Предисловие

Учебник «Геометрия 10—11» И. Ф. Шарыгина является продолжением учебника «Геометрия 7—9». Это настолько очевидно, что об этом можно и не говорить. По этой причине и методика преподавания по этому учебнику почти ничем не отличается от методики преподавания по учебнику «Геометрия 7—9». Об этом «почти» и имеет смысл сказать несколько слов.

Первая глава по сравнению с начальными разделами курса планиметрии выглядит явно перегруженной. Здесь собрана вся теория, относящаяся к взаимному расположению прямых и плоскостей в пространстве, а также все виды параллельности, перпендикулярности и углов. Автор «втиснул» в первую главу 14 определений и 19 теорем, что выглядит явным перебором. Однако, по мнению автора, нет никакой необходимости все эти определения и теоремы тщательно отрабатывать. Все это должно произойти естественным путем позднее, при изучении основных тел, прежде всего многогранников. Прямые и плоскости не должны просто «висеть» в пространстве. Они должны определяться конкретными телами, «опираться» на них. Многогранники появляются уже с первых страниц учебника, именно поэтому автор хотел бы, чтобы учащиеся как можно скорее «покончили» с общими свойствами пространства и перешли к изучению многогранников.

Центральной главой в 10 классе является вторая глава «Многогранники». А центральной темой этой главы — построение изображений многогранников и построения на изображениях многогранников. Главное — развитие пространственного воображения, которое в предыдущие несколько лет не получало достаточного количества упражнений и в лучшем случае «дремало», а в худшем даже деградировало. По сравнению с другими учебниками в этом существенно меньшее количество задач как на доказательство (имеются в виду многочисленные задачи на доказательство очевидных фактов, которые, по странному убеждению, способствуют развитию логического мышления), так и на вычисление (чуть ли не единственным инструментом вычисления во многих вычислительных задачах стандартного типа является теорема Пифагора).

Третья глава «Круглые тела». Автор стремится как можно быстрее завершить знакомство учащихся с основными телами, изучаемыми в школьном курсе, чтобы те как можно быстрее могли начать работать с комбинациями тел, в том числе комбинациями многогранников и круглых тел. Учащиеся должны также научиться правильно изображать круглые тела и работать с их изображениями. Центральной темой этой главы является тема касания круглых тел с плоскостями и прямыми, вписанные и описанные многогранники.

Четвертая глава завершает учебный год. Она занимает особое положение. В слабых классах можно ее не изучать, а заняться повторением (тем более что материала в учебнике и методических указаниях для этого достаточно). В сильных, наоборот, именно эта глава может дать ученикам большой материал для изучения методов стереометрии, позволит заняться решением более интересных и трудных задач.

В данном методическом пособии приведены ответы на наиболее трудные, с нашей точки зрения, задачи из учебника.

Введение

Вначале первой главы автор рассказывает о некоторых особенностях стереометрии, указывает на ее отличия от планиметрии. Первая задача, с которой начинается введение, становится своеобразным символом стереометрии: невозможное на плоскости оказывается возможным в пространстве.

Далее даются рисунки с изображениями невозможного тела и неоднозначного объекта. С одной стороны, цель этих рисунков заинтересовать и даже заинтриговать учащихся, а с другой — показать им, что построение чертежей в стереометрии — дело непростое, требующее знания геометрической теории и правил изображения.

Методические рекомендации к изучению материала

Предполагается, что учащиеся знакомы с простейшими многогранниками (треугольная пирамида, куб и др.) и их изображениями. Тем не менее полезно заготовить альбом с соответствующими изображениями и в ходе беседы обратить внимание на то, как изображаются видимые и невидимые ребра многогранников. Интерес представляет задача 5. Ее решение, видимо, тоже следует заготовить заранее в том же альбоме.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Рассмотреть весь материал введения. Решить задачи 4, 5, 8 (введение).

Задание на дом: задачи 1, 3, 6 (введение).

Указания к решениям задач учебника

1. Сложите спички так, чтобы они образовали каркас куба.

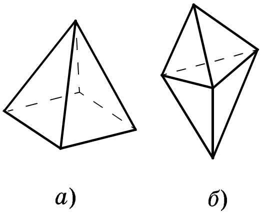


Рис. 1

3. Многогранник с пятью вершинами может иметь 8 ребер (четырехугольная пирамида, рис. 1, *а*) или 9 ребер (рис. 1, *б*).

4. См. рисунок 2.

5. См. рисунок 3, *а, б, в, г, д*. .

7. См. рисунок 4.

8. Многогранник с шестью ребрами — это треугольная пирамида. И вообще, при любом целом k, начиная с 3, k-угольная пирамида (пирамида, в основании которой лежит k-угольник) имеет $2k$ ребер. У каждой пирамиды есть вершина, из которой выходит 3 ребра. Проведя плоскость, пересекающую только три таких ребра,

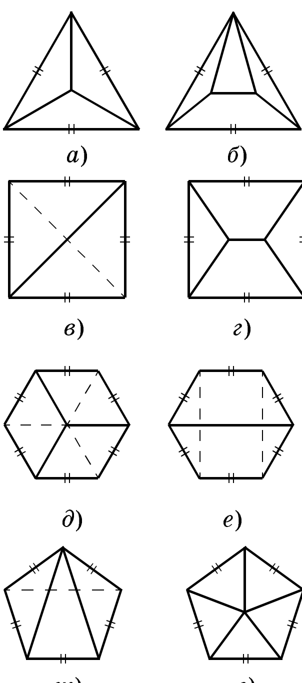


Рис. 2

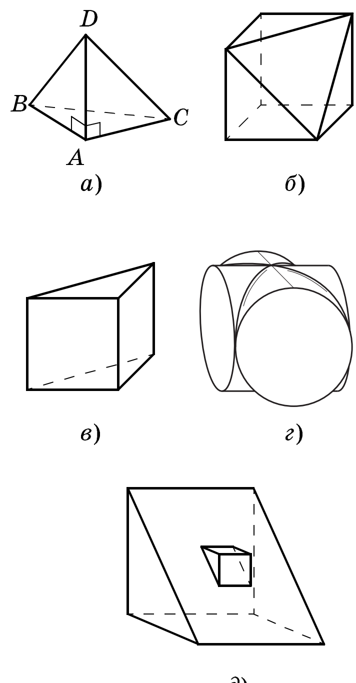


Рис. 3

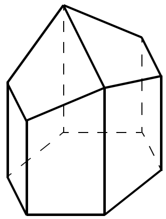


Рис. 4

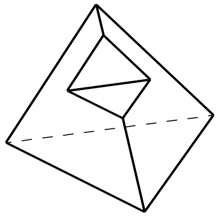


Рис. 5

мы «отрежем» от k-угольной пирамиды треугольную пирамиду и получим многогранник с $2k + 3$ ребрами. Таким образом мы можем получить многогранник с любым нечетным числом вершин, начиная с 9.

9. См. рисунок 5.

10. Среди выпуклых многогранников таких не существует. Если же рассматривать произвольные многогранники (допуская при этом и невыпуклые грани), то это возможно. Этого можно добиться, «вырезая» вдоль ребра некоего многогранника достаточно большое число треугольных пирамид (рис. 5).

Глава 1

Прямые и плоскости в пространстве

В главе 1 изучаются простейшие свойства прямых и плоскостей в пространстве, традиционно относимые к основам стереометрии. Как и в курсе планиметрии, в качестве начальных постулатов формулируются *основные свойства пространства* (термин *аксиома* не используется). В главе определяются понятия параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве и доказываются важнейшие теоремы (свойства и признаки), относящиеся к этим понятиям. По мнению автора учебника, эту главу следует пройти в достаточно сжатые сроки, затратив на нее не более 30 учебных часов. Возможность для этого определяется тем, что изложение материала в учебнике ведется с максимальной опорой на здравый смысл, эмпиризм и наглядность, что позволяет упростить многие доказательства, опуская некоторые логические детали, очевидные с точки зрения здравого смысла и наглядности. Более того, автор считает, что не следует сразу слишком детально отрабатывать теоретический материал первой главы. Есть опасность лишь потерять на этом время и ничего при этом не добиться. Настоящее знание и понимание соответствующих тем у учащихся должно появиться позднее, при изучении свойств многогранников и иных тел, когда по-настоящему начнут «работать» многочисленные определения и теоремы первой главы.

Именно тела, и в первую очередь многогранники, являются основным объектом изучения в курсе стереометрии. В этом — основа авторской концепции. Поэтому простейшие многогранники (прежде всего, единственный «легальный» в начале курса многогранник — треугольная пирамида) появляются уже в самом начале первой главы, и там же учащиеся начинают осваивать методы *построения на изображении,* что в дальнейшем станет одним из основных видов учебной деятельности.

1.1. Основные свойства пространства

В § 1.1 постулируются основные свойства пространства, даются некоторые следствия из этих свойств, доказывается важная теорема — о пересечении двух плоскостей.

В результате изучения параграфа учащиеся должны

знать: формулировки основных свойств пространства, следствий из них, соответствующие обоснования, формулировку и доказательство теоремы 1.1;

уметь: строить изображения простейших многогранников — треугольных пирамид, применять основные свойства пространства, следствия из них и теорему 1.1 для решения простейших задач на построения на изображениях многогранников.

Методические рекомендации к изучению материала

При решении задач о построении сечений на изображениях многогранников следует иметь в виду, что этот вопрос будет подробно рассмотрен в главе 2. Сейчас же следует обратить внимание на практическое применение основных свойств пространства и следствий из них. При этом можно не требовать от учеников подробного объяснения решений этих задач. Если они окажутся слишком сложными, то их даже можно опустить (имеются в виду наиболее сложные случаи), предложив учащимся просто подумать над ними, обещав в будущем к ним вернуться.

При изучении § 1.1 важно обратить внимание, что мы имеем три основных способа задания плоскости (тремя точками, не лежащими на одной прямой; двумя пересекающимися прямыми; прямой и не принадлежащей ей точкой) и два способа задания прямой в пространстве (двумя точками и двумя пересекающимися плоскостями).

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Рассмотреть два основных свойства пространства и следствия из них. Решить задачи 3, 4, 5, 6 из § 1.1 учебника.

Задание на дом: изучить § 1.1 (до теоремы 1.1), задачи 1, 7 а), б), 9 а) из § 1.1 учебника.

Урок 2. Сформулировать и доказать теорему 1.1. Решить задачи 8 б), 7 в), 9 б), в из § 1.1 учебника.

Задание на дом: теорема 1.1, задачи 8 а, 2, 10 из § 1.1 учебника.

Урок 3. Провести опрос по теории. Выполнить самостоятельную работу (сечения).

Указания к решениям задач учебника

1. Эти прямые принадлежат плоскости, задаваемой тремя точками, в которых пересекаются (по две) данные прямые.

2. Если данные точки лежат в одной плоскости, но никакие три не принадлежат одной прямой, то такая плоскость одна. Если данные точки не лежат в одной плоскости, то таких плоскостей четыре. В остальных случаях таких плоскостей бесконечно много.

3. Эта прямая должна пройти через точку пересечения прямых AB и CD.

4. Возьмем две прямые из числа данных. По условию они пересекаются. Рассмотрим плоскость, содержащую эти две прямые. Любая из оставшихся прямых принадлежит этой плоскости, поскольку две ее точки (точки пересечения с двумя выбранными прямыми) принадлежат этой плоскости.

5. Такое сечение невозможно. Это следует из того, что две противоположные стороны этого сечения (изображенные на рисунке сплошной линией) при продолжении пересекаются с продолжением переднего

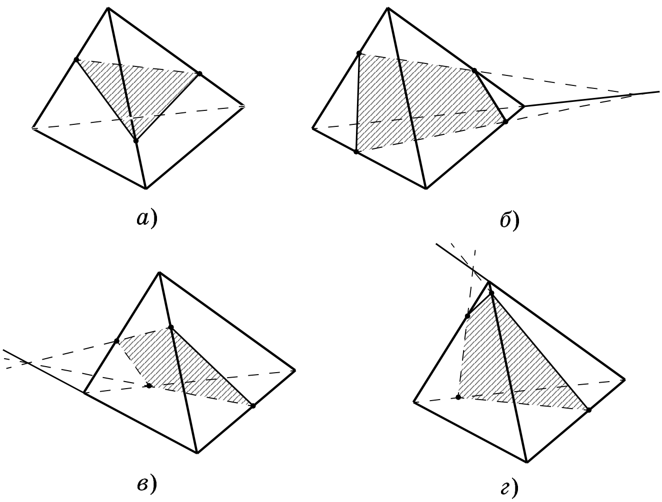


Рис. 6

ребра пирамиды в различных точках, но само ребро не принадлежит плоскости сечения.

6. Точки, лежащие в одной грани, соединяют отрезками, которые продолжают до пересечения с соответствующими ребрами пирамиды. См. рисунок 6.

7. На рисунке 7 показаны этапы построения сечения для случая *б*. Для других пунктов решения аналогичны. (Вообще говоря, именно пункт *б* является самым общим.)

