраэдры равны и имеют общий центр. Вершинами соответствующего многогранника являются середины ребер каждого из тетраэдров. Общая их часть есть октаэдр. Его объем, как нетрудно видеть, равен $\frac{1}{2}$ от объема исходного тетраэдра.

2-й случай. У получившегося многогранника есть шестиугольные грани. Пусть одна из шестиугольных граней является частью грани первого тетраэдра. Это означает, что от треугольника, представляющего собой эту грань, отрезаны у вершин три треугольника со стороной, в три раза меньшей. Таким образом, каждая из плоскостей отсекает от исходного тетраэдра тетраэдр, в три раза меньший. Объем общей части составляет $1 - \frac{4}{27} = \frac{23}{27}$ объема исходного тетраэдра. Заметим, что для этого варианта оба тетраэдра имеют общий центр. Пусть AB — ребро исходного тетраэдра, одна из граней второго тетраэдра пересекает AB в такой точке K, что $AK = \frac{1}{3}AB$. Проведем через общий центр плоскость параллельную грани, противолежащей точке A. Эта плоскость пересекает AB в такой точке M, что $BM = \frac{1}{4}AB$. Найдем отношение расстояний от общего центра до граней второго и первого тетраэдров. Оно равно $\frac{KM}{BM} = \frac{5}{3}$. Таким же будет и отношение ребер рассматриваемых тетраэдров (второго к первому).

3-й случай. Одна из шестиугольных граней является частью грани второго тетраэдра. Рассуждая так же, как и во втором случае, получим, что объем общей части равен $\frac{23}{27}$ объема второго, а ребро второго равно $\frac{3}{5}$ ребра первого. Следовательно, объем общей части равен $\frac{23}{27} \cdot \frac{27}{125} = \frac{23}{125}$ от объема исходного тетраэдра.

8. Возможны четыре варианта ответа: $\frac{7}{3}(\sqrt{2} - 1)$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$.

Плоскости оснований указанных пирамид пересекают грани куба по прямым, образующим углы в 45° со сторонами (ребрами) этой грани. Следовательно, если какая-то грань рассматриваемого многогранника принадлежит грани куба, то эта грань — правильный восьмиугольник либо квадрат. С другой стороны, если плоскость основания одной из отрезаемых пирамид пересекается с плоскостью основания другой, то угол между линией пересечения и стороной основания равен 60°. Следовательно, если какая-то грань рассматриваемого многогранника принадлежит основанию отрезаемой пирамиды, то эта грань — правильный треугольник либо шестиугольник. Учитывая сказанное, рассмотрим несколько случаев.

1-й случай. У рассматриваемого многогранника есть грань в виде правильного восьмиугольника. Это означает, что пирамиды при соответствующей грани куба равны и сторона восьмиугольника равна стороне основания пирамиды. Далее легко получим, что все 8 пирамид равны между собой, а у рассматриваемого многогранника 6 граней имеют вид правильных восьмиугольников и 8 граней — правильные треугольники. Если x — боковое ребро каждой из отрезаемой пирамиды, то $x\sqrt{2}$ — сторона основания (а также сторона каждого правильного восьмиугольника). Получим для x уравнение (считаем, что ребро куба равно 1): $x + x\sqrt{2} + x = 1$, откуда $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Объем рассматриваемого многогранника будет равен

$$1 - 8 \cdot \frac{1}{6}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{7}{3}(\sqrt{2} - 1).$$

2-й случай. Одна из граней рассматриваемого многогранника принадлежит грани куба, является квадратом, и одна вершина этого квадрата лежит на ребре куба. Этот случай возможен, если каждая вершина указанного квадрата есть середина ребра грани куба. Более того, это имеет место для всех граней куба. Боковое ребро каждой отрезанной пирамиды равно $\frac{1}{2}$. Объем искомого многогранника равен $\frac{5}{6}$.

3-й случай. Одна из граней рассматриваемого многогранника принадлежит грани куба и является квадратом, все вершины которого расположены внутри этой грани куба. Тогда все грани, прилежащие к ней, должны быть правильными шестиугольниками. Эти шестиугольники равны, поскольку у соседних из них есть общие ребра. Значит, четыре пирамиды, соответствующие указанной грани, равны. Далее получаем, что все восемь пирамид равны.

Пусть x — боковое ребро каждой из пирамид. Тогда сторона основания равна $x\sqrt{2}$, а сторона шестиугольника равна $\frac{1}{3}x\sqrt{2}$. Но сторона шестиугольника равна $(2x-1)\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 16). Приравнивая два этих выражения для длины стороны, получим, что $x = \frac{3}{4}$. Объем пирамиды, у которой боковые ребра попарно перпендикулярны и равны $\frac{3}{4}$, равен $\frac{9}{128}$. Заметим, что две отрезаемые и соседние треугольные пирамиды имеют общую часть. Эта общая часть — треугольная пирамида, у которой две соседние

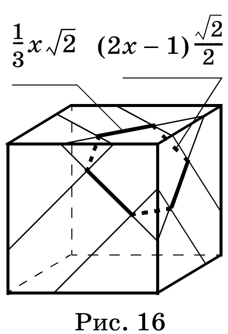

Рис. 16

грани перпендикулярны и являются равнобедренными прямоугольными треугольниками с гипотенузой $(2x - 1) = \frac{1}{2}$. Ее объем равен $\frac{1}{192}$. Таким образом, объем рассматриваемого многогранника равен $1 - \frac{72}{128} + \frac{12}{192} = \frac{1}{2}$.

4-й случай. У рассматриваемого многогранника нет граней, принадлежащих граням куба. Следовательно, многогранник, ограниченный плоскостями оснований отрезаемых пирамид (это октаэдр), расположен внутри куба. Наибольшим его объем будет, если его вершинами являются центры граней куба. В этом случае объем равен $\frac{1}{6}$. А вообще объем получающегося октаэдра может меняться от 0 до $\frac{1}{6}$.

9. Возможны два варианта ответа: $\frac{8}{9}$, $\frac{5}{8}$. В отличие от предыдущей задачи здесь сказано, что все вершины получившегося многогранника расположены на ребрах октаэдра. Тогда возможны всего два случая.

1-й случай. У получившегося многогранника 6 граней являются квадратами, а 8 граней — правильными шестиугольниками. Его объем составляет $\frac{8}{9}$ объема октаэдра.

2-й случай. У получившегося многогранника 6 граней — квадраты, а 8 — правильные треугольники. Его объем составляет $\frac{5}{8}$ от объема октаэдра.

10. Сделав соответствующую развертку (рис. 17), найдем, что кратчайший путь — это средняя линия трапеции с основаниями 2 и 1. Ее длина равна $\frac{3}{2}$.

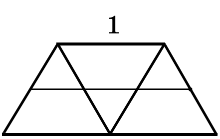

Рис. 17

11. Наибольшим будет ребро правильного тетраэдра, вершинами которого являются 4 вершины куба. Вписав в единичный куб другой куб меньшего размера так, чтобы одна из вершин совпала с вершиной исходного, и взяв в качестве вершин тетраэдра 4 вершины нового куба, лежащие на поверхности исходного, мы получим тетраэдр, вписанный в единичный куб с любым ребром, меньшим $\sqrt{2}$ (его ребро равно диагонали грани меньшего куба).

7.4*. Октаэдр и икосаэдр

Этот параграф посвящен доказательству существования икосаэдра (теорема 7.2)

Примерное планирование изучения материала

Данной теме посвящается *один урок*.

Задание на дом: разобраться в доказательстве теоремы 7.2. Задачи 1, 3 (после параграфа 7.6).

7.5. Додекаэдр

Додекаэдр вводится как многогранник, двойственный икосаэдру (теорема 7.3). Таким образом, существование икосаэдра некоторым образом становится причиной существования додекаэдра.

Примерное планирование изучения материала

На изучение этого параграфа следует отвести *один урок*, на котором начать решение задачи 2.

Задание на дом: закончить решение задачи 2; задачи 4 и 5.

7.6. Взаимосвязь между всеми правильными многогранниками

Основное содержание данного параграфа состоит в том, что все семейство правильных многогранников тесно взаимосвязано. С помощью одного (любого) из них можно получить все остальные. Главное здесь — связь между кубом и додекаэдром. Следует добавить также, что середины ребер правильного тетраэдра служат вершинами октаэдра (в учебнике этот факт не оговаривается).

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Изучение теории. Задачи (на уроке и *на дом*) 4, 5, 6, 11.

Урок. 2. Разбор домашнего задания. Решение задач (на уроке и *на дом*) 7, 8, 9, 10.

Урок 3. Контрольная работа.

Указания к решению задач учебника

1. Ребро икосаэдра равно $KQ = x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(3 - \sqrt{5})$ (см. доказательство теоремы 7.2 и рис. 116 в учебнике).

2. Рассмотрим икосаэдр, вписанный в октаэдр с ребром 1 (рис. 116 в учебнике). Найдем его объем. Для этого из объема октаэдра $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ надо 12 раз вычесть величину, равную объему пирамиды $LBPK$. А чтобы найти объем этой пирамиды, воспользуемся теоремой 5.5 по отношению к паре пирамид $LBPK$ и $ABCE$ (общая вершина B). Получим, что объем пирамиды $LBPK$ равен $\frac{\sqrt{2}}{12}x^2(1 - x)$. Таким образом, объем икосаэдра, вписанного в единичный октаэдр так, как показано в теореме 7.2, равен $\frac{\sqrt{2}}{3} - \sqrt{2}\,x^2(1 - x)$. Ребро этого икосаэдра равно $x\sqrt{2}$. Но объем икосаэдра пропорционален кубу ребра. Следовательно, чтобы найти объем икосаэдра с ребром a, следует полученную величину умножить на $\frac{a^3}{2x^3\sqrt{2}}$. Получаем, что объем икосаэдра с ребром a равен $\frac{1 - 3x^2 + 3x^3}{6x^3}a^3$. Для упрощения вычислений мы не будем сразу заменять x известным значением, а воспользуемся тем, что из уравнения, определяющего x, следуют равенства $x^2 = 3x - 1$, $x^3 = 3x^2 - x = 3(3x - 1) - x = 8x - 3$. После несложных преобразований найдем, что объем икосаэдра равен $\frac{5(3x - 1)}{6(8x - 3)}a^3 = \frac{5}{12}(3 + \sqrt{5})a^3$.

Если O — центр октаэдра, то радиус описанного шара равен OP. По теореме косинусов $R^2 = OP^2 = MO^2 + MP^2 - MO \cdot MP\sqrt{2} = \frac{1}{2} + x^2 - x = 2x - \frac{1}{2} = 2{,}5 - \sqrt{5}$. То есть мы нашли радиус описанной сферы для икосаэдра с ребром $x\sqrt{2}$, где $x = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$. Для икосаэдра с ребром a радиус описанного шара равен $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})}$.

Для вычисления радиуса вписанного шара в икосаэдр воспользуемся формулой теоремы 5.6. Все грани этого икосаэдра — правильные треугольники со стороной a. Его полная поверхность составляет $20\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 5a^2\sqrt{3}$. Зная объем икосаэдра, получим, что радиус вписанного в него шара равен $\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12}a$.

3. Рассмотрим икосаэдр, построенный при доказательстве теоремы 7.2 (рис. 116 в учебнике). Найдем кратчайший путь между вершинами K и K_1. Пусть этот путь последовательно пересекает ребра LP, LQ_1 и Q_1N_1. Сделаем развертку. Получим параллелограмм KPK_1N_1, составленный из четырех правильных треугольников (рис. 18). Его диагональ KK_1 и есть искомое расстояние. Находим ее по теореме косинусов: $KK_1 = a\sqrt{7}$.

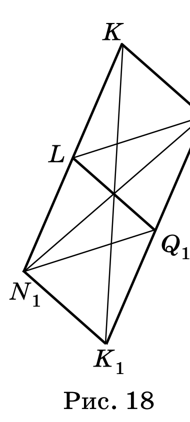

Рис. 18

4. Вновь рассмотрим икосаэдр, соответствующий рисунку 116 учебника. Плоскости $MQNPL$ и $M_1Q_1N_1P_1L_1$ параллельны между собой и перпендикулярны диагонали KK_1. Плоскость, перпендикулярная KK_1 и проходящая через середину KK_1, делит пополам все отрезки с концами в плоскостях $MQNPL$ и $M_1Q_1N_1P_1L_1$. Из этого следует, что указанное сечение есть правильный десятиугольник, стороны которого в 2 раза меньше ребер икосаэдра.

5. Пусть O — центр октаэдра (и вписанного в него икосаэдра — см. рис. 116 учебника). Двугранные углы икосаэдра есть удвоенные двугранные углы при основании правильных пирамид с общей вершиной в O и основаниями — гранями икосаэдра. Если ребро икосаэдра равно a, то стороны оснований указанных пирамид также равны a, боковые ребра равны радиусу описанного около икосаэдра шара, а высота равна радиусу вписанного в икосаэдр шара $\left(r = \dfrac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12}a\right)$. Если φ — двугранный угол при основании указанной пирамиды, то $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2r\sqrt{3}}{a} = \dfrac{3 + \sqrt{15}}{2}$. Найдем $\sin 2\varphi = \dfrac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = \dfrac{2}{3}$. А поскольку $\varphi > \dfrac{\pi}{4}$, двугранные углы икосаэдра равны $\pi - \arcsin\dfrac{2}{3}$.

6. Углы между диагоналями икосаэдра равны углу при вершине равнобедренного треугольника с основанием a (ребро икосаэдра) и боковыми сторонами R (радиус описанного шара). Этот угол равен $\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{5} = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

7. Можно доказать, что больше шести прямых, образующих попарно равные углы, провести нельзя. Кроме того, если в пространстве проведены 6 прямых, все углы между которыми равны, то каждый из этих углов равен углу между диагоналями икосаэдра.

8. Рассмотрим додекаэдр, вписанный в икосаэдр с ребром 1 (*двойственный додекаэдр*). Пусть Q — центр икосаэдра (а также додекаэдра), ABC — какая-то грань икосаэдра, P — центр ABC (P — одна из вершин додекаэдра), M — середина AB, E и K — проекции P на OA и OM соответственно. Рассмотрим пять граней икосаэдра с общей вершиной A. Центры этих граней — вершины соответствующей грани додекаэдра. Плоскость этой грани перпендикулярна OA. Следовательно, E принадлежит указанной грани додекаэдра. Пусть ABD — также грань икосаэдра, Q — ее центр, тогда PQ есть ребро рассматриваемого додекаэдра и PQ проходит через E. OA и OP — соответственно радиусы описанного и вписанного шара для рассматриваемого икосаэдра (OP — также радиус описанного шара для рассматриваемого додекаэдра). Значит (см. задачу 2):

$$OP^2 = \left(\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12}\right)^2 = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{24}, \qquad (1)$$

$$OA^2 = \frac{1}{8}(5 + \sqrt{5}). \qquad (2)$$

Нетрудно найти

$$OM^2 = OP^2 + PM^2 = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{12} = \frac{3 + \sqrt{5}}{8}. \qquad (3)$$

Далее будем действовать поэтапно.

1) Найдем PQ. По теореме косинусов

$$PQ^2 = MP^2 + MQ^2 - 2MP \cdot MQ\cos\beta,$$

где β — двугранный угол икосаэдра. После простых преобразований найдем, что ребро двойственного к единичному икосаэдру додекаэдра

$$b = PQ = \frac{1 + \sqrt{5}}{6}. \qquad (4)$$

2) Найдем сначала отношение объемов рассматриваемых додекаэдра и икосаэдра. Заметим, что объемы пирамид $OPKE$ и $OPAM$ составляют $\frac{1}{120}$ часть объемов додекаэдра и икосаэдра. Следовательно, отношение объемов этих пирамид равно отношению объемов рассматриваемых додекаэдра и икосаэдра. Итак, искомое отношение объемов равно

$$\frac{OE}{OA} \cdot \frac{OK}{OM} = \frac{OE \cdot OA}{OA^2} \cdot \frac{OK \cdot OM}{OM^2} = \frac{OP^4}{OA^2 \cdot OM^2} = \lambda. \qquad (5)$$

Мы знаем (см. задачу 2), что объем единичного икосаэдра равен

$$V_1 = \frac{5}{12}(3 + \sqrt{5}). \qquad (6)$$

Объем двойственного к единичному икосаэдру додекаэдра равен λV_1. Нам надо найти отношение объема додекаэдра к кубу его ребра, т. е. величину $\frac{\lambda V_1}{b^3}$. Заменяя в этой дроби все величины по формулам (1)—(6), получим, что она равна $\frac{15 + 7\sqrt{5}}{4}$. Следовательно, объем додекаэдра с ребром a равен $\frac{15 + 7\sqrt{5}}{4}a^3$.

3) Найдем радиус шара, описанного около додекаэдра с ребром a. Мы знаем радиус шара, описанного около додекаэдра, двойственного к единичному икосаэдру: он равен OP (1), а также ребро этого додекаэдра b (4). Значит, радиус шара, описанного около додекаэдра с ребром a, равен $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{4}a$.

4) Радиус шара, вписанного в двойственный к единичному икосаэдру додекаэдр (с ребром b), равен $OE = \frac{OE \cdot OA}{OA} = \frac{OP^2}{OA}$. Радиус шара, вписанного в додекаэдр с ребром a, равен $\frac{OE}{b}a = \frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{2(5 + \sqrt{5})}}a$.

9. Поскольку две соседние грани додекаэдра перпендикулярны двум соответствующим диагоналям двойственного икосаэдра, это означает, что двугранный угол между соседними гранями додекаэдра дополняет до π угол между диагоналями икосаэдра (см. задачу 6) и равен $\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$.

10. Рассмотрим две противоположные грани додекаэдра. Плоскость, параллельная этим граням и равноудаленная от них, пересекает 10 оставшихся граней в серединах ребер, не имеющих общих концов с вершинами данных граней. В результате сечение будет представлять собой правильный десятиугольник.

11. Поскольку пятиугольники $ABCDE$ и $BCEFK$ симметричны относительно плоскости, перпендикулярной BC и проходящей через середину BC, $AK = DE = BE = BD$. Таким образом, пирамида

BDEC правильная, а сторона *CE* перпендикулярна *BD*. Но *CE* параллельна *BF*. Значит, *BF* перпендикулярна *BD*.

Дополнительные задачи

1. Единственный правильный многогранник, который может быть разрезан на правильные многогранники, — это правильный тетраэдр. Как это можно сделать?
2. Сколько различных диагоналей у икосаэдра? (*Ответ*: 6 больших и 30 малых, всего 36.)
3. Сколько всего диагоналей у додекаэдра (диагональю считаем отрезок, соединяющий две вершины и не лежащий на поверхности)? (*Ответ*: 90. Из каждой вершины выходит 9 диагоналей.)
4. Через каждое ребро правильного тетраэдра проведена плоскость, параллельная противоположному ребру. Является ли правильным получившийся многогранник? Если да, то как он называется? (*Ответ*: куб.)
5. Найдите двугранные углы додекаэдра. (*Ответ*: двугранные углы октаэдра дополняют до π углы между большими диагоналями икосаэдра, — см. задачу 6 из параграфа 7.6. Значит, они равны $\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$.)
6. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 1, а двугранные углы между боковыми гранями равны $\frac{2\pi}{5}$. Найдите объем этой пирамиды. (*Ответ*: объем этой пирамиды составляет $\frac{1}{20}$ объема единичного икосаэдра, т. е. он равен $\frac{1}{48}(3 + \sqrt{5})$.)
7. Какими равными правильными многогранниками можно заполнить пространство (соприка-

сающиеся многогранники имеют либо общую грань, либо общее ребро, либо общую вершину)? (*Ответ*: только кубами.)

8. Найдите длины всех диагоналей икосаэдра с ребром 1. $\Bigg($*Ответ*: наибольшая диагональ равна $2R = \sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}$, см. задачу 2 из параграфа 7.6. Проведем две большие диагонали икосаэдра. Соединив их концы, получим прямоугольник, одна сторона которого равна 1, а другая — меньшая диагональ. Отсюда найдем меньшую диагональ, равную $\frac{1}{2}+1.\Bigg)$
9. Найдите длину наибольшей диагонали додекаэдра с ребром 1. $\Big($*Ответ*: $2R = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{15}).\Big)$
10. Рассмотрите 5 правильных многогранников с ребром 1. Расположите в порядке возрастания их объемы, полные поверхности, радиусы описанных шаров, радиусы вписанных шаров. (*Ответ*: для всех величин порядок одинаков: тетраэдр, октаэдр, куб, икосаэдр, додекаэдр.)

Контрольная работа № 4

Вариант 1

1. Чему равна полная поверхность икосаэдра с ребром a?
2. Сколько ребер у додекаэдра?
3. Найдите двугранные углы при боковых ребрах правильной треугольной пирамиды, если отношение ее высоты к боковому ребру равно отношению радиуса шара, вписанного в октаэдр, к ребру октаэдра.
4. Чему равен угол между плоскостями, содержащими две не соседние и не параллельные грани додекаэдра?

Вариант 2

1. Чему равна полная поверхность октаэдра с ребром a?
2. Сколько ребер у икосаэдра?
3. Найдите двугранные углы между соседними боковыми гранями правильной пятиугольной пирамиды со стороной основания, равной 1, и высотой, равной радиусу шара, вписанного в додекаэдр с ребром 1.
4. Пусть ABC и BCD — две грани икосаэдра. Рассмотрим две отличные от данных грани с ребрами AB и CD. Чему равен угол между плоскостями этих граней?

Ответы и указания для учителя

***Вариант 1*. 1.** $5a^2$. **2.** 30. **3.** Если мы соединим центр октаэдра с его вершинами, то разобьем октаэдр на пирамиды указанного вида. К каждому боковому ребру прилежит четыре интересующих нас двугранных угла. Их сумма равна 2π. **4.** Центры додекаэдра — вершины двойственного икосаэдра. Следовательно, диагонали двойственного икосаэдра перпендикулярны граням додекаэдра и угол между любой парой плоскостей, содержащих грани додекаэдра, равен углу между диагоналями икосаэдра (см. задачу 6 к параграфу 7.6).

***Вариант 2*. 1.** $2a^2\sqrt{3}$. **2.** 30. **3.** Если мы соединим центр додекаэдра с его вершинами, то разобьем октаэдр на пирамиды указанного вида. К каждому боковому ребру прилежит три интересующих нас двугранных угла. Их сумма равна 2π. **4.** Рассмотрим икосаэдр, вписанный в октаэдр, как при доказательстве теоремы 7.2 (см. рис. 116 в параграфе 7.4 учебника). При этом грани ABC и BCD расположим так, чтобы они не принадлежали граням октаэдра. Тогда две другие грани икосаэдра будут принадлежать двум не соседним граням октаэдра. Следовательно, искомый угол равен углу между плоскостями двух не соседних граней октаэдра, т. е. равен углу между боковыми сторонами равнобедренного треугольника с основанием 1 и боковой стороной $(\sqrt{3})/2$.

Глава 8
Координаты и векторы в пространстве

Безусловно, координатный и векторный методы являются важнейшими в геометрических исследованиях. Однако в данном учебнике объем теоретического материала, посвященного этому важнейшему разделу, на первый взгляд представляется не слишком большим. Тем не менее с формальной точки зрения в учебнике имеются все или почти все сведения, включаемые в традиционные школьные курсы стереометрии, правда, излагаются они очень лаконично. С другой стороны, в учебнике отсутствуют многие факты соответствующей теории, которые в последнее время часто включаются в программы для физико-математических школ и классов. Все это соответствует авторской позиции и авторской концепции. Дело в том, что подробная теория векторного и координатного метода изучается в высшей школе в курсе аналитической геометрии, и нет никакой необходимости излагать этот курс в школе сокращенно и примитивно. Однако главное не в том, а точнее, не только в том, что в вузе предстоит в лучшем случае учить выпускника школы заново, а в худшем — переучивать. В конце концов, не все дети пойдут в вуз. Главное в том, что этот метод не совсем соответствует целям обучения школьной геометрии, как их понимает автор учебника. Основной целью обучения стереометрии является развитие пространственного воображения, в то время как координатный и векторный методы менее всего помогают достижению этой цели. Более того, в определенном смысле их роль — компенсировать недостатки пространственного воображения и даже заменить его.

В данном курсе координаты и векторы играют несколько иную роль. Они являются инструментом повторения. С их помощью мы получаем возможность повторить весь курс, рассматривая многие факты с новой точки зрения. Кроме того, во многих примерах и предлагаемых задачах автор показывает, что, перейдя от геометрии к алгебре с помощью векторов или координат, нельзя полностью забывать о геометрии. Геометрические интерпретации могут существенно облегчить формально алгебраические рассмотрения и даже выкладки.

Теоретическое содержание всей главы 8 достаточно традиционно, изложение сходно с изложением соответствующего раздела в курсе планиметрии этого же автора. Правда, система задач несколько отличается от традиционного подбора, но это также характерно для всего данного курса геометрии. Следует все же заметить, что по сравнению с курсом планиметрии количество задач явно уменьшено. Поэтому учитель, тяготеющий к рассматриваемым в главе разделам и методам, может добавить задачи из других учебников и пособий.

8.1. Декартовы координаты в пространстве

8.2. Формула расстояния между двумя точками. Уравнение сферы

Содержание этих двух параграфов вполне традиционно. Следует обратить внимание на очевидные аналогии с планиметрией.

Предметные результаты для параграфа 8.1:

— объяснять и иллюстрировать понятия декартовой системы координат в пространстве;

— формулировать определение декартовых прямоугольных координат точки в пространстве;

— вычислять расстояния между двумя точками, заданными координатами;

— задавать сферу уравнением;

— решать задачи с использованием уравнения сферы.

Предметные результаты для параграфа 8.2:

— иллюстрировать применение формул расстояния между двумя точками и уравнения сферы;

— решать задачи на вычисления и доказательство с использованием изученных формул.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Изложение теории, содержащейся в параграфе 8.1 и 8.2. Задачи 1, 2, 4 к параграфу 8.2.

Задание на дом: задачи 3, 5, 6 к параграфу 8.2.

Урок 2. Разбор домашнего задания. Решение задач (в классе и *дома*) 7, 8, 9, 10, 11. Можно воспользоваться также задачами из дополнительного списка.

Указания к решению задач учебника

2. Пусть координатами точки M будут $(x; 0; 0)$. Из равенства $AM = MB$ получаем уравнение $(x + 2)^2 + 16 + 1 = (x - 1)^2 + 1 + 4$, из которого найдем $x = -\frac{5}{2}$.

3. Точка, лежащая в плоскости xOy, имеет координату $(x; y; 0)$. Из ее равноудаленности от трех заданных точек получим систему уравнений: $x^2 + y^2 + 9 = x^2 + (y - 4)^2 = (x - 5)^2 + y^2$, откуда $x = \frac{8}{5}$, $y = \frac{7}{8}$. Координаты остальных точек определяются аналогично.

4. Радиус заданной сферы равен расстоянию между ее центром, точкой O и точкой на сфере — началом координат.

5. Центр этой сферы — середина отрезка AB, его координаты $(-1; 1; 1)$; радиус — половина AB.

6. Пусть центр данной сферы — точка O с координатами $(0; y; 0)$. Из условия $OA = OB = R$ находим, что $y = 2$, $R = 3$.

7. Выделяя полные квадраты по x, y и z, исходное уравнение можно привести к виду:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{2}.$$

8. Радиус данной сферы равен расстоянию от точки Q до плоскости yOz, т. е. 1.

9. Точка касания — проекция центра сферы на ось Ox. Ее координаты (3; 0; 0) (далее см. решение задачи 4).

10. Координаты центра второй сферы (0; 1; 0), ее радиус — 1 (см. решение задачи 7). Из условия, что расстояние между центрами касающихся сфер равно сумме их радиусов (касание внешним образом) или их разности (внутреннее касание), находим, что радиус искомой сферы равен $\sqrt{6} \pm 1$.

11. Пусть центр данной сферы — точка $Q(x; y; z)$. Из условия, что сфера проходит через четыре заданные точки, получаем систему уравнений: $x^2 + y^2 + z^2 = (x - 3)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y - 4)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z - 5)^2$ (что равно R^2), откуда $x = \frac{3}{2}$, $y = 2$, $z = \frac{5}{2}$ и $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

8.3. Уравнение плоскости

В этом параграфе доказывается одна важная теорема 8.1 (общее уравнение плоскости). Следует обратить внимание на то, что эта теорема состоит из двух частей — прямого и обратного утверждения. Доказательство теоремы 8.1 несколько отличается от традиционных. Обычно при выводе уравнения плоскости так или иначе в явной форме используются факты из векторной алгебры, рассматривается аффинное пространство, а плоскость задается точкой и парой векторов (или тремя точками, что, по сути, то же самое). В предлагаемом же рассуждении используется иной способ задания плоскости (как множество перпендикуляров к данной прямой, проходящих через данную точку), основанный на свойствах евклидового пространства. Строго говоря, такое доказательство опирается и на элементы векторной алгебры (свойства скалярного произведения), но в неявной форме.

Предметные результаты:

— решать задачи с использованием уравнения плоскости.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Доказательство основной теоремы. Решение задачи, данной в тексте параграфа.

Задание на дом: изучить доказательство теоремы. Задачи 1, 2, 4.

Урок 2. Задачи 3, 5, 7, 8.

Задание на дом: задачи 9, 10.

Указания к решению задач учебника

1. Точка $A(3; -2; 4)$ — проекция точки $O(0; 0; 0)$ на заданную плоскость. Далее см. доказательство теоремы 8.1.

2. Плоскость, задаваемая уравнением

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0,$$

проходит через точки $(a; 0; 0)$, $(0; b; 0)$ и $(0; 0; c)$.

3. Система уравнений $\begin{cases} ax + by + cz + d_1 = 0, \\ ax + by + cz + d_1 = 0 \end{cases}$ не имеет решений при $d_1 \neq d_2$. Значит, указанные плоскости не имеют общих точек.

4. Искомое уравнение имеет вид: $2x - y - 3z + d = 0$ (см. задачу 3). Подставив вместо x, y и z координаты точки $(-2; 0; 3)$, найдем d.

5. Середина AB — точка $A_0(-2; -1; 2)$ — является проекцией точки A на искомую плоскость. Далее см. доказательство теоремы 8.1.

6. Подставив координаты заданных точек в уравнение плоскости, получим систему:

$$\begin{cases} -3a + c + d = 0, \\ 2a + b - c + d = 0, \\ -2a + 2b + d = 0. \end{cases}$$

Из этой системы $d = 0$, а значения a, b и c находятся с точностью до пропорциональности.

7. Пусть точка касания A_0 имеет координаты $(m_0;\ n_0;\ p_0)$, тогда искомое уравнение имеет вид $ax + by + cz + d = 0$, где $a = -m_0$, $b = -n_0$, $c = -p_0$ и $d = m_0^2 + n_0^2 + p_0^2$ (см. доказательство теоремы 8.1, точка A_0 — проекция центра сферы точки $O(0; 0; 0)$ на данную плоскость). Из условия параллельности плоскостей следует, что $\frac{-m_0}{1} = \frac{-n_0}{2} = \frac{-p_0}{3}$, а так как точка A_0 лежит на сфере, то $m_0^2 + n_0^2 + p_0^2 = 1$. Из этой системы $m_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}$, $n_0 = \pm\frac{2}{\sqrt{14}}$ и $p_0 = \pm\frac{3}{\sqrt{14}}$.

8. Напишем уравнение плоскости, проходящей через точки A, B и C, и проверим, что координаты точки D удовлетворяют этому уравнению.