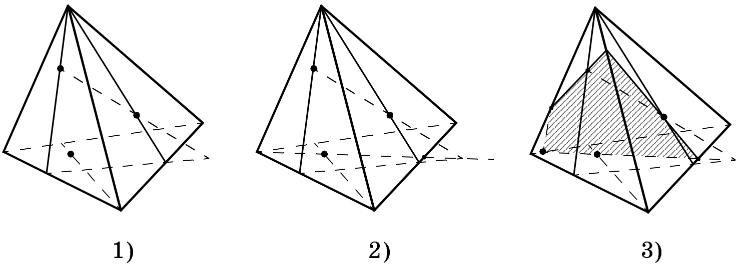


Рис. 7

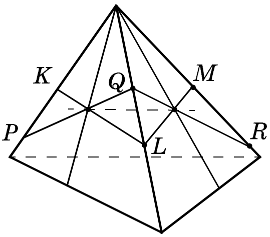
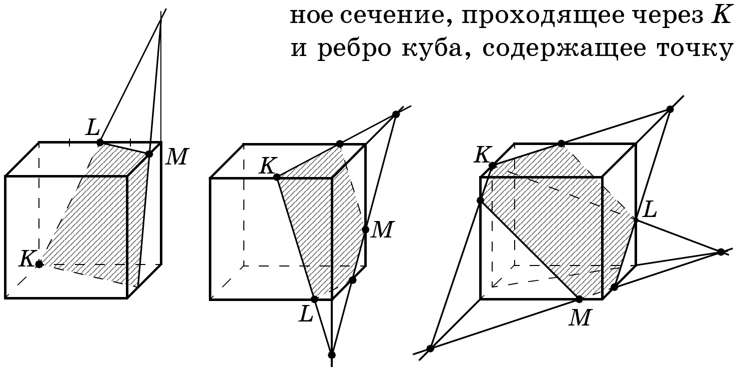


Рис. 8

8. а) Строим точки пересечения KL и PQ, а затем LM и QR. Прямая, определяемая построенными точками, является искомой (рис. 8).

б) Постройте сначала сечения, определяемые указанными точками (см. задачу 6, случай г).

9. См. рисунок 9, *а, б, в*. Для случая в, построив вспомогательное сечение, проходящее через K и ребро куба, содержащее точку



а) *б*) *в*)

Рис. 9

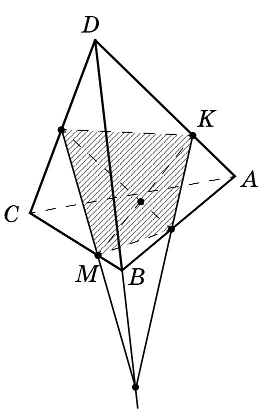


Рис. 10

L, найдите точку пересечения прямой KL с плоскостью нижнего основания. Соединив эту точку с M, построим отрезок, по которому наше сечение пересекает нижнюю грань куба. И т. д.

10. Сначала надо построить сечение, проходящее через точки K, M и середину DC. Искомая точка — точка пересечения прямой KM и прямой, проходящей через середину DC и точку пересечения ребра AB с плоскостью сечения (обе прямые лежат в плоскости сечения). См. рисунок 10.

Дополнительные задачи

1. Имеются плоский четырехугольник $ABCD$ и не лежащий в его плоскости треугольник AMD. По какой прямой пересекаются плоскости BAM и AMD, BCD и CMD? (*Ответ:* AM, CD.)
2. Как при помощи двух нитей столяр может проверить, лежат ли концы четырех ножек стола в одной плоскости?
3. Три различные плоскости имеют общую точку. Верно ли, что эти плоскости имеют общую прямую? (*Ответ:* нет, неверно.)
4. Даны плоскость α и прямоугольник $ABCD$. Может ли плоскости α принадлежать: а) ровно одна вершина прямоугольника; б) ровно две его вершины; в) ровно три его вершины? (*Ответ:* а) да; б) да; в) нет.)
5. Даны две пересекающиеся прямые. Всегда ли третья прямая, имеющая с каждой из данных прямых общую точку, лежит в плоскости, определяемой данными прямыми? (*Ответ:* нет. Она может проходить через точку их пересечения.)

1.2. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве

В этом параграфе даются определения следующих понятий: параллельности прямых в пространстве, параллельности прямой и плоскости, параллельности двух плоскостей, скрещивающихся прямых. Доказывается шесть теорем о свойствах и признаках параллельности в пространстве.

Следует обратить внимание учащихся на то, что у нас появились новые возможности для задания плоскости (помимо трех основных): парой параллельных прямых, точкой и параллельной плоскостью и другие. Кроме того, мы можем указать все случаи взаимного расположения пар прямых в пространстве (параллельные, скрещивающиеся, пересекающиеся), прямой и плоскости (принадлежность, пересечение, параллельность), двух плоскостей (пересечение и параллельность).

Учащиеся должны

знать: определения параллельных прямых, прямой, параллельной плоскости, параллельных плоскостей, скрещивающихся прямых и соответствующие признаки; формулировки всех теорем, понимать доказательства (в более сильных классах воспроизводить доказательства самостоятельно); все случаи взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве;

уметь: находить параллельные прямые, прямые и плоскости, пары параллельных плоскостей, скрещивающиеся прямые на моделях и изображениях простейших многогранников (пирамида, куб и пр.), применять признаки и свойства параллельности при решении задач.

Методические рекомендации к изучению материала

Теоретический материал параграфа можно дать единым блоком, вначале ограничившись, по существу, лишь формулировками определений и признаков, а затем перейти к изучению доказательств. Для закрепления материала предлагаем набор дополнительных упражнений, поскольку в самом учебнике простых заданий «на отработку» недостаточно. К решению достаточно объемных задач, данных в конце параграфа, следует приступить после изучения всей теории параллельности.

Примерное планирование изучения материала

Уроки 1—3. Изучение теоретического материала (определения и теоремы со 2-й по 7-ю), закрепление теории, решение дополнительных задач.

Уроки 4—6. Решение задач из § 1.2 учебника.
Урок 4. Решить задачи 1, 2, 3, 4, 7.
Задание на дом: задачи 5, 6 учебника.
Урок 5. Решить задачи 8, 9, 10, 12.
Задание на дом: задачи 11, 13 учебника.
Урок 6. Решить задачи 14, 15, 17, 20.
Задание на дом: задачи 16, 18, 19 учебника.

Указания к решению задач учебника

1. Утверждение следует из признака параллельности прямой и плоскости (теорема 1.4) и из свойства средней линии треугольника: отрезок, соединяющий середины AD и BD, является средней линией треугольника ABD и параллелен AB.

2. Утверждение следует из признака параллельности двух плоскостей (теорема 1.5) и свойства средней линии (см. предыдущую задачу).

3. Заданные параллельные прямые определяют плоскость. Эта плоскость пересекает заданные параллельные плоскости по параллельным прямым. Следовательно, противоположные стороны получившегося четырехугольника попарно параллельны, а значит, этот четырехугольник — параллелограмм.

4. По свойствам средней линии треугольника отрезки, соединяющие середины AB и BC, а также середины AD и DC, параллельны AC и равны половине AC. Значит, эти отрезки равны и параллельны, и по соответствующему признаку указанный в условии четырехугольник является параллелограммом.

5. Искомое геометрическое место есть плоскость, параллельная данной плоскости. Это следует из утверждения задачи 2 и из единственности плоскости, параллельной данной и проходящей через данную точку.

6. Искомое геометрическое место есть плоскость, параллельная данным и проходящая через середину одного (любого) отрезка с концами на заданных плоскостях. Докажем это. Рассмотрим фиксированный отрезок AB с концами на заданных плоскостях, а MN — произвольный отрезок. Плоскость, проходящая через середину AB и параллельная данным плоскостям, проходит через середину AM (считаем, что A и M — в различных плоскостях). Это следует из теоремы 1.3 и свойств средней линии треугольника. Затем точно так же получаем, что эта плоскость проходит через середину MN.

7. Как известно (задача 4), середины четырех указанных отрезков служат вершинами параллелограмма. Из этого следует утверждение задачи.

8. Из условия следует, что любые две прямые либо параллельны, либо пересекаются. Предположим, что прямые 1 и 2 пересекаются в точке A. Предположим, что какая-то из двух оставшихся прямых (прямая 3) не проходит через точку A. Тогда эта прямая должна принадлежать плоскости, определяемой прямыми 1 и 2. Далее получаем, что и прямая 4 принадлежит этой же плоскости, что противоречит условию. Значит, в этом случае (когда две прямые пересекаются) все прямые проходят через одну точку (точку A). Если же никакие две из данных прямых не пересекаются, то из условия получаем, что все они попарно параллельны.

9. Пусть l_1 и l_2 — две скрещивающиеся прямые, A — точка на прямой l_2, проведем плоскость через l_1 и A, а в этой плоскости прямую l, параллельную l_1. Плоскость, проходящая через l и l_2, по теореме 1.4, параллельна прямой l_1. Точно так же докажем, что через l_1 можно провести плоскость, параллельную l_2.

10. Обозначим через c прямую, по которой пересекаются проведенные плоскости. Прямая c не может быть скрещивающейся ни с прямой a, ни с прямой b. Предположим, она параллельна одной из них, например, прямой a. Тогда плоскость, проходящая через b и c, будет параллельна прямой a (теорема 1.4), что противоречит условию: точка M не лежит в этой плоскости.

11. Поскольку прямая AB параллельна CD, то линия пересечения плоскостей ABE и CDE — прямая l параллельна AB (теорема 1.6). Точно так же получаем, что прямая p параллельна BC. Следовательно, угол между прямыми l и p — прямой.

12. Указанная плоскость пересекает плоскость ABC по прямой, параллельной AB. Значит, она делит AC в отношении $1:2$ (от вершины A). В таком же отношении эта плоскость будет делить и медиану к стороне CD в треугольнике ACD.

13. Докажите, что эта плоскость параллельна плоскости ACD. Сделать это можно следующим образом. Рассмотрим плоскость, проходящую через точку пересечения медиан одного из трех указанных треугольников и параллельную плоскости ACD, и покажем, что эта плоскость проходит через точку пересечения медиан двух оставшихся треугольников.

14. Рассмотрим плоскость AEF. Эта плоскость проходит через точку M и середину BD — точку K. Следовательно, точка F является точкой пересечения медиан треугольника ABD. Значит, $EF = \frac{2}{3}KM = \frac{1}{3}BC$. Искомое отношение равно $1:3$.

15. Обозначим через L середину KC. ML параллельна BK, а значит, параллельна и PQ. Следовательно, прямые ML и PQ лежат в одной плоскости. В этой же плоскости лежит и точка A. Значит, Q есть точка пересечения прямых AL и FC. Найдем, в каком отношении Q делит отрезок AL. Для этого проведем через L прямую, параллельную AD, и обозначим через N точку ее пересечения с FC. Далее имеем: $\frac{QL}{AQ} = \frac{LN}{AF} = \frac{LN}{FD} = \frac{CL}{CD} = \frac{1}{4}$. Таким образом, $\frac{PQ}{BK} = \frac{PQ}{2LM} = \frac{1}{2}\frac{AQ}{AL} = \frac{2}{5}$.

16. Утверждение следует из того, что любая плоскость, пересекающая более трех граней параллелепипеда, обязательно пересечет хотя бы одну пару параллельных граней.

17. Не может. У любого сечения параллелепипеда, имеющего более пяти сторон, есть параллельные стороны, а у правильного пятиугольника нет параллельных сторон.

18. Указанная плоскость параллельна BC (она проходит через среднюю линию треугольника ABC), значит, она пересекает плоскость BCD по прямой, параллельной BC, и делит ребро CD в том же отношении, что и ребро BD, т. е. это отношение равно 1 : 3.

19. Пусть плоскости 1 и 2 параллельны прямой l и пересекаются по прямой p. Проведем через l плоскость 3, параллельную плоскости 1. Плоскость 3 пересекает плоскость 2 по прямой q, параллельной l (теорема 1.2). Плоскость 2 пересекает параллельные плоскости 1 и 3 по параллельным прямым (теорема 1.3) p и q. Значит, прямые l и p параллельны (теорема 1.7).

20. Обозначим через N точку пересечения плоскости KLM с прямой BC. Нам нужно найти длину отрезка прямой MN, расположенного внутри параллелепипеда (если N лежит на ребре BC, то это будет сам отрезок MN). Проведем через M и N прямые, параллельные AA_1, и обозначим через M_1 и N_1 точки их пересечения с ребрами (или продолжениями ребер) верхней грани. Точка M_1 — середина отрезка A_1L, прямая M_1N_1 параллельна KL. Понятно, что точка N_1 расположена на продолжении ребра B_1C_1, причем $N_1B_1 = \frac{1}{6}A_1L = \frac{1}{3}A_1M_1$. Таким образом, часть отрезка M_1N_1, расположенного внутри параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, составляет $\frac{3}{4}$ от его длины и равна $\frac{3}{2}$ (такой же будет и искомая часть отрезка MN, находящаяся внутри параллелограмма $ABCD$).