9. Пусть точка $A(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — проекция начала координат на данную плоскость. Тогда уравнение $-x_0x - y_0y - z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 0$ задает ту же плоскость (см. доказательство теоремы 8.1), т. е. $\frac{-x_0}{1} = \frac{-y_0}{-2} = \frac{-z_0}{3} = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{-5}$. Кроме того, так как точка A лежит в данной плоскости, то $x_0 - 2y_0 + 3z_0^2 - 5 = 0$. Отсюда $x_0 = \frac{5}{14}$, $y_0 = -\frac{10}{14}$ и $z_0 = \frac{15}{14}$. (Вообще, расстояние от точки с координатами $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до плоскости $ax + by + cz + d = 0$ равно $\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Эту формулу нетрудно доказать, используя скалярное произведение векторов.)

10. Центр заданной сферы имеет координаты $(0; 0; 1)$ (см. решение задачи 7 из параграфа 8.2). Пусть точка касания A_0 имеет координаты $(m_0;\ n_0;\ p_0)$, тогда искомое уравнение имеет вид $ax + by + cz + d = 0$, где $a = -m_0$, $b = -n_0$, $c = 1 - p_0$ и $d = m_0^2 + n_0^2 + p_0^2 - p_0$ (см. доказательство теоремы 8.1, точка A_0 — проекция центра сферы на данную плоскость). Из условия, что точки $(3;\ 0;\ 0)$ и $(0;\ -2;\ 0)$ лежат в данной плоскости, а точка A_0 — на сфере, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -3m_0 + m_0^2 + n_0^2 + p_0^2 - p_0 = 0, \\ 2n_0 + m_0^2 + n_0^2 + p_0^2 - p_0 = 0, \\ m_0^2 + n_0^2 + p_0^2 - 2p_0 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы $m_0 = n_0 = p_0 = 0$ или $m_0 = \frac{24}{49}$, $n_0 = -\frac{36}{49}$ и $p_0 = \frac{72}{49}$.

8.4. Уравнение прямой линии

Предметные результаты:

— решать задачи с использованием уравнения прямой.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Изучение теории. Задачи 1, 3, 5.
Задание на дом: задачи 2, 4, 6.
Урок 2. Разбор домашнего задания. Задачи 8, 9.
Задание на дом: задачи 7, 10.

Указания к решению задач учебника

2. Например:

$$\left(\frac{x-a}{a_2-a_1}-\frac{y-b}{b_2-b_1}\right)^2+\left(\frac{y-b_1}{b_2-b_1}-\frac{z-c}{c_2-c_1}\right)^2=0.$$

3. Уравнение прямой AB имеет вид: $\frac{x+2}{5}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-5}{-1}$. Точка пересечения данной прямой с плоскостью xOy имеет координаты $(x;\ y;\ 0)$. Подставляя их в уравнение прямой, мы получим: $\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{-4}=5$, откуда $x=23$, $y=-17$. Координаты точек пересечения с другими координатными плоскостями определяются аналогично.

4. Данная прямая задается равенством $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}$. Остается добавить уравнение плоскости и решить получившуюся систему.

5. *Геометрическое место точек* (*гмт*) плоскости, равноудаленных от точек A и B, — это плоскость, перпендикулярная отрезку AB и проходящая через его середину (аналог серединного перпендикуляра на плоскости). Ее уравнение $2x+14y+22z-21=0$ (см. решение задачи 5 из параграфа 8.3). Аналогично для точек A и C — плоскость $2x-5y-z-7=0$. Прямая пересечения этих двух плоскостей и будет искомым гмт.

6. Плоскости, параллельные плоскости xOy ($z=z_0$, $0\leqslant z_0\leqslant h$), пересекают поверхность, задаваемую этим уравнением по окружностям, центры которых лежат на оси Oz ($O(0; 0; z_0)$). Радиусы данных окружностей обратно пропорциональны z_0 — расстоянию от начала координат до соответствующей плоскости (при $z_0 = h$ радиус равен нулю, и это точка). Таким образом, данное уравнение задает боковую поверхность конуса, ось которого лежит на оси Oz, радиус основания — rh, высота — h.

7. Пусть заданная прямая пересекает ось Ox в точке $(x_1; 0; 0)$. Тогда она задается равенством $\frac{x-3}{x_1-3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+2}{2}$ (*). Пусть она пересекает прямую $x = 1$, $y = -2$ в точке $(1; -2; z_1)$. Подставив координаты этой точки в (*), получим систему уравнений: $\frac{-2}{x_1-3} = 2 = \frac{z_1+2}{2}$, откуда $x_1 = z_1 = 2$.

Другой способ решения: если написать уравнения двух плоскостей, проходящих через заданную точку и прямые Ox и $x = 1$, $y = -2$ соответственно, то прямая пересечения этих плоскостей и будет искомой.

8. Найдем наименьшее расстояние между точкой $A(4; -3; 5)$ и точкой P на прямой $x = y = z$. Пусть точка P имеет координаты $(a; a; a)$. Тогда $AP^2 = (a-4)^2 + (a+3)^2 + (a-5)^2$. Раскрыв скобки и выделив полный квадрат, получим: $AP^2 = 3(a-2)^2 + 38$. Таким образом, минимум достигается при $a = 2$, а значит, точка $P(2; 2; 2)$ является проекцией точки A на прямую $x = y = z$. Пусть теперь точка A_1 симметрична точке A относительно данной прямой, тогда точка P — середина отрезка AA_1. Остается только применить формулу для координат середины отрезка.

9. Прямая AB задается равенством $\frac{x-4}{3} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+2}{5}$ или $x = 3y - 11$, $z = 5y - 27$. Таким образом, произвольная точка на прямой AB имеет координаты $(3y - 11; y; 5y - 27)$, а точка на оси Ox — $(x; 0; 0)$. Квадрат расстояния между такими точками равен $(3y - 11 - x)^2 + y^2 + (5y - 27)^2 = (3y - 11 - x)^2 + \left(\sqrt{26}\,y - \frac{135}{\sqrt{26}}\right)^2 - \frac{27^2}{26}$. Минимальное значение это выражение принимает при $y = \frac{135}{26}$ и $x = 3y - 11$.

Другой способ решения: спроектируем наши прямые на плоскость, перпендикулярную оси Ox (плоскость yOz). При этом ось Ox перейдет в начало координат, точка $A(4; 5; -2)$ — в точку $A'(0; 5; -2)$, а точка $B(7; 6; 3)$ — в $B'(0; 6; 3)$. Тогда искомое расстояние равно расстоянию от начала координат до прямой $A'B'$ (см. параграф 4.3). Уравнение прямой $A'B'$ в плоскости yOz имеет вид: $5y - z - 27 = 0$. (На плоскости расстояние от точки $(x_1; y_1)$ до прямой $ax + by + c = 0$ может быть найдено по формуле $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.)

10. Достаточно найти уравнения плоскостей, проходящих через точку A и параллельных плоскостям $x - 2y - 3z = 0$ и $2x + y - z = 2$ соответственно (см. решение задачи 4 из параграфа 8.3). *Ответ*: $x - 2y - 3z + 4 = 0$, $2x + y - z - 2 = 0$.

8.5. Векторы в пространстве

8.6. Теорема о единственности представления любого вектора в пространстве через три некомпланарных вектора

Содержание этих параграфов вполне традиционно. Главный упор следует сделать на отработку соответствующей техники.

Предметные результаты для параграфа 8.5:

— формулировать определения: вектора в пространстве; коллинеарных векторов; суммы, разности двух векторов; произведения вектора на число;

— формулировать свойства линейных операций над векторами и иллюстрировать их, используя изображения многогранников;

— решать задачи с использованием векторов, с заданными координатами.

Предметные результаты для параграфа 8.6:

— формулировать определения: компланарных векторов; векторного базиса на плоскости и в пространстве; теоремы о разложении вектора по двум неколлинеарным и трем некомпланарным векторам;

— раскладывать вектор по некомпланарным векторам;

— решать задачи векторным методом: переводить условие геометрической задачи в векторную терминологию, выполнять алгебраические операции над векторами и полученный в векторной форме результат переводить обратно на геометрический язык.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Изучение теории. Задачи 1, 3а, 4а.

Задание на дом: повторить соответствующий раздел планиметрии, задачи 2, 3б, 4б.

Урок 2. На уроке и *на дом* — решение задач 4, 5, 6а, б, в.

Указания к решению задач учебника

2. $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1} = (3; 0; -3)$.

3. а) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} = (-1; 1; -2)$, откуда находим координаты точки D. Из равенства $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{DD_1} = (-2; 2; 2)$ находим координаты остальных вершин.

б) Точка O с координатами $(-1; 1; 1)$ — середина AC, а точка O_1 с координатами $\left(-3; \frac{1}{2}; 1\right)$ — середина B_1D_1. Тогда $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{OO_1} = \left(-2; -\frac{1}{2}; 0\right)$. Отсюда находим координаты оставшихся вершин параллелепипеда.

4. Можно непосредственно вычислить ответ, воспользовавшись ответом предыдущей задачи, однако для упрощения решения можно использовать следующие равенства: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 0$, $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} = 2\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CD_1} + \overrightarrow{DA_1} = 4\overrightarrow{AA_1}$.

5. Пусть $\vec{a} = x\vec{m} + y\vec{n} + z\vec{p}$. Тогда, подставляя в это равенство координаты векторов, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + z = 2, \\ y + z = 3, \end{cases}$$

откуда $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$.

6. а) $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$; $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$; $\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AA_1} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$; $\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}$.

б) Из предыдущего пункта $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CA_1})$, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{BD_1})$ и $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD_1} - \overrightarrow{CA_1})$. Кроме того, аналогично пункту а) $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA_1}$.

в) Аналогично пункту а) $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Отсюда $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB_1})$, $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AD_1} - \overrightarrow{AC_1})$. Кроме того, $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB_1})$.

8.7. Скалярное произведение векторов

Определение скалярного произведения и его свойства такие же, как и в планиметрии. Не меняются и способы доказательства всех утверждений.

Предметные результаты:

— формулировать определения: угла между двумя ненулевыми векторами; скалярного произведения двух ненулевых векторов;

— формулировать признак перпендикулярности двух векторов;

— используя изображения куба, правильного тетраэдра, прямоугольного параллелепипеда, векторным методом доказывать параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, содержащих ребра, грани и сечения этих многогранников;

— с помощью скалярного произведения находить величины углов между прямыми и плоскостями, вычислять длины отрезков, расстояния от точки до прямой и плоскости, используя модели и изображения куба, правильного тетраэдра.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Повторение свойств скалярного произведения (по учебнику «Планиметрия»). Задачи 1, 4.

Задание на дом: задачи 2, 3, 5.

Урок 2. Задачи 7, 8, 9.

Задание на дом: задачи 6, 10.

Урок 3. Контрольная работа.

Указания к решению задач учебника

1. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно найти по следующей формуле: $\cos\angle(\vec{a},\ \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$, где скалярное произведение векторов находится по свойству 6 (см. параграф 8.7).

2. Пусть $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ — две различные точки данной плоскости, т. е. их координаты удовлетворяют уравнению данной плоскости. Вычтя из второго равенства первое, после преобразований получим: $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0$, т. е. скалярное произведение векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{AB}$ равно нулю. Таким образом, вектор $\vec{n}$ перпендикулярен любому вектору (любой прямой) данной плоскости.

3. Угол между плоскостями равен углу между векторами, им перпендикулярными, или дополняет данный угол до 180° (угол между плоскостями — всегда острый, см. определение 14 из параграфа 1.7). Воспользовавшись результатом предыдущей задачи, несложно найти векторы, перпендикулярные каждой из плоскостей.

4. $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$ (см. задачу 6 из предыдущего параграфа). По свойствам скалярного произведения:

$$\left|\overrightarrow{AC_1}\right|^2 = \overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{AC_1} =$$

$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}) =$$

$$= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AA_1}^2 + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} +$$

$$+ \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD}) = 4 + 16 + 9 + 2\,(0 + 3 + 6\sqrt{2}\,) = 35 + 12\sqrt{2}\,.$$

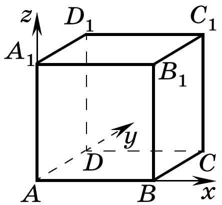

Рис. 19

5. Введем декартову систему координат, как показано на рисунке 19, с единичным отрезком, равным длине ребра куба (это естественная декартова система координат для куба). В этой системе координат вершины куба имеют следующие координаты: $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $A_1(0; 0; 1)$, $B_1(1; 0; 1)$, $C_1(1; 1; 1)$ и $D_1(0; 1; 1)$. Далее, вычислив координаты векторов, можно найти требуемые углы (см. задачу 1).

6. Введем декартову систему координат с началом в одной из вершин параллелепипеда и осями, направленными по его ребрам, и с единичным отрезком, равным наименьшему из ребер. В этой системе вершины параллелепипеда имеют следующие координаты: (0; 0; 0), (1; 0; 0), (0; 2; 0), (1; 2; 0), (0; 0; 3), (1; 0; 3), (0; 2; 3), (1; 2; 3). Далее аналогично предыдущей задаче.

7. Для любых точек A, B, C и D верно: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$. Подставив вместо векторов $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{AD}$ эти выражения, мы получим требуемое равенство.

8. Пусть координаты точки K $(x; 0; 0)$, N — $(0; y; 0)$ и M — $(0; 0; z)$. Перпендикулярность прямых KA, NA и MA означает, что $\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{NA} = 0$. Записав данные скалярные произведения в координатной форме (свойство 6 и параграф 5.7), мы получим систему уравнений, из которой находим $x = 7$, $y = \frac{7}{2}$, $z = \frac{7}{3}$.

9. Возьмем на заданных лучах единичные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$. Тогда $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})^2 \geqslant 0$. Раскрывая левую часть данного неравенства по свойствам скалярного произведения и учитывая, что длины векторов равны 1, получаем требуемое неравенство.

10. Возьмем внутри тетраэдра произвольную точку и опустим из нее перпендикуляры ко всем граням. Для этих лучей справедливо утверждение предыдущей задачи, а углы между этими лучами дополняют до 180° двугранные углы тетраэдра.

11. Докажем, что попарные скалярные произведения направляющих векторов биссектрис имеют один и тот же знак (или все равны нулю). Это и будет означать, что все три указанных угла одновременно либо острые, либо тупые, либо прямые. Пусть единичные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лежат на сторонах трехгранного угла, тогда векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{c}$ и $\vec{b} + \vec{c}$ лежат на биссектрисах его плоских углов. Все их попарные скалярные произведения равны между собой и равны $\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c} = 1$.

Дополнительные задачи

1. Найдите координаты середины отрезка с концами $A\ (-1;\ 2;\ 0)$ и $B(0;\ -3;\ 5)$.
2. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами $A(1;\ 2;\ 3)$, $B\ (-2;\ 4;\ -1)$, $C(-3;\ 5;\ -6)$. Найдите также координаты точки D такой, что $ABCD$ — параллелограмм.
3. Рассмотрим треугольник с вершинами на осях координат. Докажите, что проекция начала координат на плоскость этого треугольника совпадает с точкой пересечения высот треугольника.
4. Пусть A, B и C — произвольные точки плоскости, а α, β, γ — три числа таких, что $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Пусть вектор $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$, где O — произвольная точка. Докажите, что точка M принадле-

жит плоскости ABC и при этом любая точка плоскости может быть представлена в этом виде единственным образом.

5. Найдите уравнение плоскости, параллельной плоскости $4x + 2y - 3z = 1$ и проходящей через точку $A(5; 6; -7)$.

6. Докажите, что плоскости $4x - 2y - 3z = 0$ и $4x - 2y - 3z = 1$ параллельны, и найдите расстояние между ними.

7. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1; 0; 1)$ и $B(-3; 2; 0)$ и параллельной оси Ox.

8. Укажите все точки $M(x; y; z)$ такие, что

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-6)^2 + (z+3)^2} = 7.$$

9. Найдите расстояние между прямой, являющейся линией пересечения плоскостей $3x - 2z = 5$ и $4x + 3z = 1$, и прямой, проходящей через точки $A(1; -2; 3)$ и $B(2; 5; -4)$.

10. Найдите уравнение сферы, касающейся сферы, задаваемой уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z = 0$, с центром в точке A, если: а) $A(9; -3; -3)$; б) $A(4; 0; 0)$; в) $A(1; 1; 0)$.

11. Дана сфера $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z = 11$. Найдите уравнение сферы радиуса R, касающейся данной, если: а) $R = 2$; б) $R = 5$; в) $R = 7$.

12. Напишите уравнение прямой (систему уравнений, задающую прямую), которая проходит через точку $A(3; -4; 5)$ параллельно прямой, определяемой системой $3x + 2y - z = 4$, $x - 4y - 3z = 7$.

13. Длины трех векторов равны 3, 4 и 5. Все попарные скалярные произведения равны. Наибольший угол между векторами равен 120°. Найдите диагонали параллелепипеда, ребра которого равны и параллельны данным векторам.

14. Используя понятие скалярного произведения, найдите угол между скрещивающимися медианами соседних граней правильного тетраэдра.

Контрольная работа № 5

Вариант 1

1. Найдите координаты середины отрезка AB, где $A(-2; 3; 0)$, $B(1; 4; 6)$.
2. Напишите уравнение сферы с центром в точке $O(-2; 3; -1)$ и проходящей через точку $M(4; -2; 3)$.
3. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1; 1; 2)$, $B(3; 0; 2)$, $C(2; -1; -4)$.
4. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выразите вектор $\overrightarrow{BD_1}$ через векторы $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{D_1C}$ и $\overrightarrow{A_1C}$.
5. Найдите угол между плоскостями $2x - 3y + 4z = 5$ и $-3x + 5z = 3$.

Вариант 2

1. Найдите координаты середины отрезка AB, где $A(3; -3; 1)$, $B(0; -5; 6)$.
2. Напишите уравнение сферы с центром в точке $O(2; -3; -1)$ и проходящей через точку $M(-4; 2; -3)$.
3. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; -1; -2)$, $B(-3; 1; 0)$, $C(5; 1; -4)$.
4. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выразите вектор $\overrightarrow{B_1D}$ через векторы $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{A_1B}$.
5. Найдите угол между плоскостями $3x - y + 5z = 5$ и $-3y + 5z = 3$.

Ответы и указания для учителя

Вариант 1. **1.** $(-0,5; 3,5; 3)$. **2.** $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 77$. **3.** $6x + 24y - 5z - 8 = 0$. **4.** $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{A_1C} - 2\overrightarrow{D_1C}$. **5.** $\arccos \frac{14}{\sqrt{986}}$.

Вариант 2. **1.** $(1,5; -4; 3,5)$. **2.** $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 1)^2 = 65$. **3.** $x + 2z + 3 = 0$. **4.** $\overrightarrow{B_1D} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{DC_1}$. **5.** $\arccos \frac{28}{\sqrt{1190}}$.

Глава 9*
Движения пространства

Данная глава посвящена теме, которой в школе обычно уделяют недостаточное внимание, — теории движений трехмерного пространства. Главная цель при этом — познакомить учащихся с основными положениями теории движений, объяснить ее связь с другими разделами стереометрии и планиметрии. Вся глава имеет пометку «*», т. е. относится скорее к дополнительному материалу (тема движений пространства обычно представлена в непрофильных классах лишь на уровне определений).

Как и во всем курсе геометрии И. Ф. Шарыгина в главе 9 приоритет отдается наглядности и доступности изложения. Однако следует помнить об одной важной особенности движений пространства — для них характерно явное различие между наглядным представлением о «перекладывании» фигур в пространстве и строгим определением движения. Если движения плоскости можно реализовать, передвигая воображаемую модель фигуры, то многие движения пространства таким свойством не обладают. Прежде всего это относится к зеркальной симметрии (подробное объяснение причин приведено в параграфе 9.4) и к центральной симметрии. И потому следует с самого начала обратить внимание школьников на тот факт, что при доказательстве формулы объема треугольной призмы нам уже приходилось использовать равенство тел (призм), получающихся друг из друга при помощи центральной симметрии, которое нельзя обосновать при помощи совмещения моделей этих тел в пространстве.

Методически глава 9 в основном повторяет главу, посвященную движениям плоскости в учебнике 9 класса: сначала даются примеры движений пространства, затем подробно излагаются основные этапы доказательства теоремы классификации движений (теоремы Шаля) и, наконец, описываются способы нахождения композиции различных видов движений. Поэтому перед началом изучения главы 9 желательно вкратце повторить (напомнить школьникам) основные результаты соответствующего раздела планиметрии: что такое движение плоскости и композиция движений, какие существуют движения плоскости и т. п. После этого многие определения из главы 9 будут получаться просто заменой слова «плоскость» на слово «пространство».

При работе с учебником важно помнить, что его материал с избытком покрывает нужды непрофильного, а тем более гуманитарного класса. Во время уроков в таких классах изучаемый материал можно ограничить первыми четырьмя параграфами данной главы (т. е. примерами движений) или даже наглядным описанием движений и несколькими примерами (винтового движения — с обсуждением правила буравчика, знакомого из физики, отражения — на примере изображения в зеркале). С другой стороны, предлагаемый способ изложения достаточно легко «конвертируется» в теоремы и факты, необходимые для работы в математических профильных классах, хотя и не покрывает их целиком: в частности, основная теорема главы — теорема Шаля (классификация всех возможных движений пространства) приведена без доказательства, отсутствует изложение координатного подхода к описанию движений при помощи матриц и т. п.

Порядок изложения материала в главе 9, как уже было отмечено, в основном повторяет принятый в учебнике для 9 класса порядок изложения теории движений плоскости. В параграфе 9.1 дается общее определение движения пространства, композиции движений, тождественного (единичного) движения, обратного движения и т. п. В следующих трех параграфах приводятся примеры различных типов движений: параллельного переноса, вращения вокруг оси, винтового движения, скользящей симметрии, центральной точки. При работе с гуманитарным классом эти параграфы покрывают все затрагиваемые обычно в рамках данной темы вопросы. Далее в параграфах 9.5—9.8 изложены основные этапы доказательства теоремы Шаля, а также приводятся примеры нахождения композиции различных движений (самый сложный пример — это композиция двух вращений относительно скрещивающихся осей; при первом знакомстве с темой, особенно в гуманитарных классах, этот параграф может быть пропущен).

9.1*. Определение движений

9.2*. Вращение вокруг оси и винтовое движение

9.3*. Центральная симметрия и симметрия относительно прямой

9.4*. Зеркальная симметрия и скользящие симметрии

Основными в материале параграфа 9.1 являются определение понятия «движение» применительно к пространству и теорема, определяющая композицию двух последовательных движений так же, как движение пространства.

Далее в параграфах 9.2—9.4 рассмотрены основные виды движений пространства.

Предметные результаты:

— формулировать и иллюстрировать определения: преобразования пространства, композиции преобразований, равенства двух преобразований, неподвижной фигуры (тела) при данном преобразовании;

— формулировать определения и свойства движений пространства, видов движений: центральной и осевой симметрии, симметрии относительно плоскости, винтового движения;

— формулировать: определение равенства двух фигур (тел) на основе движений; определение фигур или тел, симметричных относительно точки, прямой, плоскости; иметь представление о движениях, оставляющих то или иное тело на месте;

— строить образы точки, прямой, плоскости, многогранника, сферы шара и других тел при симметрии относительно точки, плоскости, а также их образы при винтовых движениях; уметь формулировать и понимать правило буравчика;

— (в профильных классах) выводить координатные формулы центральной, плоскостной симметрии пространства и строить образы фигур, пользуясь формулами этих преобразований.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Изложение теории, содержащейся в параграфе 9.1. Задача 1[1].

Задание на дом: задачи 2, 3.

Урок 2. Изложение теории, содержащейся в параграфе 9.2. Задача 4 а.

Задание на дом: задачи 4 б, в; 5.

Урок 3. Изложение теории, содержащейся в параграфе 9.3. Задача: найти объем общей части единичного правильного тетраэдра $ABCD$ и его образа при симметрии относительно: а) середины высоты; б) точки пересечения высот.

Задание на дом: задачи 6, 7.

Урок 4. Изложение теории, содержащейся в параграфе 9.4. Задачи: 2 (повторение); найти, для каких из изучавшихся ранее движений всегда существует «перекладывание», совмещающее тело и его образ относительно движения.

Задание на дом: задачи 8, 9.

Указания к решению задач учебника

1. Невозможность совмещения тетраэдров $ABCD$ и $A'B'C'D'$ при помощи «перекладывания» можно обосновать, например, следующими рассуждениями. В силу условия, что длины всех ребер тетраэдра различны, при совмещении треугольник ABD должен совпасть с треугольником $A'B'D'$, треугольник ACD — с треугольником $A'C'D'$ и т. д. Однако при таком «перекладывании» не может нарушаться правило буравчика, следовательно, направление обхода треугольников ABD и $A'B'D'$, задаваемое указанным порядком точек при взгляде соответственно со стороны точки C и C', должно быть одинаковым (по часовой стрелке или против часовой стрелки). Но это не соответствует действительности, следовательно, предположение о возможности совмещения тетраэдров путем их «перекладывания» неверно.

2. Напомним, что, согласно данному в тексте определению, равные фигуры (тела) — это фигуры, которые совмещаются движением пространства.

[1] Задачи см. после параграфа 9.4.

Пусть F и F' — равные фигуры, а g — движение, совмещающее их. Пусть движение h переводит F в G, а F' — в G'. Тогда композиция hgh^{-1} (тоже являющаяся движением) переводит G в G'. Следовательно, по определению, тела G и G' равны. Заметим, что нет никакой необходимости считать, что движение, переводящее F в G, совпадает с движением, совмещающим F' и G', т. е. на самом деле верно и более общее утверждение: какое бы движение мы ни применяли к каждому из равных тел, они останутся равными.

3. Проще всего убедиться в этом напрямую, выбрав произвольную точку пространства и применив к ней указанные движения сперва в одном, а после — в обратном порядке.

4. а) Движение, переводящее в себя правильный тетраэдр, однозначно задается индуцируемой им перестановкой вершин. Нетрудно убедиться и в том, что любая перестановка может быть реализована таким способом. Следовательно, существуют ровно 24 таких движения, которые несложно перечислить: это тождественное преобразование, повороты вокруг прямых, содержащих высоты тетраэдра, на углы 120° и 240°, повороты вокруг отрезков, соединяющих середины скрещивающихся ребер (они называются бимедианами) на углы 180°, отражения относительно бисекторных плоскостей двугранных углов тетраэдра и, наконец, движения, равные композиции отражения относительно плоскостей, являющихся серединными перпендикулярами к бимедианам, и поворотов вокруг этих бимедиан на углы 90° или 270°. Несложно проверить, что перестановки вершин тетраэдра, индуцируемые этими движениями, различны.

б*), в*) Количество движений, переводящих в себя куб, равно 48 и равно количеству движений, переводящих в себя октаэдр. В случае куба проще всего понять это, вписав в него два правильных тетраэдра (если куб имеет вершины $ABCDA'B'C'D'$, то указанные тетраэдры — $ACB'D'$ и $BDA'C'$). Тогда любое движение, сохраняющее куб, должно или переводить каждый из тетраэдров в себя, или менять их местами. Движений, сохраняющих тетраэдр, как мы знаем из предыдущей части задачи, 24, тогда всего движений, переводящих куб в себя, не более 48 (то, что все они реализуются, легко проверить). То, что движений, сохраняющих октаэдр, столько же, можно понять, рассмотрев октаэдр с вершинами в центрах граней только что рассмотренного куба.

5. Ответ можно получить, рассмотрев решение предыдущей задачи (напомним, что движением куба называется произвольное движение пространства, переводящее куб в себя).

6. Задача сводится к нахождению плоскости серединного перпендикуляра к отрезку AB. Проще всего искать ее, записав в общем виде формулы расстояния от общей точки $M(x; y)$ до точек A и B и приравняв их друг другу.

7. Если нарисовать указанные точки, то становится видно, что искомая ось — это перпендикуляр к плоскости ABC, проходящий через начало координат.

8. Нет, не для любых: чтобы такое вращение существовало, необходимо (и достаточно), чтобы расстояния от A и B до C были равны. В самом деле, если l — ось искомого вращения, то перпендикуляры, опущенные из A и B на l, имеют общее основание и равны между собой. Отсюда следует равенство отрезков AC и BC. Наоборот, если $AC = BC$, то поворот на угол ACB вокруг перпендикуляра к плоскости ABC, проходящего через C, переводит A в B.

9.5*. Разложение движений в композицию зеркальных симметрий

9.6*. Композиция двух зеркальных симметрий

9.7*. Композиция двух вращений

9.8*. Композиция поворотов вокруг скрещивающихся прямых

Данная группа параграфов посвящена изучению композиций различных видов движений пространства.

Предметные результаты:

— находить неподвижные фигуры при различных симметриях и корректно обосновывать существование центра (плоскости, оси) симметрии данной геометрической фигуры;

— используя куб, правильный тетраэдр, правильные призмы, применять различные симметрии при решении стереометрических задач на доказательство, построение и вычисление, обосновывая при этом утверждения логического и вычислительного характера.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Изложение теории, содержащейся в параграфе 9.5. Задача 4[1].

Задание на дом: задачи 3, 5 а, в.

Урок 2. Изложение теории, содержащейся в параграфе 9.6. Задачи 5 а— г.

Задание на дом: задача 6 (для пунктов а, б предыдущей задачи 5).

Урок 3. Изложение теории, содержащейся в параграфе 9.7. Задача: найти композицию поворотов вокруг диагоналей куба на углы 120°.

Задание на дом: задачи 1, 7.

Урок 4. Изложение теории, содержащейся в параграфе 9.8. Задачи: 2; найти композицию двух поворотов на 180° вокруг скрещивающихся ребер единичного куба.

Задание на дом: задачи 8, 9, 10.

Указания к решению задач учебника

1. Композиция указанных поворотов равна повороту вокруг прямой, параллельной данным, на угол, равный сумме $\varphi + \psi$. Чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться разложением вращения в композицию двух зеркальных симметрий, выбрав одну из плоскостей равной плоскости, натянутой на данные параллельные прямые.

2. Эта композиция равна винтовому движению (в обобщенном смысле, если рассматривать парал-

---

[1] Задачи см. после параграфа 9.8.

лельный перенос в качестве винтового движения с нулевым углом поворота): все рассуждения, использованные в параграфе 9.7 при рассмотрении композиции двух поворотов вокруг скрещивающихся осей, дословно переносятся на этот случай.

3. Рассмотрите произвольную точку пространства. Утверждение сводится к тому, что поворот вокруг прямой, перпендикулярной плоскости, переводит плоскость саму в себя, а значит, не меняет расстояния от точки до нее. Аналогичным образом отражение переводит прямую, перпендикулярную плоскости, в саму себя, а значит, не меняет расстояние от любой точки пространства до этой прямой.

4. Центральная симметрия может быть представлена в виде композиции отражения относительно плоскости, проходящей через центр симметрии, и поворота на угол 180° вокруг прямой, перпендикулярной этой плоскости и тоже проходящей через центр симметрии. Отметим, что такая пара (плоскость и перпендикуляр к ней) может быть выбрана произвольным образом. Доказательство может быть получено при рассмотрении образа произвольной точки: оба рассматриваемых движения не меняют расстояние до центра симметрии и переводят прямые, проходящие через него, в себя.

5. а) Указанные в задаче плоскости параллельны. Следовательно, композиция равна параллельному переносу на вектор (16; 40; 0), перпендикулярный обеим плоскостям, равному удвоенному расстоянию между плоскостями.