Дополнительные задачи

1. Даны скрещивающиеся прямые a и b, точки A и B лежат на прямой a, а точки C и D — на прямой b. Докажите, что прямые AC и BD также скрещиваются.
2. Прямые a и b параллельны. Точки A и B принадлежат прямой a, точки C и D — прямой b. Каким может быть взаимное расположение прямых AC и BD? (*Ответ:* параллельные или пересекающиеся.)
3. Верно ли утверждение, что плоскости параллельны, если какая-то прямая, принадлежащая одной плоскости, параллельна другой плоскости? (*Ответ:* нет, неверно.)
4. Параллельные прямые AB и CD пересекают две пересекающиеся плоскости α и β в точках A, B, C и D (рис. 11). Постройте на данном изображении точку D.
5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 12). Каково взаимное расположение прямых AA_1 и BB_1, AC_1 и BD_1, AA_1 и BD? (*Ответ:* параллельные; пересекающиеся; скрещивающиеся.)
6. Прямая a принадлежит некоторой плоскости, а прямая b пересекает эту плоскость. Каково взаимное расположение прямых a и b? (*Ответ:* скрещивающиеся или пересекающиеся.)
7. Через середины сторон AB и BC треугольника ABC проведена плоскость, не совпадающая с плос-

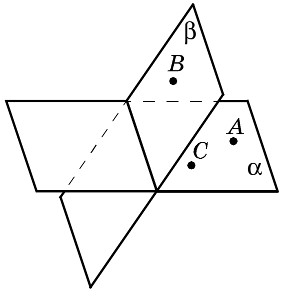


Рис. 11

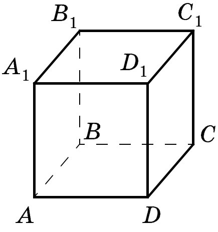


Рис. 12

костью треугольника. Каково взаимное расположение прямой AC и проведенной плоскости? (*Ответ:* параллельные.)

8. Могут ли пересекаться плоскости, параллельные одной и той же прямой? (*Ответ:* да, могут.)

9. Докажите, что если две различные плоскости параллельны третьей плоскости, то эти плоскости параллельны.

10. Даны треугольник ABC и трапеция $ABDE$, не лежащие в одной плоскости (AB — основание трапеции). Как расположены средняя линия трапеции и прямая, проходящая через середины AC и BC? (*Ответ:* параллельны.)

11. Две стороны трапеции параллельны плоскости α. Верно ли, что плоскость трапеции параллельна плоскости α? (*Ответ:* нет.)

12. Через прямую a, лежащую в одной из двух параллельных плоскостей, проведены две плоскости, пересекающие другую плоскость по прямым b_1 и b_2. Докажите, что прямые b_1 и b_2 параллельны.

13. Через точки A и A_1, взятые вне плоскости, проведены прямые AB и AC, A_1B_1 и A_1C_1 так, что AB параллельна A_1B_1, AC параллельна A_1C_1 (B, C, B_1, C_1 — точки пересечения указанных прямых с данной плоскостью). Сделайте чертеж, иллюстрирующий указанную ситуацию. Докажите, что прямая BC либо параллельна прямой B_1C_1, либо совпадает с ней.

14. Верно ли утверждение, что две плоскости параллельны, если две прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым другой плоскости? (*Ответ:* нет.)

15. Докажите, что если плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, параллельны одной и той же плоскости, то они параллельны.

16. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ параллельна плоскости α. Прямые AD и CD пересекают плоскость α в точках M и N. Докажите, что треугольники ABC и MDN подобны.

17. Как расположены по отношению друг к другу две прямые, если известно, что через одну из них можно провести две различные плоскости, параллельные другой прямой? (*Ответ:* параллельны.)

1.3. Угол между скрещивающимися прямыми

В этом небольшом параграфе вводится определение угла между скрещивающимися прямыми. Доказывается теорема о корректности этого определения.

Материал параграфа позволяет включить в учебный процесс весьма распространенный тип стереометрических задач (как школьных, так и конкурсных) на нахождение угла (а несколько позднее и расстояния) между скрещивающимися прямыми. Кроме того, он создает теоретическую базу для введения понятий перпендикулярных прямых и перпендикулярности прямой и плоскости, о которых пойдет речь в следующем параграфе.

Учащиеся должны

знать: определение угла между скрещивающимися прямыми, понимать смысл теоремы о корректности этого определения, воспроизводить ее доказательство;

уметь: пользуясь определением угла между скрещивающимися прямыми, строить на изображениях простейших многогранников плоские углы, равные углам между заданными скрещивающимися прямыми, находить величины этих углов (в простейших случаях).

Методические рекомендации к изучению материала

Следует напомнить учащимся, что в качестве величины угла между пересекающимися прямыми принимается величина наименьшего из плоских углов, образовавшихся при пересечении этих прямых, а угол между параллельными прямыми считается равным нулю.

Необходимо обратить внимание на следствие из теоремы о параллелограммах, так как оно часто используется при решении различных задач.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Теорема 1.8, решение задачи 4 из § 1.3.

Задание на дом: теорема 1.8, задача 1.

Урок 2. Задачи 5, 6 из § 1.3 учебника.

Задание на дом: задачи 2, 3.

Урок 3. Подготовка к контрольной работе, разбор задач, вызвавших наибольшие затруднения в классе и дома.

Задание на дом. Подготовка к контрольной работе.

Урок 4. Контрольная работа № 1.

Указания к решению задач учебника

1. Указанные прямые параллельны AB и BC. Следовательно, угол между ними равен α, если $\alpha \leqslant 90°$, и он равен $180° - \alpha$ в противном случае.

3. Поскольку KM параллельна BC, искомый угол равен $60°$.

4. Возьмем на прямой AB точку E так, что $BE = AB$ (рис. 13). Прямая EC параллельна BD, следовательно, искомый угол равен углу между прямыми KC и EC. Длину отрезка EK нетрудно найти. (Можно, например, сначала по теореме косинусов из треугольника ABK найти косинус угла BAK, а затем по той же теореме для треугольника KAE найти KE.) $KE = 4$. Треугольник KEC — прямоугольный (прямой угол при вершине K). Искомый угол равен $\arcsin \frac{4}{5}$.

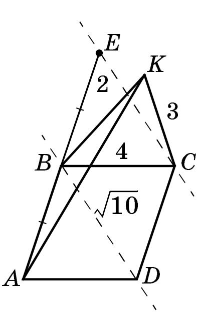


Рис. 13

5. Указанные в условии середины отрезков служат вершинами параллелограмма. По условию диагонали этого параллелограмма равны. Следовательно, этот параллелограмм является прямоугольником, а искомый угол — прямой.

6. Пусть K, L, M, N — соответственно середины AD, DC, CB, BA, $KLMN$ — параллелограмм, стороны которого параллельны прямым AC и BD, равны половинам этих ребер (равны 3 и 5), а диагональ KM равна 7. Задача сводится к нахождению острого угла этого параллелограмма. Этот угол равен $60°$.

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. В треугольнике ABC известны $\angle BAC = 40°$, $\angle BCA = 25°$. $BCKM$ — трапеция с основаниями BC и KM, не лежащая в плоскости треугольника ABC. Какими являются прямые AB и KM? Чему равен угол между ними?

2. Дана треугольная пирамида $ABCD$. На AD взята точка K так, что $AK = 3KD$, на AC — точка M так, что $2AM = 3MC$. Через K и M проведена плоскость, параллельная AB и пересекающая прямые BD и BC в точках P и Q соответственно. Найдите: 1) $MQ : AB$; 2) $KP : AB$; 3) $KP : MQ$.

Вариант 2

1. В треугольнике ABC известны $\angle BAC = 30°$, $\angle BCA = 35°$. $BCPQ$ — трапеция, не лежащая в плоскости данного треугольника. BC и PQ — основания трапеции. Какими являются прямые AB и PQ? Чему равен угол между ними?

2. В треугольной пирамиде $ABCD$ на BD взята точка K так, что $BK : KD = 2 : 1$, на BC — точка M так, что $BM : MC = 3 : 4$. Через K и M проведена плоскость, пересекающая прямую AD в точке F, прямую AC — в точке T и параллельная AB. Найдите 1) $FK : AB$; 2) $MT : AB$; 3) $FK : TM$.

1.4. Перпендикулярность прямой и плоскости

В этом параграфе вводятся понятия перпендикулярности между прямыми, а также между прямой и плоскостью. Доказываются: признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорема о единственности перпендикуляра к плоскости, теорема о двух прямых, перпендикулярных плоскости.

Рассказывается об ортогональном проектировании точек и фигур на плоскость, доказывается минимальное свойство перпендикуляра к плоскости, вводится понятие параллельного проектирования.

Учащиеся должны

знать: определение перпендикулярности между прямыми в пространстве и (особенно важно) — перпендикулярности прямой и плоскости и признак перпендикулярности между прямой и плоскостью; формулировки всех теорем, относящихся к указанным понятиям; определение и свойства параллельного (ортогонального) проектирования;

уметь: доказывать признак перпендикулярности прямой и плоскости; пользуясь признаком, находить плоскость, перпендикулярную данной прямой; находить в пространстве перпендикулярные прямые; делать выводы о свойствах фигур, полученных в результате проектирования данной фигуры.

Методические рекомендации к изучению материала

Различия между плоской и пространственной геометрией в значительной мере определяются именно свойствами перпендикулярных прямых и плоскостей. Многие положения, верные для плоскости, оказываются неверными в пространстве. С другой стороны, в большинстве случаев утверждению плоской геометрии соответствует некий аналог в пространстве. Например, две прямые в пространстве, перпендикулярные одной прямой, не обязательно параллельны (это можно проиллюстрировать с помощью ребер куба), но две прямые, перпендикулярные одной плоскости, — параллельны.

В формулировке признака перпендикулярности прямой и плоскости не требуется, чтобы две прямые плоскости обязательно проходили через точку пересечения рассматриваемой прямой с плоскостью. Зато требуется, чтобы эти прямые не были параллельными. На это следует обратить внимание учащихся и предложить им ответить на вопрос: верна ли теорема 1.9, если в ее формулировке убрать слово «непараллельными»?

При доказательстве теоремы 1.10 о единственности перпендикуляра к плоскости можно счесть очевидным факт существования хотя бы одного перпендикуляра к плоскости, проходящего через заданную точку. При работе в сильном классе замечание к теореме следует рассмотреть и обратить внимание на то, что при построении геометрической теории следует очень внимательно относиться к подобным очевидным утверждениям.

После рассмотрения теоремы 1.13 (основное свойство проекций) и следствий из нее полезно доказать, что при ортогональном проектировании параллельные прямые переходят в параллельные (или одну прямую).

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Определение 6, теоремы 1.9, 1.10.
Задание на дом: теоремы 1.9, 1.10.
Урок 2. Определения 7, 8, теоремы 1.11, 1.12, 1.13.
Задание на дом: теоремы 1.11, 1.12, 1.13.
Урок 3. Решение задач из § 1.4: 3, 5, 7, 8.
Задание на дом: 1, 2, 4, 6.
Урок. 4. Решение задач из § 1.4: 11, 12.
Задание на дом: 10, 15.

Для отработки и закрепления свойств проектирования можно предложить следующие задачи и вопросы.

1. Может ли изображением параллелограмма быть: а) квадрат; б) параллелограмм; в) отрезок прямой; г) трапеция?

2. Может ли изображением равностороннего треугольника быть: а) прямоугольный треугольник; б) тупоугольный треугольник?

3. Может ли равносторонний треугольник являться изображением треугольника, все стороны которого различны?

4. Дано изображение равнобедренного треугольника. Постройте на нем изображение высоты этого треугольника, проведенной к основанию.

5. Постройте изображение центра описанной окружности на изображении правильного треугольника.

6. Могут ли изображением трех точек, не лежащих на одной прямой, служить три точки, лежащие на одной прямой?

7. Может ли длина проекции (ортогональной) быть: а) равной длине отрезка; б) больше длины отрезка; в) меньше длины отрезка? Как изменятся ответы на вопросы, если речь идет о проектировании в заданном направлении?

Указания к решению задач учебника

1. Неверно. Нетрудно построить контрпример.

2. Допустим, что две плоскости, перпендикулярные прямой l, пересекаются. Пусть A — какая-то точка, принадлежащая линии пересечения этих плоскостей. Тогда плоскость, проходящая через l и A, пересекает плоскости, перпендикулярные l, по пересекающимся прямым, каждая из которых перпендикулярна прямой l (определение 6). Это невозможно. (Две прямые плоскости, перпендикулярные третьей прямой этой плоскости, параллельны.)

3. Нельзя. Предположим противное. Возьмем любую точку A пространства и проведем через нее прямые, параллельные данным. Получим четыре попарно перпендикулярные прямые, проходящие через A. Проведем плоскость через две из этих прямых. Тогда получим, что через точку A проходят две прямые, перпендикулярные одной плоскости. Это невозможно (теорема 1.10).

4. Пусть B_1 — проекция B на плоскость α. Треугольник ABB_1 — прямоугольный. По теореме Пифагора $BB_1 = \sqrt{AB^2 - AB_1^2} = \sqrt{3}$.