б) Композиция равна повороту на 180° вокруг биссектрисы 2-го и 4-го квадрантов: указанные плоскости перпендикулярны и пересекаются как раз по указанной прямой.

в) Поворот на –90° вокруг оси Ox (обоснования те же, что и раньше).

г) Композиция равна повороту вокруг прямой, натянутой на вектор (–1; –1; 1), на угол 2 arccos (1/4). Если воспользоваться конструкцией из параграфа 9.2, то можно заметить, что рассматриваемая композиция равна композиции отражений относительно плоскостей $x + y = 0$ и $y + z = 0$. Далее остается только найти прямую, по которой эти плоскости пересекаются, и угол между ними.

6. См. предыдущую задачу.

7. Данные тетраэдры не могут быть совмещены движением, например, потому, что длины ребер первого из них в два раза больше длин ребер второго, и следовательно, совместить все ребра невозможно.

8. Определение гомотетии в пространстве дословно повторяет соответствующее определение для плоскости (см. учебник для 9 класса): гомотетия с центром O и коэффициентом k — это преобразование, переводящее произвольную точку A в такую точку A', что $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$. Обратите внимание на то, что допустимы и отрицательные коэффициенты. То, что при этом фигуры переходят в подобные себе, следует из сравнения длин всех отрезков — они изменяются в k раз.

9. Если две данные сферы концентричны, то существует единственная совмещающая их гомотетия с центром в их общем центре и коэффициентом, равным отношению радиусов. В самом деле, любая гомотетия, очевидно, переводит сферу в сферу, при этом центр сферы переходит в центр ее образа. С другой стороны, нетождественная гомотетия имеет единственную неподвижную точку — свой центр, поэтому в указанном случае центр гомотетии совпадает с центром сфер. Если же сферы неконцентрические, то таких гомотетий две: одна — с центром в точке пересечения общих внешних касательных плоскостей (в вершине конуса, все образующие которого касаются обеих сфер) и коэффициентом $k = r/R$ (где r и R — радиусы сфер), а вторая — с вершиной в точке пересечения общих касательных плоскостей таких, что сферы лежат по разные стороны от них (центр — вершина конуса, все образующие которого касаются одной из сфер, тогда как их продолжения по другую сторону от вершины касаются второй сферы) и коэффициентом $k = -r/R$. Отметим, что обе эти точки лежат на линии центров данных сфер. Чтобы доказать это утверждение, достаточно заметить, что коэффициент гомотетии по модулю всегда равен отношению радиусов. Далее надо просто найти точки, гомотетия относительно которых с таким коэффициентом переводит один из центров сфер в другой.

10. а) Указанные сферы — концентрические. Следовательно, совмещающая их гомотетия имеет центр в точке $O(0; 0; 0)$ и коэффициент 3.

б) Сферы не концентрические, значит, согласно предыдущей задаче, существует две гомотетии: первая — с коэффициентом 3 и центром в точке $(-2,5; 0; 0)$, а вторая — с коэффициентом -3 и центром в точке $(1,25; 0; 0)$.

Итоговая контрольная работа

Вариант 1

1. Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды плоскостью, содержащей ее боковое ребро и середину противоположной стороны основания, если боковое ребро равно 4, а сторона основания равна 3.

2. Найдите объем цилиндра, центры основания которого совпадают с противоположными вершинами единичного куба, остальные вершины которого лежат на боковой поверхности этого цилиндра.

3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 7. На ребрах AB, BC и CC_1 взяты точки K, P и M соответственно так, что $AK = 3$, $BP = 3$, $CM = 2$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки K, P, M. Определите вид сечения. Найдите его сторону, принадлежащую грани CDD_1C_1.

4. В основании пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 3, CD — высота пирамиды, $CD = 2$. Найдите радиус описанного и вписанного шара данной пирамиды.

5. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 4, а высота равна $2\sqrt{6}$. Через середину стороны основания и середину бокового ребра, не имеющего общих точек с этой стороной, проведена прямая. Найдите длину хорды, образующейся при пересечении этой прямой с описанной около пирамиды сферой.

6. Площади граней ABD и ABC пирамиды $ABCD$ равны 2, а площади граней ADC и BDC равны 3. Двугранные углы с ребрами DA, DB, DC равны между собой. Найдите двугранные углы этой пирамиды.

Вариант 2

1. Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и середину противоположного бокового ребра, если сторона основания равна 3, а боковое ребро равно 4.

2. Высота цилиндра равна 3. Известно, что существует куб, две противоположные вершины которого совпадают с центрами оснований цилиндра, а остальные лежат на боковой поверхности цилиндра. Найдите объем цилиндра.

3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 11. На ребрах AB, BC и CC_1 взяты точки K, P и M соответственно так, что $AK = 4$, $BP = 3$, $CM = 7$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки K, P, M. Определите вид сечения. Найдите его сторону, принадлежащую грани CDD_1C_1.

4. В основании пирамиды $ABCD$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C и катетами, равными 2, CD — высота пирамиды, $CD = 3$. Найдите радиус описанного и вписанного шара данной пирамиды.

5. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 8, а высота равна 6. Через середину стороны основания и середину бокового ребра, не имеющего общих точек с этой стороной, проведена прямая. Найдите длину хорды, образующейся при пересечении этой прямой с описанной около пирамиды сферой.

6. Площади граней ABD и ABC пирамиды $ABCD$ равны 3, а площади граней ADC и BDC равны 2. Двугранные углы с ребрами DA, DB, DC равны между собой. Найдите двугранные углы этой пирамиды.

Ответы и указания для учителя

Вариант 1. **1.** $\frac{3}{4}\sqrt{39}$. **2.** $\frac{2}{3}\pi\sqrt{3}$. **3.** Сечением будет пятиугольник. Искомая сторона равна $\frac{7}{8}\sqrt{73}$. **4.** 2, $\frac{6\sqrt{3}}{8+3\sqrt{3}+\sqrt{43}}$. **5.** $\sqrt{57}$. Боковое ребро пирамиды равно $4\sqrt{2}$, а отрезок, соединяющий середины указанных ребер, равен 4. Пусть искомая хорда делится серединами ребер на отрезки x, 4, y. По теореме о произведении отрезков хорд получаем систему уравнений: $x(4 + y) = 4$, $y(4 + x) = 8$. **6.** Пусть двугранные углы с ребрами DA, DB и DC равны φ, а двугранные углы с ребрами AB, BC и CA соответственно равны α, β и γ. Поскольку сумма площадей проекций трех граней на четвертую равна площади четвертой грани, мы можем записать четыре соотношения: $2 = 2\cos\alpha + 3\cos\beta + 3\cos\gamma$, $2 = 2\cos\alpha + 6\cos\varphi$, $3 = 2\cos\gamma + 5\cos\varphi$, $3 = 2\cos\gamma + 5\cos\varphi$. Из этой системы получаем, что $\beta = \gamma = \varphi = \arccos\frac{3}{7}$, $\alpha = \pi - \arccos\frac{4}{7}$.

Вариант 2. **1.** $\frac{15}{4}$. **2.** 6π. **3.** Сечением будет шестиугольник. Искомая сторона $\frac{4}{3}\sqrt{73}$. **4.** $\frac{\sqrt{17}}{2}$. **5.** $\frac{2}{7}\sqrt{1409}$. **6.** $\alpha = \arccos\frac{2}{3}$, $\beta = \gamma = \varphi = \arccos\frac{1}{4}$.

Повторение

Оставшееся время следует посвятить повторению. В сильных классах можно в полной мере воспользоваться подборкой задач в конце учебника («Дополнительные задачи и задачи для повторения»). Можно также провести тест («Проверь свои знания»). Поскольку в учебнике имеются ответы к итоговому тесту, учителю следует продумать способы контроля самостоятельности его выполнения. Можно, например, дать небольшую выборку заданий, расположенных в случайном порядке. Желательно повторить также курс планиметрии.

Указания к решению дополнительных задач и задач для повторения

1. Сначала следует из листа бумаги изготовить фигуру, показанную на рисунке 20, а затем перегнуть один край на 180°.

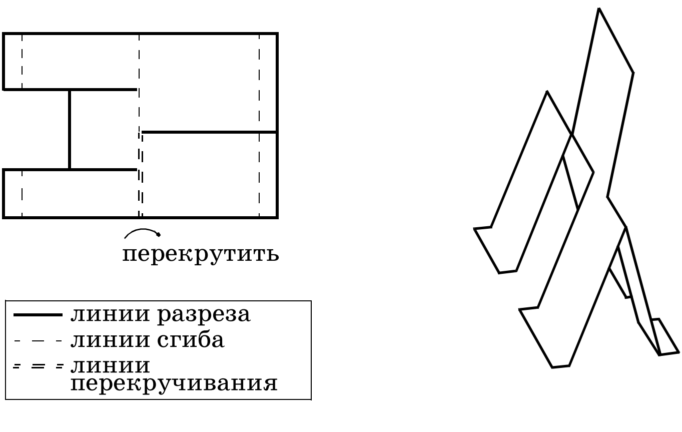

Рис. 20

2. Можно, например, проделать нужное измерение, сложив предварительно три кирпича, как на рисунке 21.

Рис. 21

3. Такой будет, например, ломаная $AKLMDD_1A_1$ на рисунке 22.

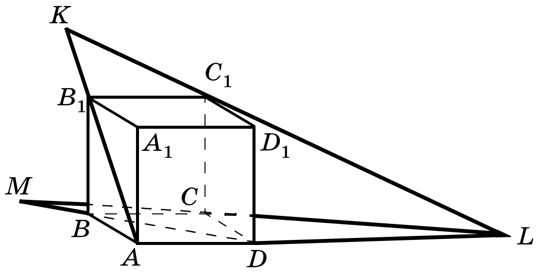

Рис. 22

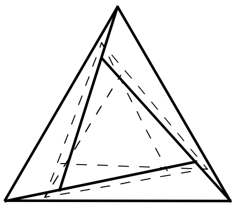

Рис. 23

4. На рисунке 23 изображены основания всех восьми пирамид. Все эти основания лежат в одной плоскости. Пирамиды, чьи основания изображены сплошной линией, имеют общую вершину, расположенную по одну сторону от плоскости оснований, а пирамиды, чьи основания изображены прерывистой линией, имеют общую вершину по другую сторону от плоскости оснований.

5. Рассмотрим правильный тетраэдр. Поместим в его центр O источник света. Рассмотрим четыре трехгранных угла с вершинами в точке O и ребрами, проходящими через вершины тетраэдра. Каждый из этих трехгранных углов содержит одну грань тетраэдра. Нетрудно построить четыре непересекающихся шара, каждый из которых закрывает ровно один трехгранный угол. Шар, закрывающий один трехгранный угол, можно построить, например, так. Сначала построим шар, касающийся ребер трехгранного угла, а затем немного увеличим его радиус. Закрыв один трехгранный угол, другой угол закроем шаром большего радиуса, чтобы он не пересекался с первым, и т. д.

6. Пусть прямые DC и D_1C_1 пересекаются в точке M, а прямые BC и B_1C_1 — в точке K. Плоскости $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ пересекаются по прямой MK. Обозначим через E точку пересечения прямых AB и MK. E является точкой пересечения плоскости $ABBA_1$ с прямой MK. Значит, прямая EB_1 проходит через A_1. Пусть теперь прямые CC_1 и DD_1 пересекаются в точке N, а прямые CB и DA — в точке L. Плоскости BCC_1B_1 и ADD_1A_1 пересекаются по прямой NL. Пусть BB_1 пересекает NL в точке F. Тогда прямая FA также проходит через A_1.

7. Сечением куба могут быть правильный треугольник, четырехугольник и шестиугольник. Правильный шестиугольник получится при сечении куба плоскостью, проходящей через центр куба перпендикулярно одной из его диагоналей (эта плоскость будет пересекать шесть ребер куба в их серединах). В сечении куба не может быть правильный пятиугольник, поскольку у правильного пятиугольника нет параллельных сторон, а любое сечение куба, имеющее вид пятиугольника, имеет две пары параллельных сторон.

8. Пусть S — вершина пирамиды, а A — одна из вершин основания. Из условия задачи следует, что основанием пирамиды является вписанный многоугольник, причем вершина пирамиды проектируется в O — центр описанной около основания окружности. Рассмотрим диаметр SB описанной около пирамиды сферы. Треугольник SAB — прямоугольный, $SO = 4$, SO — проекция SA на SB. По известному свойству прямоугольного треугольника имеем $SB \cdot SO = SA^2$. Отсюда $SB = \frac{25}{4}$. Радиус шара равен $\frac{25}{8}$.

9. Радиус искомого шара равен полуразности радиусов описанной и вписанной сфер тетраэдра.

10. Поскольку радиус вписанного шара для правильного тетраэдра равен четверти его высоты, указанная плоскость перпендикулярна соответствующей высоте и делит ее пополам. Объем тетраэдра эта плоскость делит в отношении $1 : 7$.

11. Указанная плоскость параллельна одной из граней тетраэдра и делит соответствующие ребра в том же отношении, в котором делятся своей точкой пересечения медианы треугольника, т. е. в отношении $2 : 1$. Объем тетраэдра эта плоскость делит в отношении $8 : 19$.

12. Пусть S — вершина трехгранного угла. Возьмем на его ребрах точки A, B и C так, что $SA = SB = SC$. Пусть равны углы ASB и ASC. Из равенства треугольников ASB и ASC следует и равенство их проекций на плоскость BSC, а это означает равенство двугранных углов при ребрах SB и SC. Утверждение задачи следует также из того, что плоскость, проходящая через S перпендикулярно BC, является плоскостью симметрии пирамиды $SABC$.

13. Пусть у трехгранного угла $SABC$ сумма плоских углов ASB и ASC равна 180°. Пусть SC_1 — луч, противоположный лучу SC. В трехгранном угле $SABC_1$ углы ASB и ASC_1 равны. Следовательно (см. предыдущую задачу), равны двугранные углы с ребрами SB и SC_1. Значит, в угле $SABC$ сумма двугранных углов с ребрами SB и SC равна 180°.

14. Из условия следует, что радиус основания конуса в 6 раз меньше образующей этого конуса (длина окружности основания равна дуге сектора в 60° окружности с радиусом, равным длине образующей конуса). Угол при вершине конуса равен $2\arcsin\frac{1}{6} = \arccos\frac{17}{18}$.

15. Пусть M и M_1 — середины AB и A_1B_1 соответственно, а E и E_1 — точки пересечения медиан соответствующих оснований призмы. Задача сводится к ответу на вопрос: в каком отношении прямая MC_1 делит отрезок EE_1? Понятно, что это отношение равно $C_1E_1 : EM = CE : EM = 2 : 1$.

16. Искомое отношение равно отношению объемов пирамид $SBDN$ и $SBDM$. Но объемы этих пирамид равны, поскольку объем каждой составляет половину объема пирамид $SBDC$ и $SBDA$ соответственно. А эти две пирамиды имеют равные объемы.

17. б) Радиус описанного шара равен радиусу окружности, описанной около прямоугольника со сторонами $2a$ и a (диагональное сечение призмы).

18. г) Площадь каждой боковой грани равна $\frac{1}{2}a^2$. Спроектируем на одну из боковых граней все остальные грани пирамиды. Если φ — искомый двугранный угол, то получим уравнение $\frac{1}{2}a^2 = 2\left(\frac{1}{2}a^2\right)\cos\varphi + \frac{1}{2}a^2\cos 60° + a^2\cos 60°$, откуда $\cos\varphi = -\frac{1}{4}$.

д) Радиус описанной сферы равен радиусу окружности, описанной около равнобедренного треугольника, боковые стороны которого равны боковым ребрам пирамиды $\left(a\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, а основание равно диагонали основания пирамиды ($a\sqrt{2}$). Радиус этой окружности равен $\frac{5\sqrt{3}}{12}a$.

е) Радиус вписанной сферы равен радиусу окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной a (таким будет сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину пирамиды перпендикулярно двум противоположным сторонам основания). Этот радиус равен $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

ж) Будем пользоваться методом, описанным в параграфе 4.3. Длина отрезка SK (S — вершина пирамиды $SABCD$, K — середина AB) равна a. Спроектируем его на плоскость SAC. Точка K перейдет в K_1 — середину OA (O — центр основания). Расстояние между диагоналями BD и SK равно высоте, проведенной к гипотенузе SK_1 в прямоугольном треугольнике SOK_1 с катетами $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ и $\frac{a}{4}\sqrt{2}$ $\left(SK_1 = \frac{a}{4}\sqrt{14}\right)$. Это расстояние равно $a\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$. Синус искомого угла равен $\frac{SK_1}{SK} = \frac{\sqrt{14}}{4}$.

19. г) Пусть A, B и C — три соседние вершины основания пирамиды, O — центр основания, M — середина AC, $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, E — вершина пирамиды. Поскольку M — также и середина BO, $BM = \frac{1}{2}a$. Пусть K — проекция M на BE. Так как $\angle EBO = 45°$, то $MK = \frac{\sqrt{2}}{4}a$. $\angle AKM$ равен половине искомого двугранного угла ($\angle AKC$ — линейный угол этого двугранного угла), а его тангенс равен $\frac{AM}{MK} = \sqrt{6}$. Величина искомого двугранного угла равна $2\operatorname{arctg}\sqrt{6}$ $\left(\text{или } \pi - \arccos\frac{5}{7}\right)$.

д) Радиус искомого шара равен радиусу окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием $2a$ и высотой a. Этот треугольник прямоугольный с гипотенузой $2a$. Искомый радиус равен a.

е) Радиус вписанного шара равен радиусу окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием $a\sqrt{3}$ и высотой a.

20. Вершина пирамиды проектируется в центр вписанной в основание окружности. Радиус этой окружности равен $\frac{1}{2}(5 + 12 - 13) = 2$. Значит, высота пирамиды равна $2\sqrt{3}$. Ее объем $20\sqrt{3}$. Для определения радиуса описанного шара воспользуемся методом координат. Пусть вершины данной пирамиды имеют координаты (0; 0; 0), (5; 0; 0), (0; 12; 0), $(2; 2; 2\sqrt{3})$. Поскольку центр описанного шара проектируется в середину гипотенузы, мы знаем первые две его координаты. Пусть третья координата z. Итак, центр шара имеет координаты $\left(\frac{5}{2}; 6; z\right)$. Пусть радиус равен R. Нам достаточно записать два уравнения: $\frac{25}{4} + 36 + z^2 = R^2$; $\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 + (2-6)^2 + (2\sqrt{3} - z)^2 = R^2$, или $42\frac{1}{4} + z^2 = R^2$; $28\frac{1}{4} - 4\sqrt{3}z + z^2 = R^2$. Из этих уравнений найдем $R = \sqrt{\frac{139}{3}}$. Для определения радиуса вписанного шара можно воспользоваться формулой из теоремы 5.6: $V = \frac{1}{3}rS$. Но поскольку площадь проекции боковой поверхности на основание равна площади основания, а все двугранные углы при оснований равны 60°, боковая поверхность в два раза больше площади основания, а вся поверхность равна утроенной площади основания, т. е. равна 90. Радиус вписанного шара равен $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

21. Пусть ABC — основание пирамиды, P — вершина, причем двугранный угол с ребром BC равен 120°. Вершина P проектируется в точку, равноудаленную от прямых, на которых лежат стороны основания. В данном случае это будет точка O — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC. При этом $ABOC$ — параллелограмм, а точка O удалена от сторон основания (от соответствующих прямых) на расстояние, равное $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (это и есть радиус вневписанной окружности, который равен высоте основания). Сторона основания равна $\frac{2}{3}$. Объем пирамиды равен $\frac{\sqrt{3}}{27}$. Для вычисления радиуса описанного шара поступим следующим образом. Обозначим через A_1 диаметрально противоположную A точку описанной около ABC окружности. Плоскость AA_1P проходит через центр описанной около пирамиды сферы. Значит, радиус искомой сферы равен радиусу окружности, описанной около треугольника AA_1P. Имеем $OA_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$,

$$A_1P = \sqrt{A_1O^2 + OP^2} = \frac{\sqrt{31}}{3\sqrt{3}},\ AP = \sqrt{AO^2 + OP^2} = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

По теореме синусов имеем $R = \frac{A_1P}{2\sin\angle PAO} = \frac{A_1P \cdot AP}{2PO} =$ $= \frac{\sqrt{217}}{18}$. Для определения радиуса вписанного шара можно воспользоваться формулой из теоремы 5.6: $V = \frac{1}{3}rS$. Объем мы уже нашли. Надо найти площадь полной поверхности. Площадь основания равна $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

Все боковые грани равновелики. Площадь каждой $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. Полная поверхность равна $\frac{7\sqrt{3}}{9}$. Из равенства $\frac{\sqrt{3}}{27} = \frac{1}{3} r \frac{7\sqrt{3}}{9}$ находим $r = \frac{1}{7}$.

22. Обозначим через P, K и M середины AB, AC и CD соответственно. Имеем: $PK = \frac{1}{2} BC$, $KM = \frac{1}{2} AD$. По неравенству треугольника $PM \leqslant PK + KM$. Отсюда следует утверждение задачи.

23. Радиус окружности, вписанной в ромб, равен $\frac{h}{\sqrt{3}}$. Но радиус этой окружности не превосходит половины стороны ромба, т. е. задача имеет решение, если $h \leqslant \sqrt{3}$. При этом условии объем пирамиды равен $\frac{4h^2}{3\sqrt{3}}$.

24. Если x — радиус искомого шара, то расстояние между центром этого шара и вписанного в куб шара равно $\frac{1}{2} + x$. С другой стороны, это расстояние равно $\left(\frac{1}{2} - x\right)\sqrt{3}$. Из соответствующего уравнения находим $x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

25. Поскольку площади проекций обоих сечений на плоскость основания равны между собой (так как равны площади основания), а площадь проекции равна площади фигуры, умноженной на косинус соответствующего угла, отношение площадей сечений равно $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$.

26. Радиус шара, вписанного в тетраэдр, в 3 раза меньше расстояния от его центра до вершины тетраэдра. Поэтому если r и x соответственно радиусы вписанного в тетраэдр шара и искомого шара, то $(r + x) = 3(r - x)$. Откуда $x = \frac{1}{2} r = \frac{a\sqrt{6}}{24} = \frac{1}{8} a \sqrt{\frac{2}{3}}$.

27. Указанная плоскость проходит на расстоянии $\frac{1}{2}(\sqrt{3}\ -1)$ от вершины куба (считаем, что ребро куба равно 1). Эта плоскость отсекает от куба треугольную пирамиду, у которой один трехгранный угол является углом куба, а соответствующие ребра равны $\frac{1}{2}(\sqrt{3}\ -1)\sqrt{3}$. Объем этой пирамиды равен $\frac{1}{8}(9-5\sqrt{3}\,)$. Искомое отношение равно $\frac{1}{3}(20\sqrt{3}\ +33)$.

28. Рассмотрим единичный куб. Пусть меньший из отрезков диагонали равен $\frac{t}{\sqrt{3}}$, а другой отрезок равен $\sqrt{3}\ -\frac{t}{\sqrt{3}}$. Тогда t определяется из уравнения $x=\frac{t}{3-t}$, откуда $t=\frac{3x}{1+x}$. Указанная плоскость пересекает ребра, выходящие из ближайшей вершины куба, или их продолжения на расстоянии t от вершины куба. Если $t\leqslant 1\left(x\leqslant\frac{1}{2}\right)$, то от куба отсекается треугольная пирамида, у которой три ребра, выходящие из одной вершины, попарно перпендикулярны и равны t. Ее объем равен $\frac{1}{6}t^3$. Отношение объемов равно $\frac{6}{t^3}-1=\frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{x}\right)^3-1$. Этот ответ имеет место при $x\leqslant\frac{1}{2}$. Если же $1<t\leqslant\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}<x\leqslant 1\right)$, то отсекаемое от куба тело можно представить как пирамиду с тремя попарно перпендикулярными ребрами длины t, выходящими из одной вершины, от которой отрезаны три равных пирамиды такого же вида. У этих меньших пирамид перпендикулярные ребра равны $(1-t)$. Объем отсекаемого тела (вернее, меньшего из двух тел, на которые наша плоскость делит куб) равен $\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}(1-t)^3$. Отношение объемов в этом случае равно $\frac{2(1+x)^3+(2x-1)^3-9x^3}{9x^3-(2x-1)^3}$.

29. Поскольку площадь проекции указанного сечения равна площади основания цилиндра и равна $\frac{\pi}{4}$, а угол плоскости сечения с основанием равен 45°, площадь сечения равна $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

30. Расстояние от центра вписанного в правильный тетраэдр шара до его ребра равно половине расстояния между противоположными ребрами этого тетраэдра. Для единичного тетраэдра расстояние от центра до ребра равно $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Радиус вписанного шара равен $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$. Радиус цилиндра равен $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$. Объем цилиндра равен $\frac{\pi}{12}(2 - \sqrt{3})$.

31. Рассмотрим диагональное сечение куба плоскостью, проходящей через указанное ребро куба. Пусть это будет сечение AA_1C_1C, AA_1 — ось конуса, A_1 — его вершина. Пусть A_1M — образующая конуса, принадлежащая сечению. Положим $\angle OA_1C_1 = \varphi$ (O — центр шара). Тогда $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cdot \angle MA_1A = 90° - 2\varphi$, $MA = r = \operatorname{tg}(90° - 2\varphi) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}{2\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $V = \frac{\pi}{24}$.

32. Радиус указанной сферы равен половине расстояния между противоположными ребрами тетраэдра, т. е. он равен $r = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Заданная сфера делится поверхностью тетраэдра на четыре сферических сегмента высотой $h = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$ (высота каждого сегмента равна разности между радиусом рассматриваемой сферы и радиусом вписанной в тетраэдр сферы) и четыре одинаковых криволинейных треугольника. Поверхность каждого сегмента равна $2\pi rh = \frac{\pi}{12}(3 - \sqrt{3})$. Чтобы найти площадь одного криволинейного треугольника, надо из четверти площади сферы вычесть площадь одного сферического сегмента. Получим $\frac{\pi(2\sqrt{3}-3)}{24}$.

33. Пусть r — радиус цилиндра. Проекции трех ребер с общей вершиной на оси цилиндра на ось этого цилиндра одинаковы и равны $\sqrt{a^2 - r^2}$. Следовательно, по крайней мере две из трех вершин, лежащих на поверхности цилиндра, проектируются в одну точку. Если в одну точку проектируются три вершины, то радиус цилиндра равен радиусу окружности, описанной около грани тетраэдра, т. е. он равен $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Пусть в одну точку на оси проектируются две вершины тетраэдра. Обозначим через A, B и C вершины, расположенные на поверхности цилиндра, причем B и C проектируются в одну точку P. Тогда в ту же точку проектируется и середина BC — точка M. При этом MP равно расстоянию от центра окружности радиуса r до хорды длины a. $MP = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2}$. Рассмотрим прямоугольную трапецию $AMPK$ (K — проекция A). В этой трапеции $MP = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2}$, $PK = 2\sqrt{a^2 - r^2}$, $AK = r$, $AM = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Справедливо равенство $AM^2 = PK^2 + (AK - MP)^2$. Подставляя найденные выражения после очевидных преобразований, получим $r = \frac{3}{\sqrt{11}}a$.

34. Радиус цилиндра равен расстоянию между указанными диагоналями (см. задачу 3 в параграфе 4.3). Объем цилиндра равен $a^3\frac{\pi}{3}\sqrt{2}$.

35. В искомом треугольнике высота, проведенная к стороне A_1B, равна расстоянию между A_1B и B_1C (см. задачу 3 из параграфа 4.3).

36. Понятно, что искомая окружность касается сторон соответствующего криволинейного треугольника в серединах образующих его дуг. Пусть O — центр сферы, ABC — один из криволинейных треугольников. Рассмотрим систему координат, положительные направления осей в которой — OA, OB и OC. Середина дуги AB имеет координаты $\left(R\frac{\sqrt{2}}{2}; R\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$. Середина дуги AC имеет координаты $\left(R\frac{\sqrt{2}}{2};\ 0;\ R\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Расстояние между ними равно R. Следовательно, середины дуг образуют треугольник со стороной R. Радиус искомой окружности равен радиусу окружности, описанной около правильного треугольника со стороной R.

37. Пусть прямая AB не параллельна плоскости α и пересекает ее в точке O. Имеем: $OM^2 = OA \cdot OB$. В этом случае искомое геометрическое место точек есть окружность с центром в O и радиусом $\sqrt{OA \cdot OB}$. Если же AB параллельна плоскости α, то искомое геометрическое место является прямой, по которой плоскость, перпендикулярная прямой AB и проходящая через середину AB, пересекается с плоскостью α.

38. Радиус искомого описанного шара равен радиусу шара, описанного около прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b и c, т. е. равен половине диагонали этого параллелепипеда: $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Для определения радиуса вписанного шара можно воспользоваться формулой теоремы 5.6.

39. Из теоремы 5.8 следует, что отношение объемов пирамид $KMPQ$ и $ABCD$ равно $\frac{KM \cdot PQ}{AB \cdot CD} = \frac{1}{15}$.

40. Общая часть есть параллелепипед, ребра которого в 3 раза меньше боковых ребер данной пирамиды. В самом деле, общая часть есть шестигранник, образованный тремя парами параллельных плоскостей, т. е. параллелепипед. Высота пирамиды является диагональю этого параллелепипеда. Три ребра параллелепипеда выходят из вершины пирамиды.

Но плоскость, проходящая через противоположные вершине пирамиды концы этих трех ребер, отсекает от диагонали $\frac{1}{3}$ от нее. Объем параллелепипеда равен $\frac{2}{9}V$.

41. Если $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{6}$, то площадь проекции равна $\frac{a^2}{2}\sqrt{\cos 2\alpha}$; если $\frac{\pi}{6} < \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$, то площадь равна $\frac{a^2}{\sqrt{2}}\sin\alpha$. Отрезок, соединяющий середины соответствующих скрещивающихся ребер, равен $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Пусть x и y — проекции этих ребер на нашу плоскость. Проекция всего тетраэдра является равнобочной трапецией с основаниями x и y и высотой $\frac{a}{\sqrt{2}}$. А поскольку скрещивающиеся ребра правильного тетраэдра и прямая, проходящая через их середины, попарно перпендикулярны, $x^2 + y^2 = a^2$ (углы, образуемые скрещивающимися ребрами с плоскостью, проходящей через их середины, дополняют друг друга до 90°). Боковые стороны этой трапеции и диагонали являются проекциями оставшихся четырех ребер тетраэдра.

Возможны два случая.

1) Боковая сторона трапеции равна $a\cos\alpha$. Это значит, что боковая сторона есть проекция ребра, образующего угол α с данной плоскостью. Понятно, что $\alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$ $\left(\text{поскольку } a\cos\alpha \geqslant \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$. Пусть для определенности $x \geqslant y$. Очевидно также, что $x \leqslant a$. Проекция боковой стороны трапеции на большее основание не больше его половины. Значит, имеет место неравенство $a^2\cos^2\alpha \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4}$, откуда $\alpha \geqslant \frac{\pi}{6}$. Итак, первый случай возможен, если $\frac{\pi}{6} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$. Далее име-

ем $\frac{1}{2}(x - y) = a\sqrt{\cos^2\alpha - \frac{1}{2}}$ (полуразность оснований равнобочной трапеции равна проекции боковой стороны на основание). Тогда $\left(\frac{x + y}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \left(\frac{x - y}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}a^2 - a^2\cos^2\alpha + \frac{1}{2}a^2 = a^2\sin^2\alpha$. Теперь легко найти площадь проекции тетраэдра в этом случае: $\frac{a^2}{\sqrt{2}}\sin\alpha$.