5. Пусть M_1 — проекция M на плоскость α. Положим $AM_1 = x$, $BM_1 = 3x$, $MM_1 = y$. На основании теоремы Пифагора записываем два равенства: $x^2 + y^2 = 4$, $9x^2 + y^2 = 25$. Вычитая одно уравнение из другого, найдем $x^2 = \frac{21}{8}$, а затем $y^2 = \frac{11}{8}$.

6. Утверждение задачи следует из того, что треугольники ABD и CBD — прямоугольные с прямым углом при вершине B.

7. Утверждение задачи следует из того, что при проектировании сохраняется отношение отрезков, расположенных на одной прямой. В частности, середина отрезка переходит в середину проекции. Значит, медианы треугольника переходят в медианы, а точка пересечения медиан треугольника — в точку пересечения медиан проекции.

8. Если отрезок не пересекает плоскости, то расстояние от середины отрезка до плоскости равно полусумме расстояний от его концов. Если отрезок пересекает плоскость, то указанное расстояние равно полуразности расстояний от концов отрезка. Таким образом, возможны два *ответа:* 2 и 1.

9. Возможны четыре случая расположения треугольника относительно плоскости: все вершины находятся по одну сторону от плоскости и две вершины по одну сторону, а третья вершина — по другую сторону (таких случаев — три). Задача имеет четыре *ответа:* $\frac{5+6+7}{3} = 6$; $\frac{5+6-7}{3} = \frac{4}{3}$; $\frac{5+7-6}{3} = 2$; $\frac{6+7-5}{3} = \frac{8}{3}$.

10. Нельзя, поскольку понятие проекции определяется через понятие перпендикулярности прямой и плоскости.

11. Пусть O — центр параллелограмма $ABCD$. A, B и C — указанные в условии вершины. Поскольку O — середина AC, расстояние от O до указанной плоскости равно либо 3, либо 2, в зависимости от того, как расположены точки A и C — по одну сторону от плоскости или по разные (см. задачу 8). Точки B и O в свою очередь могут быть либо по одну сторону от заданной плоскости, либо по разные. Если x — расстояние от точки D до заданной плоскости, то для определения x имеем четыре соотношения: $\frac{1}{2}|x \pm 3| = 3$ и $\frac{1}{2}|x \pm 3| = 2$. Задача имеет четыре *ответа:* 1, 3, 7 и 9.

12. Обозначим через O середину AC. По свойству равнобедренного треугольника из условия следует, что BO и DO перпендикулярны AC. Значит, плоскость BOD перпендикулярна AC (теорема 1.9). Следовательно, прямая BD перпендикулярна AC (определение 6).

13. Утверждение задачи следует из того, что треугольники ABD и CBD — прямоугольные с прямым углом при вершине B. (Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный. Указанная сторона — его гипотенуза.)

14. Пусть M — проекция B на прямую AC. Плоскость BMD перпендикулярна прямой AC, так как она содержит две прямые, перпендикулярные AC (BM и BD). Следовательно, MD также перпендикулярна AC. По теореме Пифагора имеем $BC^2 - CM^2 = BM^2 = AB^2 - AM^2$, откуда $AB^2 - BC^2 = AM^2 - CM^2$. Аналогично получаем, что $AD^2 - DC^2 = AM^2 - CM^2$. Таким образом, $AB^2 - BC^2 = AD^2 - DC^2$ или $AB^2 + DC^2 =$

$= AD^2 + BC^2 (*)$. Из этого соотношения по данным в задаче найдем $AD = 1$.

15. Докажите, что из соотношения данного в условии следует, что проекции B и D на прямую AC совпадают (см. решение предыдущей задачи, в которой было доказано, что если прямые AC и BD перпендикулярны, то выполняется соотношение (*); аналогично доказывается и обратное: если выполняется соотношение (*), то эти прямые перпендикулярны).

Дополнительные задачи

1. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что ABC_1D_1 — прямоугольник.
2. Могут ли быть перпендикулярными одной плоскости две стороны: а) треугольника; б) параллелограмма; в) трапеции; г) правильного пятиугольника; д) правильного шестиугольника? (*Ответ:* а) нет; б) да; в) да; г) нет; д) да.)
3. Стороны прямоугольника равны 12 и 16 см. Точка M расположена на расстоянии 24 см от плоскости прямоугольника, а ее проекция на эту плоскость совпадает с точкой пересечения диагоналей прямоугольника. Найдите расстояния от M до вершин и до сторон прямоугольника. (*Ответ:* 26; $8\sqrt{10}$ и $6\sqrt{17}$.)
4. В ромбе $ABCD$ со стороной, равной 6, угол ABC равен $120°$. Точка M удалена на расстояние 8 от плоскости ромба и от вершины A. Найдите расстояния от M до остальных трех вершин ромба. (*Ответ:* 10, 10 и $2\sqrt{43}$.)
5. В основании пирамиды $ABCDF$ лежит параллелограмм $ABCD$. M — проекция A на BD. Известно, что $BF = DF$. Докажите, что расстояние от M до середины AF равно половине CF.

1.5. Теорема о трех перпендикулярах

В этом небольшом, но очень важном параграфе рассматриваются две теоремы — о наклонных и их проекциях и теорема о трех перпендикулярах, являющаяся одной из ключевых теорем стереометрии. Именно поэтому в конце предлагается большое количество задач, при решении которых применяется теорема о трех перпендикулярах. Следует также обратить внимание на задачи, в которых рассматривается свойство точки, равноудаленной от вершин треугольника или от его сторон. В дальнейшем (в главе 2) при изучении свойств пирамид эти задачи лягут в основу двух важных теорем.

Учащиеся должны

знать: свойство наклонных и их проекций (формулировка соответствующей теоремы), формулировку и доказательство теоремы о трех перпендикулярах;

уметь: вычислять одну из трех величин — длину наклонной, ее проекцию, длину соответствующего перпендикуляра — по двум другим; применять теоремы 1.14 и 1.15 при решении задач.

Методические рекомендации к изучению материала

Вначале следует напомнить учащимся (и отработать) понятия «наклонная», «перпендикуляр», «проекция».

В тексте учебника термины «наклонная», «перпендикуляр» могут относиться и к прямым, и к отрезкам. В каждом конкретном случае нетрудно понять, о чем идет речь. Учителю не следует заострять внимание учащихся на этих нюансах, следует ограничиться простым упоминанием. В теореме о наклонных под наклонной мы понимаем отрезок, соединяющий точку, не лежащую в заданной плоскости, с точкой плоскости и *не перпендикулярный* рассматриваемой плоскости. (Термин *наклонная* употребляется по отношению к фиксированной плоскости.) В теореме 1.14 утверждение, что равные наклонные имеют равные проекции, относится к наклонным, проведенным из одной точки. На это надо обратить внимание учеников, без этого условия такое утверждение является неверным. (Оно используется лишь для краткости.) Очень часто на практике оказывается полезным следствие из этой теоремы, что бóльшая наклонная имеет бóльшую проекцию и наоборот (при указанном условии). Например, оно используется при доказательстве теоремы 1.16.

При решении задач к § 1.5 используется, в частности, понятие «расстояния от точки до прямой». Определение этого понятия не дается, поскольку прямая и точка определяют плоскость, а определение расстояния от точки до прямой (на плоскости) учащиеся должны знать по курсу планиметрии. Однако задать соответствующий вопрос учащимся и сделать нужные разъяснения следует. (Так же следует поступать и в других аналогичных случаях.)

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Теория § 1.5.
Задание на дом: § 1.5 (теория).
Урок 2. Решить задачи 1, 3, 4, 5.
Задание на дом: задачи 2, 6, 7.
Урок 3. Решить задачи 8, 9, 11.
Задание на дом: задачи 10, 12.
Урок 4. Решить задачи 14, 16.
Задание на дом: задачи 13, 15.

Указания к решению задач учебника

1. Утверждение задачи следует из теоремы 1.14.

2. Пусть K — проекция A на прямую l. По теореме 1.15 (о трех перпендикулярах) BK перпендикулярна l, т. е. K — проекция B на прямую l.

3. См. решение предыдущей задачи. (*Ответ*: $\sqrt{b^2 - a^2}$.)

4. Утверждение задачи следует из теоремы 1.14.

5. Докажите, что любая точка этой плоскости равноудалена от этих точек. Докажите также, что проекция любой точки, равноудаленной от данных, на прямую, проходящую через данные точки, совпадает с серединой соответствующего отрезка.

6. См. задачу 1. Искомый радиус равен $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

7. Проекция M на указанную плоскость равноудалена от прямых m и n (это следует из теорем 1.15 и 1.14). Значит, она лежит на одной из биссектрис между этими прямыми.

8. Утверждение этой задачи следует из предыдущей задачи.

9. Проекция точки M на плоскость удалена от одной из прямых на расстояние $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, а от другой — на расстояние $\sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$. Значит, расстояние между прямыми равно одному из двух значений $4 \pm \sqrt{7}$.

10. Пусть l' — проекция прямой l — касается данной окружности в точке A. По свойству касательной l' перпендикулярна OA, а по теореме о трех перпендикулярах (1.15) l также перпендикулярна OA. Значит, искомое расстояние равно r.

11. Проекция прямой AC_1 на плоскость $ABCD$ — прямая AC перпендикулярна BD. Значит, по теореме о трех перпендикулярах (1.15) и AC_1 перпендикулярна BD.

12. См. задачу 1. $\left(\textit{Ответ}: \sqrt{\dfrac{2}{3}}.\right)$

13. Пусть проекция вершины D пирамиды $ABCD$ на плоскость ABC есть точка H — точка пересечения высот треугольника ABC. Это означает, в частности, что AH перпендикулярна BC. По теореме о трех перпендикулярах получаем, что AD перпендикулярна BC (ведь AH — проекция AD на плоскость ABC). Обозначим через P проекцию B на плоскость ACD. Поскольку BC перпендикулярна AD, то и CP перпендикулярна AD. Рассматривая другую пару ребер CD и AB, точно так же докажем их перпендикулярность, а затем и перпендикулярность NP и AD. Это означает, что P есть точка пересечения высот треугольника ACD.

14. Пусть прямая p пересекает плоскость в точке O, M — некоторая точка на этой прямой, отличная от O. Проведем через O прямые, параллельные данным, и возьмем на них точки A, B и C так, что $OA = OB = OC$ и $\angle MOA = \angle MOB = \angle MOC$. (По условию это можно сделать.) Тогда $MA = MB = MC$. Проекция точки M на плоскость ABC есть центр описанной около ABC окружности (см. задачу 1), т. е. точка O. Отсюда следует утверждение задачи.

15. Рассмотрим пирамиду $ABCD$, все ребра которой равны между собой. Пусть M и K соответственно середины AB и AD. Поскольку MK параллельна BD, угол между CM и BD (медианой грани и скрещивающимся с ней ребром) равен $\angle CMK$. (Этот угол острый, так как треугольник CMK равнобедренный с основанием MK.) $\left(\textit{Ответ:} \arccos \frac{1}{2\sqrt{3}}.\right)$

16. Рассмотрим пирамиду $ABCD$, все ребра которой равны между собой. Для удобства вычислений будем считать, что ребра равны 4. Проведем в грани ABC медиану CM. В грани CBD есть две медианы, скрещивающиеся с CM: DL и BN (рис. 14). Рассмотрим *первый случай*. Пусть P — середина BM. Поскольку PL параллельна CM, угол между CM и DL либо равен углу PLD (если этот угол острый), либо является дополнительным к нему (если этот угол тупой). Все стороны треугольника PLD легко вычисляются. DL есть медиана правильного треугольника со стороной 4. $DL = 2\sqrt{3}$. CM — половина медианы, $CM = \sqrt{3}$. PD находим по теореме Пифагора из треугольника DPM, $PD = \sqrt{13}$. Теперь по теореме косинусов для треугольника DPL найдем косинус угла DLP. Он равен $\frac{1}{6}$.

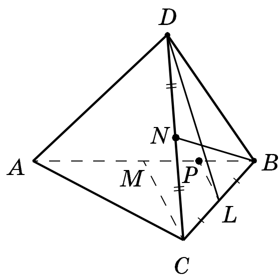


Рис. 14

Второй случай. Пусть Q — середина DM. Угол между CM и BN равен углу BNQ (или является дополнительным к нему). Стороны треугольника BNQ нетрудно вычислить: $BN = 2\sqrt{3}$, $NQ = \sqrt{3}$, $BQ = \sqrt{BM^2 + MO^2} = \sqrt{7}$. Теперь по теореме косинусов находим, что косинус искомого угла равен $\frac{2}{3}$. Проверьте, что медианы, выходящие из вершин A и B треугольника ABD, образуют с CM углы такие же, как и в первом из рассмотренных случаев.

Дополнительные задачи

1. Рассмотрим плоскость α и точку A, не принадлежащую этой плоскости. Пусть B — проекция A на α, а C — проекция B на некоторую прямую l, принадлежащую плоскости α, но не проходящую через B. Докажите, что плоскость, определяемая точками A, B и C, перпендикулярна прямой l.
2. Из некоторой точки A проведены к данной плоскости перпендикуляр AO, равный 1, и две наклонные AB и AC, образующие с перпендикуляром угол $60°$ и перпендикулярные друг другу. Найдите BC. (*Ответ:* $2\sqrt{2}$.)
3. Через точку пересечения диагоналей прямоугольника проведена прямая, перпендикулярная его плоскости. Докажите, что все точки этого перпендикуляра равноудалены от вершин прямоугольника.
4. Из точки A к плоскости α проведены две наклонные, длины которых относятся как 5 : 8. Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если проекции этих наклонных на плоскость α равны 7 и 32 см. (*Ответ:* 24 см.)
5. Катеты прямоугольного треугольника равны 5 и 12 см. Точка O расположена на расстоянии 6 см от плоскости треугольника, а ее проекция на эту плос-

кость совпадает с вершиной прямого угла треугольника. Найдите расстояние от точки O до концов гипотенузы и до самой гипотенузы. $\left(\textit{Ответ:}\ \sqrt{61};\ 6\sqrt{5}\ \text{и}\ \frac{6}{13}\sqrt{269}.\right)$

6. Диагонали ромба равны 12 и 16 см. Точка M удалена от всех сторон ромба на 8 см. Найдите расстояние от M до плоскости ромба. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{32}{5}.\right)$

7. Из вершины A треугольника ABC проведен отрезок AK, перпендикулярный плоскости треугольника. Найдите площадь треугольника BCK, если $AC = AB = 13$, $BC = 10$, $AK = 16$. (*Ответ:* 100.)

8. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Точка M удалена от всех прямых, содержащих стороны треугольника, на расстояние a. Чему может равняться расстояние от M до плоскости треугольника? (*Ответ:* $\sqrt{a^2-1}$; $\sqrt{a^2-4}$; $\sqrt{a^2-9}$; $\sqrt{a^2-36}$. Ответом являются те из этих чисел, которые имеют смысл.)

1.6. Угол между прямой и плоскостью

В этом параграфе вводится понятие угла между прямой и плоскостью. Доказывается теорема о минимальности этого угла. Теоретический материал параграфа достаточно прост и невелик по объему. Основная учебная нагрузка ложится на решение задач.

Учащиеся должны

знать: определение угла между прямой и плоскостью, формулировку и доказательство теоремы о минимальности этого угла;

уметь: указывать углы между прямой и плоскостью на моделях и изображениях простейших многогранников, решать простейшие задачи на нахождение таких углов.

Методические рекомендации к изучению материала

Следует обратить внимание на то, что в этом параграфе речь идет об угле между объектами различной геометрической природы, причем рассматриваемый угол не может быть тупым. Иногда используется также выражение: «угол наклона прямой (отрезка) к плоскости». Несмотря на простоту теоретического материала, он очень важен для изучения свойств многогранников и должен быть хорошо отработан на практике.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Теория § 1.6. Решение задач 1, 3, 4.
Задание на дом: теория, задачи 2, 5.
Урок 2. Решение задач 7, 8, 9.
Задание на дом: задачи 6, 10.

Указания к решению задач учебника

1. Поскольку проекция диагонали куба на плоскость грани есть диагональ грани, то косинус искомого угла равен отношению диагонали грани к диагонали куба, т. е. он равен $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

2. Из определения 9 следует, что искомая проекция равна $d\cos\alpha$.

3. Вершина D этой пирамиды проектируется в центр треугольника ABC — точку O. Косинус искомого угла равен косинусу угла при вершине A прямоугольного треугольника BDO, т. е. он равен $\frac{AO}{AD} = \frac{a}{b\sqrt{3}}$.

4. Проведем через точку пересечения прямых m и n (обозначим эту точку через A) прямую l_1, параллельную l, и докажем, что проекция l_1 на плоскость α совпадает с одной из биссектрис между прямыми m и n. Из этого будет следовать утверждение задачи, поскольку проекции параллельных прямых параллельны.

Возьмем любую точку M на l_1. Обозначим ее проекции на плоскость α и прямые m и n соответственно через M_0, M_1 и M_2. По теореме 1.15 (о трех перпендикулярах) M_1 и M_2 являются проекциями точки M_0 на прямые m *и* n. Из того, что прямая l_1 (как и параллельная ей прямая l) образует равные углы с прямыми m и n, следует равенство $MM_1 = MM_2$. А из этого получаем равенство $M_0M_1 = M_0M_2$. Таким образом, точка M_0 равноудалена от прямых m и n и лежит в задаваемой этими прямыми плоскости. Значит, точка M_0 принадлежит одной из биссектрис между прямыми m и n.

5. Геометрическое место указанных точек пересечения есть окружность, центром которой является проекция точки A на плоскость П.

6. Проекцией точки M на плоскость П является центр окружности, описанной около треугольника ABC. Значит, геометрическим местом точек M является прямая, перпендикулярная плоскости П и проходящая через центр описанной около ABC окружности.

7. Проекцией точки M на плоскость ABC является центр описанной около ABC окружности, т. е. середина гипотенузы AB — точка O. Искомое расстояние MO находится из прямоугольного треугольника MAO (или равных ему треугольников MBO или MCO), оно равно $\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

8. Пусть данные перпендикулярные прямые пересекаются в точке O. Можно считать, что и прямая l также проходит через эту точку. Пусть M некоторая точка на l. Для удобства вычислений будем считать, что $OM = 2$. Обозначим через M_0, M_1 и M_2 проекции точки M на плоскость П и данные прямые ($\angle MOM_1 = 45°$). Далее находим $M_0M_2 = OM_1 = \sqrt{2}$, $M_0M_1 = OM_2 = 1$, $OM_0 = \sqrt{3}$. Следовательно, косинус искомого угла равен $\frac{M_0O}{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. А сам угол равен 30°.

Дополнительные задачи

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите углы, которые прямая A_1D образует с плоскостями ABC, DCC_1, ABC_1. (*Ответ:* 45°; 45°; 90°.)
2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите углы, образованные прямой DB_1 с плоскостями CDD_1, ABC_1. $\left(\textit{Ответ: } \arccos\sqrt{\frac{2}{3}};\ \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}.\right)$
3. Точка M удалена от плоскости, в которой расположен единичный квадрат, на расстояние, равное 1. Проекция M на плоскость квадрата совпадает с серединой одной из его сторон. Найдите косинусы углов, которые образуют с плоскостью квадрата прямые, проходящие через M и вершины квадрата. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{5}};\ \frac{\sqrt{5}}{3}.\right)$
4. Через вершину прямого угла проходит прямая, образующая углы в 60° с его сторонами. Какой угол образует эта прямая с плоскостью, которой принадлежит данный прямой угол? (*Ответ:* 45°.)
5. Пусть P — середина стороны BC прямоугольника $ABCD$. Отрезок PM перпендикулярен плоскости прямоугольника, его длина равна 6 см. Наклонные MA и MB образуют углы в 45 и 60° с плоскостью прямоугольника. Найдите его периметр. (*Ответ:* $8\sqrt{3} + 4\sqrt{6}$.)

1.7. Двугранный угол между плоскостями

В параграфе вводится одно из важнейших понятий стереометрии — понятие двугранного угла и его характеристики — линейного угла. Через эти понятия определяется угол между двумя плоскостями, точнее, величина такого угла. Доказывается теорема о том, что линейный угол полностью задает двугранный угол (в определенном смысле эта теорема дает нам признак равенства двугранных углов). Приводится признак перпендикулярности двух плоскостей. Несмотря на свою очевидность, указанный признак оказывается полезным и для построения теории и при решении многих задач. Кроме того, вводя его, мы как бы делаем полным набор признаков о параллельности и перпендикулярности для пар прямая — прямая, прямая — плоскость, плоскость — плоскость. Очень важной для практики является теорема о площади проекции фигуры на плоскость.

Учащиеся должны

знать: определения введенных в этом параграфе понятий, формулировки и доказательство теорем (что касается последней теоремы о площади проекции, то здесь можно ограничиться знанием общей схемы доказательства);

уметь: в стандартных ситуациях строить линейные углы двугранных углов и вычислять их величины, находить перпендикулярные плоскости, решать простейшие задачи с использованием основных теоретических фактов.

Методические рекомендации к изучению материала

Полезно обратить внимание учащихся на явно прослеживаемые в параграфе аналогии между соответствующими понятиями и фактами планиметрии и стереометрии. Образуются следующие пары:

плоский угол — двугранный угол;

биссектриса угла — биссекторная плоскость;

свойство биссектрисы — свойство биссекторной плоскости;

угол между прямыми — угол между плоскостями;

длина проекции отрезка ($l\cos\varphi$) — площадь проекции фигуры ($S\cos\varphi$).

Перед тем как приступить к решению задач, следует отработать два основных способа построения линейного угла двугранных углов. По первому способу, согласно определению, из точки на ребре восстанавливаем перпендикуляры к двугранному углу, расположенные в его гранях. По второму — из точки, принадлежащей одной из граней, опускаем перпендикуляры на ребро и другую грань и т. д. (здесь требуется ссылка на теорему о трех перпендикулярах). Второй способ обычно используется в задачах с пирамидами при построении линейных углов, соответствующих двугранным углам при основании. В качестве исходной точки берется вершина пирамиды.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Теория до признака перпендикулярности плоскостей. Задачи 1, 2.

Задание на дом: задачи 3, 4, 5.

Урок 2. Теория (до конца параграфа). Задачи 6, 11, 12.

Задание на дом: задачи 7, 8, 13.

Урок 3. Задачи 9, 10, 14, 15.

Задание на дом: задачи 16, 17.

Урок 4. Подготовка к контрольной работе. Разбор задач (по всей главе).

Задание на дом: задачи 18, 19.

Урок 5. Контрольная работа № 2.

Урок 6. Анализ результатов контрольной работы. Повторение теории и задач первой главы.

Указания к решению задач учебника

1. Проведем через A плоскость, перпендикулярную ребру двугранного угла. Сечением будет плоский угол (линейный угол двугранного угла) величины α. Надо найти расстояние от точки A, расположенной на одной из сторон угла, до другой стороны угла (до прямой, содержащей другую сторону). (*Ответ*: $a\sin\alpha$.)

2. Не обязательно. Любая плоскость, проходящая через прямую, перпендикулярную данной плоскости, будет перпендикулярна данной плоскости.

3. Проекции точек A и A' на прямую l совпадают (по теореме 1.15). Обозначим эту точку через B. В прямоугольном треугольнике $AA'B$ знаем катет AA' и противолежащий угол. Надо найти катет $A'B$. (*Ответ*: $a\text{ctg}\,\alpha$.)

4. Из результата предыдущей задачи следует, что все такие прямые касаются окружности с центром A'(A' — проекция A на данную плоскость) и радиусом $a\text{ctg}\,\alpha$, где $a = AA'$, α — угол между заданной плоскостью и остальными.

5. Из определений угла между прямыми и угла между прямой и плоскостью следует, что указанная сумма углов всегда равна $90°$.

6. Угол ABC является линейным углом двугранного угла, ребром которого является прямая BD, а грани содержат точки A и C. Угол между заданными плоскостями равен наименьшему из двух углов α и $180° - \alpha$.

7. Поскольку площадь правильного шестиугольника со стороной l равна $\frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$, то в соответствии с теоремой 1.19 площадь его проекции равна $\frac{3l^2\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$.

8. Наименьший угол треугольника находится против его наименьшей стороны. По теореме косинусов косинус этого угла равен $\frac{5}{7}$. Площадь данного треугольника равна $6\sqrt{6}$. По теореме 1.19 площадь проекции равна $\frac{30\sqrt{6}}{7}$.

9. Из задач 3 и 4 следует, что точка пересечения проведенных плоскостей проектируется на плоскость треугольника в точку, равноудаленную от прямых, образующих данный треугольник, т. е. в центр вписанной или вневписанной окружности данного треугольника. Таким образом, задача имеет два решения: $d\cos\alpha$ или $\frac{d}{3}\cos\alpha$.

10. Одна из точек D_1 или D_2 проектируется в центр вписанной окружности данного треугольника, а другая — в центр вневписанной окружности (см. предыдущую задачу). Понятно, что в центр вписанной окружности должна проектироваться точка D_2. Учитывая, что для правильного треугольника радиус вневписанной окружности в 3 раза больше радиуса вписанной, получаем для угла φ уравнение: $\operatorname{tg} 2\varphi = 3\operatorname{tg}\varphi$, из которого найдем $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\varphi = 30°$.

11. Треугольник ABD является проекцией треугольника ABC. Поэтому, если угол между плоскостями ABD и ABC равен φ, то $\cos\varphi = \frac{Q}{S}$. Следовательно, площадь проекции треугольника ABD на плоскость ABC равна $Q\cos\varphi = \frac{Q^2}{S}$.

12. Площади всех граней этой пирамиды равны между собой, все двугранные углы также равны, площадь одной грани равна сумме проекций на нее площадей трех других граней. Значит, если φ — искомый угол, то $\cos\varphi = \frac{1}{3}$.