2) Диагональ трапеции равна $a\cos\alpha$. Проекция диагонали на основание равна средней линии трапеции и равна $a\sqrt{\cos^2\alpha - \frac{1}{2}}$. Но $(x + y)^2 \geqslant x^2 + y^2 = a^2$. Значит, имеет место неравенство $\sqrt{\cos^2\alpha - \frac{1}{2}} \geqslant \frac{1}{2}$. Отсюда получим, что $\alpha \leqslant \frac{\pi}{6}$. Площадь трапеции в этом случае равна (после преобразований) $\frac{a^2}{2}\sqrt{\cos 2\alpha}$.

З а м е ч а н и е. Можно воспользоваться следующим утверждением: сумма квадратов проекций ребер правильного тетраэдра на произвольную плоскость постоянна. Если ребро равно a, то указанная сумма равна $4a^2$. Доказать это утверждение можно следующим образом. Сначала докажем, что сумма квадратов проекций ребер куба на произвольную плоскость постоянна и равна $8b^2$, где b — ребро куба. Это сделать нетрудно. Если α, β и γ — углы, которые три попарно перпендикулярные ребра куба образуют с некоторой плоскостью, то с перпендикуляром к этой плоскости ребра образуют углы $90° - \alpha$, $90° - \beta$, $90° - \gamma$. Тогда $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$, а $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$. Значит, сумма квадратов проекций любых трех попарно перпендикулярных ребер куба равна $2b^2$. Рассмотрим правильный тетраэдр с ребром a. Опишем около него обычным образом куб (ребра тетраэдра — диагонали граней куба). Ребро куба равно $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Проекциями граней куба являются шесть попарно равных параллелограммов. Проекциями ребер тетраэдра будут диагонали этих параллелограммов — две различные диагонали для любой пары равных параллелограммов. Из известной теоремы планиметрии, утверждающей, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон, следует, что сумма квадратов проекций ребер нашего тетраэдра равна сумме квадратов проекций описанного куба, т. е. равна $4a^2$. В нашей задаче из доказанного утверждения следует, что у равнобочной трапеции, являющейся проекцией тетраэдра, сумма квадратов боковой стороны и диагонали равна $\frac{3}{2}a^2$. Следовательно, квадрат боковой стороны не превосходит $\frac{3}{4}a^2$ $\left(\text{напомним, что он не меньше чем } \frac{1}{2}a^2\right)$, а квадрат диагонали не меньше $\frac{3}{4}a^2$ (а сама она не больше a). Таким образом, ребро, соответствующее боковой стороне трапеции, может образовывать угол от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{4}$, а ребро, соответствующее диагонали, — угол от 0 до $\frac{\pi}{6}$. Дальше рассуждения такие же, как и в данном решении.

42. Такая пирамида невозможна. Докажем это. Достроим ее до параллелепипеда, проведя через противоположные ребра пары параллельных плоскостей (см. параграф 4.6). Получившийся параллелепипед будет прямоугольным. Диагонали его граней равны 3, 4 и 5. Если a, b и c — его ребра (в порядке возрастания), то $a^2 + b^2 = 9$, $a^2 + c^2 = 16$, $b^2 + c^2 = 25$. Сложим первые два равенства и вычтем третье. Получим $a = 0$.

Другой способ решения. Можно воспользоваться тем фактом, что все грани равногранного тетраэдра (а у нашего тетраэдра все грани — равные треугольники) являются остроугольными треугольниками.

Это следует из того, что плоские углы при каждой вершине равногранного тетраэдра равны соответствующим углам грани. Но сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего. Следовательно, сумма двух углов одной грани больше третьего угла, т. е. этот треугольник — остроугольный.

43. Высота, опущенная на гипотенузу, в данном треугольнике равна 2,4. Расстояние от вершины прямого угла до плоскости p равно $2{,}4\sin\alpha$. Искомые углы равны $\arcsin(0{,}8\sin\alpha)$ и $\arcsin(0{,}6\sin\alpha)$.

44. Сумма площадей проекций боковых граней на основание равна площади основания. По известной теореме о площади проекции сразу получаем, что искомый угол равен $\arccos\frac{1}{6}$.

45. Если O — центр прямоугольника, то по формуле длины медианы для треугольников AMC и BMD имеем: $4MO^2 = 2(MA^2 + MC^2) - AC^2$, $4MO^2 = 2(MB^2 + MD^2) - BD^2$. Но $AC = BD$. Следовательно, $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

46. Учитывая утверждение предыдущей задачи, получим, что расстояние от заданной точки до четвертой вершины прямоугольника равно 0. Значит, указанная точка совпадает с этой вершиной, а стороны прямоугольника равны 3 и 4. Его площадь 12.

47. Пусть $AM = x$. Рассмотрим треугольную пирамиду $AKMA_1$. Объем этой пирамиды равен $\frac{x}{18}$. Шар, вписанный в куб, касается одной грани этой пирамиды и продолжений трех других граней (вневписанный шар). Площади трех граней с общей вершиной A равны $\frac{1}{6}$, $\frac{x}{2}$ и $\frac{x}{6}$. Площадь оставшейся грани равна (см. задачу 20, п. 2 к параграфу 1.7) $\sqrt{\frac{1}{36} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{1 + 10x^2}$. Если мы соединим центр вписанного в куб шара с вершинами нашей пирамиды, то получим четыре пирамиды. Одной гранью каждой из пирамид является грань исходной пирамиды, а высота к этой грани равна радиусу шара, т. е. равна $\frac{1}{2}$. Объем данной пирамиды составляется из объемов указанных пирамид (сумма объемов трех минус объем четвертой). Получаем уравнение $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{x}{2} + \frac{x}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{1 + 10x^2}\right) = \frac{x}{18}$. Из этого уравнения получаем $x = \frac{2}{3}$.

Другой способ решения. Возьмем на ребрах BB_1 и AB точки K_1 и M_1 соответственно так, что $BK_1 = AM_1 = \frac{2}{3}$. Рассмотрим поворот вокруг диагонали CA_1, переводящий K_1 в K. Этот поворот переводит M_1 в точку M' такую, что $AM' = \frac{2}{3}$. С другой стороны, плоскость грани куба AA_1B_1B после поворота перейдет в плоскость AKM'. Следовательно, плоскость AKM' касается вписанного в куб шара и точка M' совпадает с M.

48. Пункт а) доказывается точно так же, как и соответствующая теорема из курса планиметрии о свойстве описанного четырехугольника. Все следует из равенства касательных к шару, выходящих из одной точки.

Докажем пункт б). Обозначим точки касания шара с ребрами AB, BC, CD и DA тетраэдра соответственно через K, L, M и N. Проведем плоскость через точки K, L, M и обозначим через N' ее точку пересечения с ребром DA, а через A', B', C' и D' проекции A, B, C и D на плоскость KLM. Нам надо доказать, что точки N и N' совпадают. Пусть касательные из точек A, B, C и D к шару равны соответственно a, b, c и d. Имеем $\frac{AA'}{BB'} = \frac{a}{b}$, $\frac{BB'}{CC'} = \frac{b}{c}$, $\frac{CC'}{DD'} = \frac{c}{d}$. Перемножая эти равенства, получим $\frac{AA'}{DD'} = \frac{a}{d}$. Но $\frac{AA'}{DD'} = \frac{AN'}{DN'}$, $\frac{AN}{DN} = \frac{a}{d}$. Следовательно, точки N и N' совпадают.

49. Обозначим середину B_1C_1 через K. Введем систему координат с началом в вершине B, взяв в качестве осей лучи BA, BC и BB_1 соответственно. Пусть O — центр искомого шара. Поскольку проекция центра на AB есть середина AB, первая координата точки O равна $\frac{1}{2}$. Чтобы найти вторую координату, спроектируем центр сначала на отрезок KC_1 (это будет середина KC_1), а затем эту точку спроектируем на BC. Итак, вторая координата равна $\frac{3}{4}$. Пусть третья координата центра искомого шара z, а R — его радиус. Запишем два уравнения, исходя из того, что расстояния от O до точек B и $C(0;\ 1;\ 1)$ равны R. Получим $\frac{1}{4} + \frac{9}{16} + z^2 = R^2$ и $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + (z - 1)^2 = R^2$. Вычитая уравнения, сначала найдем z, а затем и $R = \frac{\sqrt{14}}{4}$.

50. Спроектируем параллелепипед на плоскость, перпендикулярную AC_1. При этом точки A и C_1 спроектируются в одну точку. Также в одну точку спроектируются точки K и M, т. е. на проекции эти точки совпадут с точкой пересечения A_1B и B_1C (точнее, их проекций, рис. 24). На этом рисунке A_1C и B_1B параллельны и $A_1C = 2B_1B$. Следовательно, точки K и M делят A_1B и CB_1 в отношении $2 : 1$. Рассмотрим плоскость, проходящую через прямые AC_1 и KM. Пусть эта плоскость пересекает BB_1 в точке P. Имеем $\frac{PM}{MC_1} = \frac{B_1M}{MC} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\frac{MK}{AC_1} = \frac{PM}{PC_1} = \frac{1}{3}$.

51. Проведем плоскость, параллельную основаниям цилиндра, на расстоянии $2r\operatorname{tg}\alpha$ от нижнего основания. Эта плоскость отсечет от нашего цилиндра цилиндр с такими же основаниями и высотой $2r\operatorname{tg}\alpha$. Плоскость, указанная в условии, делит этот цилиндр пополам. Отсюда находим ответ.

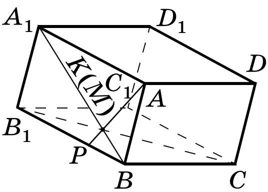

Рис. 24

52. $AD^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})^2$. Раскрывая скобки по правилу возведения в квадрат суммы векторов и учитывая, что угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равен либо 60°, либо 120° (углы между другими парами векторов указаны в условии), получим две возможности (два ответа):

$$AD = \sqrt{65 + 12\sqrt{2}} \text{ или } AD = \sqrt{35 + 12\sqrt{2}}.$$

53. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Возьмем тетраэдр, одно ребро которого совпадает с AB. Поскольку расстояние между центром куба и его ребром равно расстоянию между противоположными ребрами правильного тетраэдра с ребром AB, тетраэдр, описанный в условии, в самом деле является правильным. Пусть O — центр куба. Указанный тетраэдр не выходит за пределы двух четырехугольных пирамид: $OABB_1A_1$ и $OABCD$. Точно так же построим тетраэдры, соответствующие ребрам CC_1 и D_1A_1. Рассмотрев для каждого из них соответствующую пару четырехугольных пирамид, увидим, что эти тетраэдры не пересекаются, поскольку не пересекаются указанные пирамиды.

54. Пусть ребро куба равно 1. Спроектируем куб на плоскость, перпендикулярную его диагонали. В проекции получим правильный шестиугольник со стороной $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (меньшие диагонали этого шестиугольника равны диагоналям граней куба, т. е. равны $\sqrt{2}$). Рассмотрим единичный квадрат с центром в центре шестиугольника. Поскольку половина диагонали этого квадрата равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и равна расстоянию от центра шестиугольника до его сторон (до середин сторон), этот квадрат может быть целиком расположен внутри шестиугольника. Для этого достаточно, чтобы ни одна из его вершин не совпадала с серединой стороны шестиугольника (это можно сделать). Теперь проделаем в нашем кубе отверстие, соответствующее указанному квадрату. Понятно, что через него может пройти единичный куб.

55. Если r — радиус цилиндра, а h — его высота, то $4r^2 + h^2 = 4R^2$. Объем цилиндра равен $V = \pi r^2 h$. Таким образом, нам надо найти наибольшее значение функции $y = r^2h$ или $y^2 = r^4h^2$ при условии, что $4r^2 + h^2 = 4R^2$. Откуда $h^2 = 4(R^2 - r^2)$. После замены $r^2 = R^2x$ задача сводится к определению максимума функции $x^2(1 - x)$ при условии $0 \leqslant x \leqslant 1$.

56. Пусть ребра параллелепипеда x, y и z, где $x + y = 6$, $x + z = 8$ (периметры граней). Тогда его объем равен: $V = xyz = x(6 - x)(8 - x)$. Наибольшее значение объема (максимум функции) достигается при $x = \dfrac{14 - \sqrt{52}}{3}$.

57. Сумма любых двух векторов есть вектор, противоположно направленный сумме двух других и равный ей по длине (каждая из этих сумм есть удвоенный вектор с началом в центре и концом в середине соответствующего ребра).

58. Приведенное в задаче утверждение можно доказать, исходя из физических соображений. Представим себе сосуд в виде рассматриваемого многогранника. Наполним его газом. Давление на каждую стенку сосуда пропорционально площади поверхности соответствующей грани и направлено по перпендикуляру к этой грани. Если бы сумма этих векторов не была равна нулю, то на сосуд действовала бы некая сила, под действием которой сосуд начал бы самопроизвольно перемещаться (если, конечно, газ внутри него находился бы под достаточно большим давлением) и представлял бы собой «вечный двигатель», что невозможно.

Можно и не прибегать к физическим соображениям. Докажем сначала, что для любого треугольника сумма векторов, перпендикулярных его сторонам, равных им по длине и направленных во внешнюю сторону, равна нулю. Рассмотрим три таких вектора. Повернем каждый из них на $90°$ в одну сторону (например, по часовой стрелке). Тогда сумма векторов должна также повернуться на $90°$, а с другой стороны, она станет равной нулю. Вспомогательное утверждение доказано. Теперь нетрудно доказать утверждение задачи для любой треугольной призмы.

Ведь два вектора, соответствующих основаниям призмы, равны по длине и противоположно направлены, т. е. их сумма равна нулю. А для остальных трех векторов можно воспользоваться только что доказанным утверждением для треугольника. (Векторы, перпендикулярные боковым граням, по длине пропорциональны ребру грани, лежащему в основании.) Докажем теперь наше утверждение для треугольной пирамиды. Разрежем треугольную пирамиду на две призмы и две в два раза меньшие треугольные пирамиды, как мы это делали при выводе формулы объема треугольной пирамиды (теорема 5.4). Для каждого из этих многогранников построим указанную сумму векторов. Нетрудно видеть, что эта сумма равна сумме векторов для исходного тетраэдра, ведь все векторы, соответствующие граням, лежащим внутри, взаимно уничтожатся. С другой стороны, все суммы, соответствующие призмам, равны нулю. А для каждой пирамиды соответствующая сумма даст вектор, в 4 раза меньший, чем для исходной пирамиды. Тогда получается, что сумма векторов для всей пирамиды равна половине этой суммы, а это возможно лишь при условии, что данная сумма равна нулю.

Для завершения доказательства остается заметить, что любой многогранник можно разрезать на треугольные пирамиды так, что их внутренние грани являются гранями двух пирамид.

59. Пусть α — острый угол такой, что $\sin\alpha = \frac{13}{15}$. Из условия по теореме синусов следует, что плоский угол при вершине пирамиды равен либо α, либо $180° - \alpha$. Докажем, что $60° < \alpha < 72°$. Из этого будет следовать, что всего пирамид, удовлетворяющих условию задачи, будет четыре: две треугольные с плоскими углами α и $180° - \alpha$, одна четырехугольная и одна пятиугольная.

Для доказательства левой части неравенства достаточно проверить, что $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{13}{15}$. Возводя это неравенство в квадрат, получим $675 < 676$.

Докажем второе неравенство. Можно воспользоваться тем, что тригонометрические функции угла в $72°$ вычисляются. Но при этом возникают очень громоздкие вычисления, поэтому мы поступим иначе. Возьмем на графике функции $y = \sin x$ (аргумент берем в градусной мере) точки A и B, соответствующие аргументам в $60°$ и $90°$. Соединим эти точки отрезком AB. Этот отрезок целиком проходит под нашим графиком. Следовательно, значение ординаты точки на этом отрезке, соответствующее абсциссе в $72°$, меньше синуса этого угла. Отбросив для удобства знак градуса, получаем задачу: на прямой, проходящей через точки $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 60\right)$ и $B(1; 90)$, найти ординату точки с абсциссой в 72. Она легко находится, и задача сводится к проверке простого неравенства $\frac{3\sqrt{3}+4}{10} > \frac{13}{15}$.