13. Обозначим величины двугранных углов с ребрами AB, BC и CA через α, углов с ребрами AD, BD и CD — через β (понятно, что эти углы соответственно равны между собой). Площадь грани ABC равна $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, три оставшиеся грани имеют площади $Q = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4}$. Поскольку сумма площадей проекций любых трех граней на четвертую равна площади четвертой грани, то по формуле из теоремы 1.19 получаем систему уравнений: $3Q\cos\alpha = S$, $S\cos\alpha + 2Q\cos\beta = Q$. Из нее находим: $\cos\alpha = \frac{S}{3Q} = \frac{a\sqrt{3}}{3\sqrt{4b^2 - a^2}}$; $\cos\beta =$

$= \frac{2b^2 - a^2}{4b^2 - a^2}$. (Построив линейный угол любого из двугранных углов величины β, найдем, что синус половинного угла равен отношению половины стороны треугольника ABC к высоте на боковую сторону в равнобедренном треугольнике ADB или любого другого. Так получается ответ, указанный в учебнике.)

14. По существу, требуемое соотношение было доказано при решении задачи 13.

15. Проведем через точку M плоскость, перпендикулярную ребру двугранного угла. Тогда утверждение задачи будет следовать из соответствующего планиметрического факта и свойств перпендикулярности между прямыми и плоскостями в пространстве.

16. Если α — угол между плоскостью круга и плоскостью P, то из условия на основании теоремы 1.19 следует, что $\pi \cos \alpha = 1$, а надо найти $2 \sin \alpha$.

17. Из условия следует, что треугольники ABD и ACD равны (по трем сторонам). Проекцией B на плоскость ACD является середина AC. Значит, площадь проекции треугольника ABD на плоскость ACD в два раза меньше площади ACD, а значит, и площади ABD. Таким образом, в соответствии с формулой теоремы 1.19 косинус искомого угла равен $\frac{1}{2}$, а сам угол равен $60°$.

18. Нетрудно найти стороны треугольника ABC: $AB = AC = \sqrt{3}$, $BC = 2$. Площадь этого треугольника равна $\sqrt{2}$. Площадь грани DBC равна 1, а две оставшиеся грани имеют площади $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Поскольку проекцией треугольника ABC на каждую из трех других граней является соответствующая грань, то по формуле теоремы 1.19 находим косинусы углов, которые эта грань образует с каждой из трех оставшихся, а затем и сами эти углы. Получаем, что в нашей пирамиде три двугранных угла прямые (с ребрами DA, DB

и DC), угол при ребре BC равен 45°, а два оставшихся по 60°.

19. Пусть x — площадь фигуры F, 2φ — величина двугранного угла. По теореме 1.19 получаем систему уравнений; $x\cos 2\varphi = S$, $x\cos\varphi = Q$. Выражая из второго уравнения $\cos\varphi = \frac{Q}{x}$ и заменяя в первом $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = 2\frac{Q^2}{x^2} - 1$, получим для x уравнение: $x^2 + Sx - 2Q^2 = 0$, из которого найдем $x = \frac{\sqrt{S^2 + 8Q^2} - S}{2}$.

20. 1) См. решение задачи 18: $\cos\alpha = \frac{S_1}{Q}$, $\cos\beta = \frac{S_2}{Q}$, $\cos\gamma = \frac{S_3}{Q}$. 2) Подставим выражения для косинусов двугранных углов, найденные в пункте 1), в соотношение задачи 14 (изменив обозначения углов). 3) Выразим S_1, S_2, S_3 по формулам из пункта 1) и подставим в равенство задачи 14.

Дополнительные задачи

1. В пространстве расположены прямоугольник $ABCD$ и треугольник AMD так, что MB перпендикулярна плоскости ABC. Является ли угол MAB линейным углом двугранного угла с ребром AD и гранями, проходящими через точки M и B? (*Ответ:* да.)
2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите величину двугранного угла с ребром CD и гранями, содержащими точки A_1 и B. (*Ответ:* 45°.)
3. Дан квадрат $ABCD$. Отрезок BP перпендикулярен его плоскости и равен стороне квадрата. Постройте линейный угол и найдите величину двугранного угла, если указано его ребро и точки, принадлежащие его граням: а) AD, P и C; б) CD, P и B; в) BC, P и D; г) PB, A и C. (*Ответ:* 45°; 45°; 90°; 90°. Рассмотреть куб.)

4. В треугольнике ABC известны стороны $AB = AC = 13$ см, $BC = 10$ см. Отрезок AD перпендикулярен плоскости ABC, $AD = 12$ см. Найдите величину двугранного угла с гранями BCD и BCA. (*Ответ:* 45°.)
5. Обязательно ли плоскость линейного угла двугранного угла перпендикулярна плоскостям его граней? (*Ответ:* да.)
6. Верно ли утверждение: если две плоскости взаимно перпендикулярны, то любая прямая, лежащая в одной плоскости, перпендикулярна любой прямой другой плоскости? (*Ответ:* нет.)
7. Верно ли утверждение: если две плоскости перпендикулярны, то найдется прямая, принадлежащая одной плоскости, перпендикулярная любой прямой другой плоскости? (*Ответ:* да.)
8. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскости ACA_1 и BDB_1 перпендикулярны.
9. Отрезок AP перпендикулярен плоскости ABC. Какие из плоскостей, определяемых тройками точек, взятых из множества $\{A, B, C, P\}$, перпендикулярны плоскости ABC? (*Ответ:* ABP и ACP.)
10. Точки A и B принадлежат ребру прямого двугранного угла, отрезки AC и BD принадлежат разным граням и перпендикулярны ребру двугранного угла. Найдите CD, если $AB = 8$ см, $AC = 9$ см, $BD = 12$ см. (*Ответ:* 17 см.)
11. Концы отрезка AB принадлежат различным граням прямого двугранного угла. Точки A_1 и B_1 — соответственно проекции точек A и B на противоположные грани. Найдите A_1B_1, если $AA_1 = 6$ см, $BB_1 = 18$ см, $AB = 21$ см. (*Ответ:* $\sqrt{42}$ см.)
12. Длина катета прямоугольного равнобедренного треугольника равна 4 см. Плоскость α, проходящая через катет, образует с плоскостью треугольника угол 30°. Найдите длину проекции гипотенузы на плоскость α. (*Ответ:* $2\sqrt{7}$ см.)

13. В треугольнике ABC известны стороны: $BC = 15$ см, $AB = 13$ см, $AC = 4$ см. Через AC проведена плоскость α, составляющая угол $30°$ с плоскостью данного треугольника. Найдите расстояние от вершины B до плоскости α. (*Ответ:* 6 см.)

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. В пространстве отмечены четыре точки. Сколько может быть различных плоскостей, содержащих не менее трех из этих точек? (Перечислите все возможности.)

2. Дана треугольная пирамида $ABCD$. На прямой AD взята точка K так, что $AK = 3KD$, на AC — точка M так, что $2AM = 3MC$. Через K и M проведена плоскость, параллельная AB и пересекающая прямые BD и BC в точках P и Q соответственно. Найдите $MQ : KP$.

3. Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник, $BCKM$ — параллелограмм, не лежащий в плоскости пятиугольника. Найдите угол между DE и KM.

4. Задача из учебника (на усмотрение учителя).

5. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 5$, $BC = 13$, $CA = 10$. Проекции AB и BC на некоторую плоскость равны соответственно 4 и 12. Найдите длину проекции CA на эту же плоскость.

Вариант 2

1. В пространстве имеется точка и две прямые. Сколько может быть различных плоскостей, содержащих данную точку и хотя бы одну прямую? (Перечислите все возможности.)

2. Дана треугольная пирамида $ABCD$. На AD взята точка K так, что $3AK = 5KD$, на AC — точка M так, что $AM = 5MC$. Через K и M проведена плоскость, параллельная AB и пересекающая прямые BD и BC в точках P и Q соответственно. Найдите $KP : MQ$.

3. Пусть $KLMNP$ — правильный пятиугольник, $ABKM$ — параллелограмм, не принадлежащий плоскости этого пятиугольника. Чему равен угол между AB и LN?
4. Задача из учебника (на усмотрение учителя).
5. В треугольнике две стороны равны 13 и 7, угол между ними 60°. Проекции данных сторон на некоторую плоскость равны 12 и $4\sqrt{3}$. Найдите длину проекции третьей стороны на эту же плоскость.

Вопросы к главе 1

1. Сформулируйте основные свойства пространства. Укажите аналогичные свойства плоскости.

2. Перечислите различные способы задания плоскости.

3. Какие плоскости называются параллельными?

4. Сформулируйте признак параллельности двух плоскостей.

5. Сформулируйте теорему о пересечении двух плоскостей третьей.

6. Три плоскости не имеют общей точки. Как расположены линии их попарных пересечений?

7. Какие прямые называются скрещивающимися?

8. Если одна из двух параллельных прямых принадлежит плоскости α, верно ли, что и другая прямая обязательно принадлежит плоскости α?

9. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.

10. Что означает утверждение: понятие параллельности для прямых в пространстве обладает свойством транзитивности?

11. Чему равен угол между двумя параллельными прямыми?

12. Как могут быть связаны величины двух плоских углов, расположенных в пространстве, если их стороны соответственно параллельны?

13. Дайте определение прямой, перпендикулярной плоскости.

14. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.

15. Каково взаимное расположение двух прямых, перпендикулярных одной плоскости?

16. Укажите известные вам свойства проекции.

17. Какие виды проекции вы знаете?

18. Верно ли, что проекции двух равных отрезков на одну и ту же плоскость равны?

19. Объясните смысл утверждения: равные наклонные имеют равные проекции.

20. Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах.

21. Дайте определение угла между прямой и плоскостью.

22. Что такое двугранный угол?

23. Что такое линейный угол двугранного угла?

24. Сформулируйте признак перпендикулярности двух плоскостей.

25. Как меняется площадь фигуры при проектировании?

Глава 2
Многогранники

В определенном смысле можно сказать, что первая глава была вступлением к курсу стереометрии и лишь со второй начинается собственно курс, поскольку объектом изучения в ней являются многогранники — основная разновидность пространственных тел. А именно пространственные тела и являются главным объектом изучения стереометрии. (Речь идет именно о данном курсе.) Как сказал Пуанкаре: «Не будь в природе твердых тел, не было бы геометрии».

В данной главе большое внимание уделяется вопросам, связанным с построением изображений многогранников и построениям на изображениях многогранников. Следует заметить, что автор не дает точного определения многогранника. Более того, по его мнению, дать такое определение невозможно, во всяком случае на школьном уровне. Многое здесь зависит от договоренности, что́ считать многогранником. С другой стороны, в главе дается точное определение понятия выпуклого многогранника. Кроме того, в ней рассматриваются многогранные углы, изучаются важнейшие виды многогранников: пирамиды и призмы.

В этой главе почти весь теоретический материал является единым для школьников различного уровня подготовки. Единственное исключение — метод вспомогательных плоскостей и внутреннего проектирования при построении сечений. В слабых классах с этими приемами можно лишь ознакомиться и не отрабатывать детально. (Совсем их опустить тоже можно, но нежелательно.) В дальнейших главах уровневая дифференциация теоретического материала будет более ярко выраженной. В этой же главе уровневая дифференциация задается главным образом системой задач.

Особо следует обратить внимание учителя на задачи, отмеченные буквой «П» (полезные). Ученики, желающие овладеть курсом стереометрии на достаточно высоком уровне, должны не только прорешать эти задачи (самостоятельно или с помощью учителя), но и запомнить содержащийся в них факт или используемый метод решения и уметь ими пользоваться (фактами или методами).

Одним из важнейших базовых умений, которые необходимо отработать при изучении второй главы, является умение строить правильный чертеж. Необходимо выработать у учеников привычку начинать решение любой геометрической задачи с построения «большого и красивого» чертежа. Причем очень часто для этого необходимо сделать несколько попыток. Именно в стереометрии во многих случаях хороший, правильный чертеж является основой, главной частью решения задачи. Поэтому учитель, объясняя у доски решение трудной задачи, должен особое внимание обращать на процесс возникновения итогового чертежа, подчеркивать отдельные технические приемы, связанные с чертежом, такие как изображение отдельных фрагментов, специальных проекций, сечений и пр.

2.1. Изображение многоугольников и многогранников

Уже в первой главе учащиеся встречались с изображениями на плоскости некоторых пространственных объектов, в частности многогранников. Однако при этом мы не обсуждали, каким образом получено то или иное изображение. В некоторых случаях изображение являлось частью условия задачи, в других — рисунком, иллюстрирующим рассматриваемую в теореме ситуацию.

В первом параграфе этой главы формулируется главный принцип построения изображений: плоские изображения пространственных объектов получаются посредством параллельного (в частности, ортогонального) проектирования.

Учащиеся должны

знать: основные законы построения изображений;

уметь: строить изображения многоугольников и основных многогранников; делать простейшие построения на изображениях многоугольников и многогранников.

Методические рекомендации к изучению материала

В соответствии со сказанным выше не следует слишком фиксировать внимание учащихся на том, что такое многогранник, и тем более заниматься специальной отработкой этого понятия. Достаточно продемонстрировать некоторые модели и изображения и обсудить, какие из них, безусловно, являются многогранниками, какие, очевидно, не являются, а какие могут вызвать различные мнения.