60. Обозначим через M и K точки касания окружности, вписанной в треугольник ACD со сторонами AC и AD соответственно. $AK = AM = \frac{1}{2}AC$. Из условия следует, что проекция вершины B на плоскость ACD совпадает с центром вписанной в ACD окружности. Следовательно, $BK = BM$, а также BK и BM перпендикулярны соответственно AD и AC. А поскольку треугольник ABD — прямоугольный с прямым углом при вершине B, $\angle BDK = \angle KBA = \angle MBA = \frac{\alpha}{2}$. Обозначим через φ искомые двугранные углы. Получим $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{BM}{BD} = \frac{BK}{BD} = \sin\frac{\alpha}{2}$.

61. Рассмотрим задачу в общем виде. Возьмем треугольную пирамиду, объем которой равен V, а площади граней S_1, S_2, S_3 и S_4. Четыре плоскости, содержащие грани этой пирамиды, делят пространство на $1 + 4 + 6 = 11$ частей, границами каждой из которых являются все плоскости граней пирамиды. Это соответственно одна часть, состоящая из внутренних точек пирамиды, четыре части, ограниченные одной гранью и продолжениями трех других, и шесть частей, прилежащих к ребрам пирамиды и ограниченных продолжениями всех граней пирамиды. (Есть еще четыре части пространства при вершинах пирамиды, каждая из которых ограничена продолжениями трех граней пирамиды, но плоскость четвертой грани не является ее границей.) Вписанный в пирамиду шар соответствует первой части. Он всегда существует, и его радиус находится по известной формуле $3V = r(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$. Существуют также четыре шара, соответствующие каждой из четырех частей второго типа. Это так называемые вневписанные шары. Для доказательства существования этих шаров можно поступить, например, следующим образом. Рассмотрим трехгранный угол, соответствующий какой-то вершине пирамиды. Впишем в него шар маленького размера. Начнем увеличивать радиус этого шара. В какой-то момент шар коснется противоположной грани. Получим вписанный шар. Будем продолжать увеличивать радиус шара. Он будет пересекать противоположную рассматриваемой вершине грань. Затем наступит момент, когда он этой грани коснется вновь. Получим вневписанный шар. Для вычисления радиуса этого шара соединим его центр со всеми вершинами пирамиды. Получим четыре пирамиды с общим центром в центре шара. Их высоты, опущенные из общей вершины, равны радиусу искомого шара. Площади соответствующих оснований равны площадям граней. Из этих четырех пирамид можно составить исходную, объединив три (понятно какие) и отбросив точки, входящие в четвертую. Получив соответствующие равенства для объема исходной пирамиды, найдем радиусы вневписанных шаров. Например, радиус шара, касающегося четвертой грани и продолжений трех других, может быть найден из формулы

$$3V = r_4(S_1 + S_2 + S_3 - S_4).$$

Посмотрим, существуют ли шары, соответствующие шести последним областям. Рассмотрим область, прилегающую к общему ребру двух последних граней. (Его центр внутри двугранного угла, определяемого гранями S_1 и S_2, и вне угла, задаваемого гранями S_3 и S_4.) Если бы внутри этой области существовал шар, касающийся всех плоских кусков, ограничивающих эту область, то, рассматривая четыре треугольные пирамиды с вершинами в центре этого шара и вершинах исходной пирамиды, мы пришли бы к равенству

$$3V = q(S_1 + S_2 - S_3 - S_4), \qquad (*)$$

где q — радиус этого шара. Понятно, что такое равенство возможно, если $S_1 + S_2 - S_3 - S_4 > 0$. Верно и обратное утверждение: если $S_1 + S_2 - S_3 - S_4 > 0$, то такой шар существует. В самом деле, рассмотрим указанную область и впишем в один из двух ее трехгранных углов шар радиуса q, задаваемого равенством (*). Если расстояние до четвертого плоского куска, ограничивающего эту область, равно x, то, соединив центр этого шара с вершинами пирамиды и рассматривая четыре получившиеся пирамиды, мы пришли бы к равенству $3V = q(S_1 + S_2 - S_3) - xS_4$. Сравнивая это равенство с равенством (*), получим $x = q$. Итак, шар, соответствующий указанной области, существует, если $S_1 + S_2 - S_3 - S_4 > 0$. Но тогда не существует шара, соответствующего противоположной области. Отсюда вывод: если сумма площадей двух граней не равна сумме площадей двух других граней, то существует шар, касающийся продолжений всех граней пирамиды с центром внутри двугранного угла, задаваемого гранями с большей суммой. Если же сумма площадей двух граней равна сумме площадей двух других граней, то не существует шара, касающегося продолжений граней пирамиды с центром внутри двух соответствующих областей третьего типа. Таким образом, шаров третьего типа может быть от 0 до 3.

В нашем случае $V = 1$, $S_1 = 1$, $S_2 = 1{,}5$, $S_3 = 3$, $S_4 = 3{,}5$. Как видим, $S_1 + S_4 = S_2 + S_3$. Следовательно, соответствующий шар не существует и задача имеет семь решений. Соответствующие радиусы равны $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{2}$, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{4}$, 3.

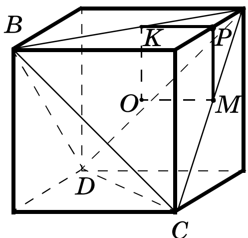

Рис. 25

62. Рассмотрим правильный тетраэдр $ABCD$. Пусть O — его центр, M — середина AC, прямая OM проходит через середину BD. Найдем объем тела, получающегося при вращении тетраэдра $ABCD$ вокруг прямой OM. Пусть K — середина AB. $KO = OM = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, KO и OM перпендикулярны. Рассмотрим квадрат $KOMP$. Отрезок AP перпендикулярен плоскости квадрата $KOMP$ и равен его стороне. Чтобы в этом убедиться, удобно достроить тетраэдр до куба, проведя через каждое ребро плоскость, параллельную противоположному ребру (рис. 25). Тогда P — середина соответствующего ребра куба. Объем тела, получающегося при вращении тетраэдра $KOMA$ вокруг OM, равен половине искомого объема. Для его вычисления можно воспользоваться утверждением задачи 13 из параграфа 6.2. Согласно утверждению этой задачи, объем тела равен сумме объемов цилиндра с высотой $OM = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ и радиусом $OK = = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ $\left(\text{его объем } \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{32}\right)$ и конуса такой же высоты (KP) и такого же, как и цилиндр, радиуса (в три раза меньше объема цилиндра). Объем тела, получающегося при вращении всего тетраэдра, равен $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}$.

63. Обозначим данную пирамиду $ABCD$. Пусть $AD = a$. Из условия следует, что $\angle ABD = \angle ACD = 90°$. Пусть для определенности $\angle BCD = 90°$. Это означает, что DC перпендикулярна плоскости ABC и что $\angle ABC = 90°$. Положим $AB = x$, $CD = y$. Имеем $AC^2 = x^2 + b^2$, $BD^2 = b^2 + y^2$, $x^2 + b^2 + y^2 = a^2$. Объем пирамиды $V = \frac{1}{6}bxy$. Воспользуемся для объема формулой из теоремы 5.7 и приравняем два выражения для объема: $\frac{1}{6}bxy = \frac{2}{3a} \cdot \frac{1}{2}x\sqrt{b^2 + y^2} \cdot \frac{1}{2}y\sqrt{x^2 + b^2}\sin\alpha$. Сделав нужные сокращения, возведем это равенство в квадрат. Получим $a^2b^2 = (b^2(b^2 + x^2 + y^2) + x^2y^2)\sin^2\alpha$. А поскольку $x^2 + b^2 + y^2 = a^2$, получаем (после преобразований) $xy = ab\operatorname{ctg}\alpha$. Значит, объем равен $\frac{1}{6}ab^2\operatorname{ctg}\alpha$.

64. Построить параллелепипед, три ребра которого лежат на трех заданных скрещивающихся прямых, можно следующим образом. Проведем через одну из заданных прямых плоскость, параллельную другой прямой. Тогда точка, в которой эта плоскость пересекает третью прямую, является вершиной искомого параллелепипеда. Но мы предложим иной путь. Рассмотрим призму $ABCA_1B_1C_1$. Построим параллелепипед, три ребра которого лежат на диагоналях AB_1, BC_1 и CA_1. Для этого проведем через CA_1 и середину BB_1 (точку P) плоскость. Обозначим через K и M ее точки пересечения с AB_1 и BC_1 соответственно. Поскольку $\frac{PK}{KA_1} = \frac{PB_1}{AA} = \frac{1}{2} = \frac{PB}{CC_1} = \frac{BM}{MC_1}$, прямая MK параллельна AC_1 и $MK = \frac{1}{3}AC_1$. Итак, ребра искомого параллелепипеда в три раза меньше соответствующих диагоналей граней призмы. Рассмотрим в плоскости треугольника ABC такие точки E и F, что B — середина CE, а $ABFM$ — параллелограмм. В пирамиде $AEFB_1$ площадь основания AEF в три раза больше площади треугольника ABC. Следовательно, эта пирамида равновелика данной призме. Отсюда следует, что объем параллелепипеда, ребра которого равны и параллельны диагоналям граней призмы, равен 6 (объем призмы 1), а объем искомого параллелепипеда в 27 раз меньше.

65. Воспользуемся результатом задачи 21 из параграфа 3.4. $\angle MAC = \frac{1}{2}(\angle DAC + \angle BAC - \angle BAD)$, $\angle MCA = \frac{1}{2}(\angle DCA + \angle BCA - \angle BCD)$. Таким образом, $\angle AMC = 180° - \angle MAC - \angle MCA = \frac{1}{2}(360° - \angle DAC - \angle BAC - \angle DCA - \angle BCA + \angle DAB +$

$+\angle DCB) = \frac{1}{2}((180° - \angle DAC - \angle DCA) + (180° -$ $- \angle BAC - \angle BCA) + \angle DAB + \angle DCB) = \frac{1}{2}(\angle ADC +$ $+ \angle ABC + \angle DAB + \angle DCB)$, что и требовалось.

66. Обозначим через c длину наибольшего ребра тетраэдра. Понятно, что c — гипотенуза в двух равных прямоугольных треугольниках — гранях рассматриваемого тетраэдра. Положим катеты в этих треугольниках равными a и b, причем $a < b$ (докажите, что равенства не может быть). При этом из каждого конца ребра длиной c выходят два ребра длиной a и b. Пусть d — длина оставшегося ребра тетраэдра. Понятно, что у прямоугольных треугольников со сторонами (это две оставшиеся грани) a, b и d гипотенуза равна b, а меньший катет d. Из подобия двух прямоугольных треугольников со сторонами: первый — c (гипотенуза), b (больший катет), a (меньший катет); второй — b (гипотенуза), a (больший катет), d (меньший катет) получаем $\frac{c}{b} = \frac{b}{a} = \frac{a}{d} = \lambda$. Таким образом, $a = \lambda d$, $b = \lambda^2 d$, $c = \lambda^3 d$. По теореме Пифагора $b^2 = a^2 + d^2$, откуда $\lambda^4 = \lambda^2 + 1$, $\lambda^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda^6 = 2 + \sqrt{5}$.

67. Пусть KP — общий перпендикуляр к заданным прямым (K — на прямой AB). Проведем через K прямую, параллельную второй прямой (эта прямая перпендикулярна прямой AB) и возьмем на ней точку M' так, что $KM' = KM$. $\angle AMB = \angle AM'B$. Получаем задачу по планиметрии. Имеется прямой угол с вершиной K. На одной из его сторон взяты точки A и B на расстоянии a и b от вершины. Пусть M' точка на другой стороне, $KM' \leqslant d$. Найдите наибольшее значение угла $AM'B$. Решим эту задачу. Проведем через A и B окружность, касающуюся второй стороны угла. Обозначим через M_0 точку касания со второй стороной. Если $KM_0 = \sqrt{ab} \geqslant d$, то $\angle AM_0B$ и будет искомым наибольшим углом (для любой точки M на второй стороне угла, отличной от M_0, $\angle AMB < \angle AM_0B$). В ином случае искомым будет угол AM_1B, где $KM_1 =$

$= d$. В этом случае окружность, описанная около треугольника AM_1B, вторично пересекает отрезок KM_1 во внутренней точке, и для любой точки M вне этого отрезка $\angle AMB < \angle AM_1B$. Итак, получаем, если $\sqrt{ab} \geqslant d$, то искомый угол равен $\varphi = \angle AM_0B = |\angle AM_0K - \angle BM_0K|$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{|b-a|}{2\sqrt{ab}}$, в противном случае ($\sqrt{ab} \geqslant d$), $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{d|b-a|}{ab+d^2}$. Тогда наибольшее значение угла AMB равно $\operatorname{arctg}\dfrac{|b-a|}{2\sqrt{ab}}$ или $\operatorname{arctg}\dfrac{d|b-a|}{ab+d^2}$.

68. Из условия следует, что расстояние от общего центра заданных сфер до основания цилиндра, вписанного в большую сферу, равно r. Следовательно, радиус оснований цилиндра равен $\sqrt{R^2 - r^2}$. Значит, расстояние от общего центра до основания, вписанного в меньшую сферу, равно $\sqrt{r^2 - (R^2 - r^2)} = \sqrt{2r^2 - R^2}$. Таким образом, задача имеет решение, если $2r^2 - R^2 \geqslant 0$. В этом случае высота цилиндра равна $r \pm \sqrt{2r^2 - R^2}$.

69. Точка A делит ребро двугранного угла на два луча AP и AE. Рассмотрим два трехгранных угла с вершиной в точке A. Ребрами одного являются лучи AP, AB, AC, ребра другого — лучи AE, AB, AC. Пусть точка K находится внутри плоского угла BAP, а точка M — внутри угла BAE. Воспользуемся результатом задачи 21 из параграфа 3.4. Имеем $\angle KAB = \frac{1}{2}(\angle PAB + \angle BAC - \angle PAC)$, $\angle MAB = \frac{1}{2}(\angle EAB + \angle BAC - \angle EAC)$. Сложив эти равенства, получим, учитывая, что $\angle PAB + \angle EAB = \angle PAC + \angle EAC = 180°$, $\angle KAM = \angle BAC$.

70. Из условия следует, что вершина пирамиды проектируется в точку P, равноудаленную от сторон основания (точнее, от прямых, содержащих стороны основания). При этом расстояние от P до сторон основания равно $\dfrac{7}{\sqrt{3}}$. Следовательно, в основании лежит не параллелограмм. Равные стороны являются соседними. Если бы P находилось внутри основания, то площадь основания равнялась бы $(10 + 6)\dfrac{7}{\sqrt{3}} = \dfrac{112}{\sqrt{3}}$. Но площадь основания не больше 60 (она равняется 60, если углы между неравными сторонами равны 90°), а $\dfrac{112}{\sqrt{3}} > 60$.

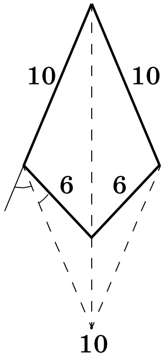

Рис. 26

Следовательно, P расположена вне основания (рис. 26). Соединим точку P с вершинами основания. Получим четыре треугольника с общей вершиной в точке P. Одна сторона каждого — сторона основания, высота в каждом треугольнике из вершины P равна $\dfrac{7}{\sqrt{3}}$. Площадь основания получается, если мы сложим площади двух треугольников и вычтем площади двух оставшихся. Площадь основания равна $(10 - 6)\dfrac{7}{\sqrt{3}} = \dfrac{28}{\sqrt{3}}$. Объем пирамиды равен $\dfrac{196}{3\sqrt{3}}$.

Содержание