Начиная изучение параграфа, следует напомнить и повторить свойства параллельного проектирования.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Ввести и обсудить понятие многогранника, сформулировать основной принцип построения изображений, повторить свойства параллельного проектирования, решить задачи 6, 9, 10 учебника.

Задание на дом: повторить § 1.4; задачи 11, 12 (из § 2.1 учебника.)

Урок 2. Рассмотреть теорию оставшейся части § 2.1, решить задачи 2, 3, 5 а, б; (*)[1], рассмотреть воп-

---

[1] Здесь и далее (*) означает, что разбор данного материала следует проводить только в сильных классах или в классах с углубленным изучением математики.

рос о построении на изображениях (из § 2.2) с помощью метода следов, решить задачи из текста § 2.2 (к рис. 43, 44, 45).

Задание на дом: задачи (из § 2.1) 5 б, 7, 8 (* из § 2.2); 1 а, б, 4 учебника.

Указания к решению задач учебника

2. Может. Например, треугольной пирамиды (см. рис. 15).

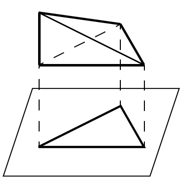


Рис. 15

3. См. рисунок 16, *а, б, в*.

4. Например, треугольная пирамида (см. рис. 16, *в*).

5. См. рисунок 17, *а, б, в*.

6. Проведем прямую A_1M_1 и обозначим через P_1 ее точку пересечения с B_1C_1. Этой точке соответствует на заданном треугольнике ABC точка P

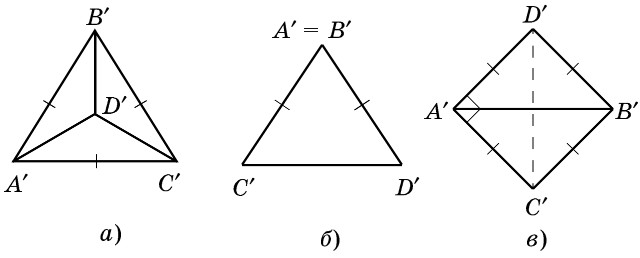


Рис. 16

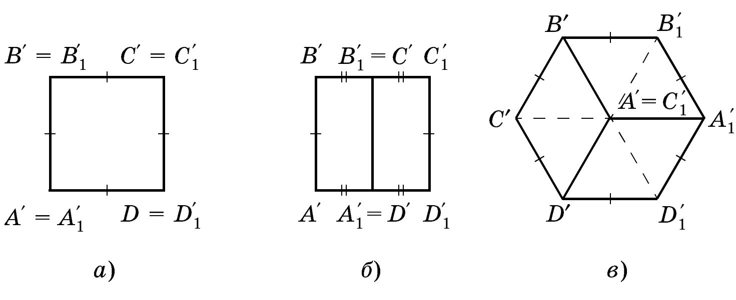


Рис. 17

на стороне BC, а на втором изображении точка P_2 на стороне B_2C_2, при этом точки P и P_2 делят соответственно стороны BC и B_2C_2 в том же отношении, что и точка P_1 делит B_1C_1. Таким образом мы строим точку P_2, а затем на отрезке A_2P_2 строим точку M_2, делящую этот отрезок в том же отношении, в каком точка M_1 делит отрезок A_1M_1.

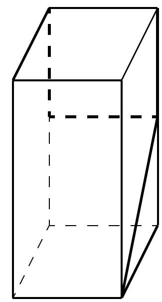


Рис. 18

7. Плоскости трех граней, изображениями которых являются четырехугольники, должны пересекаться в одной точке. В этой же точке должны пересекаться и прямые, по которым попарно пересекаются эти плоскости. Но для данного в условии задачи изображения это не так.

8. См. рисунок 18.

9. Пусть A_1, A_2, A_3 — последовательные вершины изображения правильного шестиугольника. Построим точку O так, чтобы четырехугольник $A_1A_2A_3O$ был параллелограммом. Тогда O будет изображением центра правильного шестиугольника. Теперь легко построить изображения трех оставшихся вершин шестиугольника.

10. Как известно, в треугольнике прямая, соединяющая центр описанной окружности с серединой его стороны (если центр не совпадает с серединой), перпендикулярна этой стороне, т. е. параллельна высоте к этой стороне. Теперь нетрудно построить изображения, по крайней мере, двух высот данного треугольника (проведя соответствующие параллельные прямые), а значит, и изображение точки пересечения высот.

11. Как известно, прямая, соединяющая середины двух параллельных хорд окружности, проходит через центр окружности. Следовательно, прямая, соединяющая середины двух параллельных хорд на изображении окружности, проходит через изображение центра этой окружности. Нам достаточно построить две такие прямые.

12. Если прямые AB и CD не параллельны, то и их изображения не параллельны. Прямая, по которой пересекаются указанные плоскости, должна проходить через точку M и точку P, в которой пересекаются AB и CD. (Надо еще рассмотреть случай параллельности AB и CD, а также случай, когда изображения точек M и P совпадают. Предполагаем, что изображение четырехугольника $ABCD$ не вырождается в отрезок.)

Дополнительные задачи

1. Построить изображение правильного шестиугольника $ABCBEF$, если даны изображения точек: а) A, B и D; б) A, C и E.
2. На изображении правильного треугольника построить изображения его высот.
3. Дано изображение прямоугольного треугольника. Постройте изображение центра описанной около него окружности.
4. Дано изображение трех вершин параллелограмма. Постройте изображение четвертой вершины.
5. Дано изображение окружности. Постройте изображение ее центра.
6. Дано изображение гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника и центра окружности, вписанной в него. Постройте изображения вершины прямого угла.

2.2. Построения на изображениях. Метод следов и вспомогательных плоскостей

В этом параграфе изучаются методы построения сечений на изображениях многогранников: метод следов, метод вспомогательных плоскостей и метод внутреннего проектирования (последний является, по существу, частным случаем метода вспомогательных плоскостей). В параграфе достаточно подробно разбираются решения нескольких задач, иллюстрирующих предлагаемые методы. Основным элементом построения является построение изображения прямой, по которой пересекаются две плоскости.

Учащиеся должны

знать: методы следов и вспомогательных плоскостей для построения сечений многогранников;

уметь: применять метод следов (в простейших случаях) для построения сечений на изображениях основных многогранников (треугольной пирамиды и куба); (*) применять методы вспомогательных плоскостей и внутреннего проектирования, строить изображение прямой пересечения двух плоскостей (не содержащих грани многогранника) и точку пересечения трех плоскостей.

Методические рекомендации к изучению материала

В данном параграфе развиваются и углубляются основные идеи предыдущего, связанные с построениями на изображениях. В параграфе достаточно заметны элементы уровневой дифференциации. Так, метод следов должен быть усвоен всеми учащимися, в то время как метод вспомогательных плоскостей предполагает различные уровни владения. Простейшие модификации (точки, задающие сечение, расположены на ребрах; вспомогательная плоскость одна и т. д.) также должны быть усвоены всеми. Метод вспомогательных плоскостей (и особенно метод внутреннего проектирования) в полной мере предназначен более сильным ученикам. И тем не менее разобрать несколько трудных задач на этот метод полезно в любом классе и для всех учеников.

Следует обратить внимание учеников, что метод следов является наиболее общим и при построении сечений он присутствует всегда. Метод же вспомогательных плоскостей в определенном смысле является подготовительным для последующего применения метода следов.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. (*) Является частью урока 2 к предыдущему параграфу.

Урок 2. Решение задач о построении сечений на изображениях треугольной пирамиды и куба 1 в, г, 5 а, б, 8, 11 учебника.

Задание на дом: повторить § 1.5; задачи 5 в, г, д, 2, 9 учебника.

Урок 3. Рассмотреть задачу из учебника на построение прямой, по которой пересекаются две плоскости; решить задачи 6 а, б, 3, 7 а учебника.

Задание на дом: изучить § 2.2, решить задачи 6 в, 7 б, 11 учебника.

Указания к решению задач учебника

1. а) Проведем прямую KL и найдем ее точку пересечения с AC. Соединим построенную точку с M (прямой линией) и продолжим до пересечения с AD в точке P. Четырехугольник $KLMP$ и есть искомое сечение. б) Сначала проводим прямую ML и находим точку пересечения с AC. Задача сводится к предыдущей: построить сечение по трем точкам на его ребрах. в) Сначала строим вспомогательное сечение через точки B, K, L и находим точку пересечения прямой KL с плоскостью ADC. Соединив полученную точку с M, строим отрезок, по которому наша плоскость пересекает плоскость ADC (рис. 19). За-

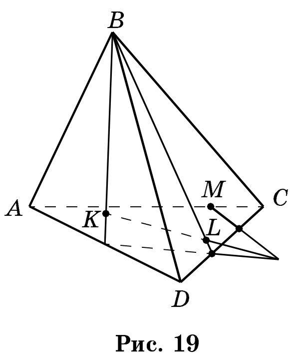


Рис. 19

тем строим все сечение. г) Аналогично предыдущему случаю сначала, используя вспомогательное сечение BKL, строим точку пересечения прямой KL с плоскостью ADC.

2. $\frac{1}{2}$. Сечением является треугольник, подобный ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$.

3. Из условия следует, что треугольники ADB и BDC — прямоугольные с прямым углом при вершине D. Пусть K и L — середины соответственно AB и BC. Имеем $DK = \frac{AB}{2}$, $DL = \frac{BC}{2}$ как медианы в соответствующих прямоугольных треугольниках, $KL = \frac{AC}{2}$. Таким образом, треугольник DKL подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$.

4. Пусть плоскость, параллельная AC и BD, делит ребро AD на отрезки xAD и $(1 - x)\,AD$. Тогда в сечении получим параллелограмм (противоположные стороны получившегося четырехугольника параллельны AC и BD) со сторонами xa и $(1 - x)b$. Этот параллелограмм будет ромбом, при условии равенства $xa = (1 - x)b$. Из этого уравнения находим $x = \frac{b}{a + b}$, а затем сторону ромба $xa = \frac{ab}{a + b}$.

5. г) Проведем прямую через точки на ребрах AD и AB до пересечения с прямой DC. Проведя прямую через полученную точку и заданную точку в грани DD_1CC_1, мы получим в пересечении с прямыми DD_1 и CC_1 еще две точки, принадлежащие плоскости сечения.

8. Проведем в гранях ABC и ABD прямые, параллельные соответственно BC и AD. Точки пересечения этих прямых с ребрами пирамиды будут вершинами сечения. Далее достраиваем сечение (см. задачу 4).

9. Проведем через K и M в гранях, содержащих ребро AD, прямые, параллельные этому ребру. Получим при пересечении с соответствующими ребрами еще две вершины нашего сечения.

10. Построим вспомогательное сечение, проходящее через две из выбранных точек и какую-нибудь вершину пирамиды. Проведя в этом сечении через заданные точки прямую, мы сможем найти еще одну точку нашего сечения, принадлежащую плоскости грани пирамиды.

11. Обозначим через O начало лучей и возьмем на них точки K, L и M соответственно; $OKLM$ можно рассматривать как изображение треугольной пирамиды. Построив сечение этой пирамиды, проходящее через точки A, B и C, расположенные в соответствующих гранях (см. предыдущую задачу), и найдя точки пересечения этого сечения с прямыми OK, OL и OM, мы построим требуемый треугольник.

2.3. Выпуклые многогранники

В параграфе дается определение выпуклого многогранника, причем определение, «обслуживающее» только многогранники, и подчеркивается, что именно этот вид многогранников будет являться в дальнейшем основным объектом изучения. Кроме того, в параграфе дается общее определение выпуклого множества и доказывается, что выпуклый многогранник в смысле данного определения является выпуклым множеством.

В параграфе говорится об основных элементах многогранников: гранях, ребрах, вершинах, двугранных углах; вводится понятие многогранного угла (подробнее они будут изучаться в § 2.4).

Учащиеся должны

знать: определения выпуклого многогранника, выпуклой фигуры (множества), формулировку и доказательство теоремы о пересечении выпуклых множеств, названия и определения основных элементов многогранников;

уметь: различать выпуклые и невыпуклые многогранники.

Методические рекомендации к изучению материала

Понятие выпуклого множества играет очень важную роль в современной математике и ее приложениях, и именно это определяет особую роль данного параграфа. Главным результатом изучения является именно теоретическое знание, что также является характерным отличием этого параграфа от большинства других (например, от предыдущего).

Выпуклый многогранник определяется через понятие полупространства. В этой связи необходимо напомнить второе основное свойство пространства. Следует также вспомнить известное из курса планиметрии понятие выпуклого многоугольника. Полезно, перед тем как дать определение выпуклого многогранника, рассмотреть модели и изображения нескольких многогранников, выпуклых и невыпуклых, и обсудить, какие из них, по мнению учеников, являются выпуклыми, а какие — нет и почему. Можно поставить в связи с определением ряд вопросов. Что изменится, если мы из данного определения выкинем какую-то часть? Что будет, в частности, если убрать слово «ограниченная»? Возможно ли, чтобы при пересечении нескольких полупространств возник выпуклый многогранник с числом граней, меньшим, чем число полупространств? При пересечении какого наименьшего числа полупространств можно получить многогранник? И т. п.

Учащиеся должны четко понимать, что, несмотря на специальное определение, выпуклый многогранник является частным случаем выпуклого множества. Именно это следует из основной теоремы о пересечении выпуклых множеств.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Теория § 2.3, задачи 1, 2, 3, 7 учебника.

Задание на дом: теория § 2.3, задачи 4, 5, 6 учебника.

Указания к решению задач учебника

1. 5 граней, 99 граней. Примерами могут служить пятиугольная и 99-угольная пирамиды. То, что у выпуклого стогранника не может быть грани с числом сторон 100 или больше, нетрудно доказать. Если бы такая грань существовала, то каждой ее стороне соответствовала бы еще одна грань, причем разным сторонам соответствовали бы разные грани (в силу выпуклости данного многогранника). Таким образом, общее число граней было бы больше 100.

2. Нет (на оба вопроса).

6. В качестве примера можно взять 99-угольную пирамиду. Для любого $k = 1, 2, \ldots, 98$ можно провести плоскость, пересекающую основание по отрезку и ровно k ее боковых ребер.

7. Пусть n — число граней нашего выпуклого многогранника. Тогда число сторон в каждой грани может изменяться от 3 до $n - 1$. Значит, у всех n граней не может быть различное число сторон.

2.4. Многогранные углы

В параграфе дается определение трехгранного, а затем и многогранного угла. Основным объектом изучения является трехгранный угол. Доказываются две теоремы, два основных неравенства, связанных с трехгранными углами: теорема о сумме его плоских углов и «неравенство треугольника».

Учащиеся должны

знать: определения трехгранного угла, многогранного угла, их элементов; формулировки и доказательства теорем о свойствах плоских углов трехгранного угла;

уметь: находить на моделях и изображениях трехгранные и многогранные углы, их элементы; пользоваться определениями и теоремами при решении задач.

Методические рекомендации к изучению материала

Перед началом изучения параграфа следует вспомнить определение и термины, связанные с двугранным углом (в частности, понятие линейного угла двугранного угла). Теоретическая часть может быть изложена учителем в виде лекции. Следует обратить внимание, что на множестве многогранных углов можно выделить множество выпуклых углов.

Сильным ученикам полезно освоить метод построения для данного трехгранного угла дополнительного или полярного угла (см. задачи 14, 15), благодаря чему из утверждений для плоских углов трехгранного угла можно получать утверждения для двугранных углов трехгранного угла.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Теоретическая часть § 2.4 до теоремы 2.2 (включительно), решить задачи 1, 2, 5, 6 учебника.

Задание на дом: теория до теоремы 2.2, повторить § 1.7, задачи из учебника 3, 8, 13.

Урок 2. Теорема о неравенстве треугольника для плоских углов трехгранного угла, решить задачи 10, 14, 15 а учебника.

Задание на дом: задачи 15 б, 16 а, 20 учебника.

Урок 3. Решение задач из § 2.4: 21, 18, 9, 12, 7 учебника.

Задание на дом: теория § 2.4, задачи 11, 22, 2 (из дополнительных задач), повторить решение задач 1, 3, 5, 6 из § 1.5 учебника.

Указания к решению задач учебника

1. $180° \cdot 4 = 720°$.

2. $90°$, $90°$ и α.

3. Эти углы равны $60°$. Показать это можно, например, следующим образом. Рассмотрим куб. Проведем из одной вершины этого куба три диагонали сходящихся в этой вершине граней. Все плоские углы при вершине куба прямые, а диагонали — биссектрисы этих углов. Соединив попарно оставшиеся концы диагоналей, получим треугольную пирамиду, все грани которой правильные треугольники со стороной, равной диагонали грани куба.

4. а) Больше $30°$ и меньше $170°$ (больше разности данных углов, но меньше их суммы); б) больше $150° - 130° = 20°$ и меньше $360° - (130° + 150°) = 80°$.

5. Пространство можно разбить на четыре трехгранных угла: возьмем произвольную точку внутри треугольной пирамиды и проведем лучи с началом в этой точке, проходящие через вершины этой пирамиды. Эти лучи являются ребрами четырех непересекающихся трехгранных углов, содержащих все пространство. Трех трехгранных углов недостаточно. Легко понять, что двумя плоскими углами нельзя покрыть плоскость. Пусть в пространстве даны три трехгранных угла. Проведем плоскость, не пересекающую один из них. Эта плоскость пересечет каждый из двух оставшихся. Но при пересечении трехгранного угла плоскостью может возникнуть сечение одного из трех видов: треугольник, угол и обрезанный угол (угол, от которого отрезана вершина); каждая из этих фигур может быть покрыта плоским углом, а двумя плоскими углами плоскость покрыть нельзя.

6. а) Все семь возможностей получаются заменой одной, двух или всех трех величин на величину смежного угла (дополняющего до 180°); б) ответ аналогичен пункту а).

7. Пространство окажется разделенным на 14 частей: 8 трехгранных углов и 6 четырехгранных. Рассмотрим треугольную пирамиду. Четыре плоскости, ее образующие, разбивают пространство на 15 частей: внутреннюю часть, 4 части, прилежащие к граням, 6 — к ребрам и 4 — к вершинам. Приближая одну из плоскостей параллельно самой себе к вершине, образованной тремя оставшимися, мы получим в пределе нужное расположение плоскостей. При этом части пространства, соответствующие ребрам, превратятся в четырехгранные углы, а остальные — в трехгранные.

8. То, что все грани равные треугольники, следует из третьего признака равенства треугольников. При этом у каждой вершины пирамиды сходятся все три угла треугольника. Следовательно, у треугольников, образующих грани пирамиды, сумма любых двух углов больше третьего. А это и означает, что треугольник остроугольный. (У тупоугольного треугольника сумма острых углов меньше 90° и меньше тупого угла.)

9. 110°, 45° и 25°. Из того, что сумма двух из данных углов равна третьему, следует, что данные точки лежат в одной плоскости. При этом D является центром описанной около ABC окружности.

10. $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. Пусть O — вершина угла. Возьмем на одном из ребер точку A так, что $OA = 2$. Пусть P — проекция A на противоположную грань, B и C — на два других ребра. Последовательно находим: $OB = OC = 1$, $OP = \frac{2}{\sqrt{3}}$. (Треугольники OPB и OPC — прямоугольные с острым углом при вершине O, равным 30°.)

11. Если провести плоскость через ребро любого трехгранного угла, пересекающую противоположную грань, то мы разделим трехгранный угол на два, причем у каждого из получившихся сумма плоских углов будет меньше. Это следует из теоремы 2.3. Последовательно проводя такие плоскости, мы можем «вырезать» из второго трехгранного угла первый. При этом после каждого «отрезания» сумма плоских углов будет уменьшаться.

12. Будем считать, что $OA = OB = OC$. Тогда плоскость p проходит через середины AB и CB (по свойству биссектрисы равнобедренного треугольника). Значит, p параллельна AC и пересекает плоскость COA по прямой, параллельной AC, т. е. перпендикулярной биссектрисе угла COA.

13. Нет, более того, если этот угол не прямой, то его проекция на плоскость, содержащую одну из сторон (только одну), всегда есть угол меньшей величины.

14. Плоские углы второго трехгранного угла дополняют до 180° соответствующие двугранные углы первого, а двугранные углы второго дополняют до 180° плоские углы первого. Пусть, например, A' и B' — проекции O' на OBC и OAC, M — проекция O' на OC. Тогда четырехугольник $O'A'MB'$ является плоским, в котором $\angle A'O'B' = 180° - \angle A'MB'$. А $\angle A'MB'$ является линейным углом двугранного угла с ребром OC. И т. д. (Заметьте, что ребра первого трехгранного угла также оказываются перпендикулярными соответствующим граням второго.) Построенную указанным образом пару трехгранных углов иногда называют парой полярных или двойственных углов. С помощью такого приема мы можем из любой теоремы о линейных и двугранных углах для трехгранного угла получать другую (двойственную) теорему, в которой линейные и двугранные углы как бы поменялись местами. (В имеющейся теореме мы везде заменяем линейные углы на углы, дополняющие соответствующие двугранные до 180°, и наоборот.)

15. Примените теоремы 2.1 и 2.2 к двойственному трехгранному углу. (См. условие и решение предыдущей задачи.)

16. Обозначим длины отрезков, отсекаемых плоскостью на ребрах угла, через a, b и c. Тогда квадраты сторон треугольника, получающегося в сечении, равны соответственно $a^2 + b^2$, $b^2 + c^2$ и $c^2 + a^2$. Теперь легко проверить, что у получившегося сечения сумма квадратов двух сторон больше квадрата третьей. А это и означает, что этот треугольник является остроугольным.

17. Нет, не у любого. Возьмем, например, угол, у которого два плоских угла прямые, а третий меньше 60°. Пусть O — вершина угла и плоскость пересекает его ребра в точках A, B и C, причем B и C — на ребрах, образующих меньший угол. Если $AB = AC$, то $OB = OC < AB$, а $BC < OB$. Значит, получившийся треугольник не может быть равносторонним.

18. Рассмотрим какое-нибудь сечение выпуклого многогранного угла, пересекающее все его ребра. В получившемся выпуклом многоугольнике найдутся три стороны, образующие при продолжении треугольник, содержащий все сечение. Соединив вершины этого треугольника с вершиной данного многогранного угла, получим трехгранный угол, содержащий данный многогранный. При этом многогранный угол можно получить из трехгранного последовательным «отрезанием» трехгранных углов. При этом после каждого отрезания сумма плоских углов оставшегося многогранного угла уменьшается. А в трехгранном она меньше 2π (теорема 2.2).

19. Сумма всех плоских углов треугольной пирамиды равна 4π. Следовательно, найдется хотя бы одна вершина, сумма плоских углов при которой не превышает π. Тогда, учитывая теорему 2.3, получаем, что все плоские углы при этой вершине острые.

20. Докажем, что сумма плоских углов любого многогранника кратна 360°. Рассмотрим произвольную грань, сумма ее углов равна $180°\,(n - 2)$, где n — число сторон этой грани. Сложив суммы углов по всем граням, мы получим, что сумма всех его плоских углов равна $180°\,(2N - 2G)$, где N — число ребер (каждое ребро входит ровно в две грани и считается дважды), а G — число всех граней. Наше утверждение доказано. Далее имеем: $3300° = 360° \cdot 9 + 60°$. Таким образом, сумма углов, прилежащих к оставшейся вершине, равна 300°.

21. Указанную в условии конфигурацию можно рассматривать как изображение (проекцию) трехгранного угла, пересеченного двумя плоскостями. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ — сечения этого угла. Тогда точки K, L и M лежат на одной прямой, поскольку являются изображением (проекцией) трех точек, расположенных на линии пересечения двух плоскостей.

22. Понятно, что если мы сможем построить какой-нибудь, пусть очень небольшой отрезок некоторой прямой, то мы сможем построить и сколь угодно длинный отрезок этой прямой, продолжая эту прямую. На рисунке 20 указан один из возможных способов решения задачи. Числа указывают номера прямых. Первые две проводятся произвольно через точку A. При этом желательно, чтобы они проходили достаточно близко к точке B. 3, 4 и 5-я также формально произвольно проводятся через общую точку. Все остальные прямые задаются двумя своими точками. В результате, согласно теореме Дезарга (см. задачу 21), мы получаем еще одну точку на прямой AB и строим искомую прямую (10-я прямая).

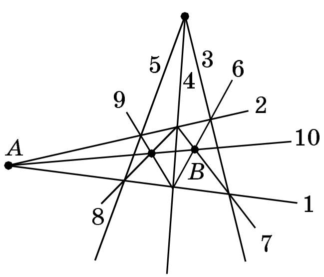


Рис. 20

Дополнительные задачи

1. Могут ли плоские углы выпуклого четырехгранного угла равняться: а) 100°, 75°, 82°, 90°; б) 118°, 92°, 130°, 31°? (*Ответ:* а) да; б) нет.)

2. В трехгранном угле два плоских угла равны 45°, а один равен 60°. Найдите величину двугранного угла, противолежащего углу в 60°. (*Ответ:* 90°.)
3. В трехгранном угле один плоский угол прямой, а два других равны 60°. Найдите угол между плоскостью, содержащей прямой угол, и противолежащим ребром. (*Ответ:* 45°.)

2.5. Пирамида. Правильная пирамида

Изучение свойств конкретных многогранников начинается с пирамиды. В этом параграфе дается определение n-угольной пирамиды и ее элементов (основание, вершина, боковые ребра, боковые грани), доказываются две важные теоремы, широко использующиеся при решении задач — это свойство пирамиды с равными боковыми ребрами и свойство пирамиды с равными углами между основанием и боковыми гранями (речь идет о положении проекции вершины пирамиды на основание), доказывается также теорема о свойстве параллельных сечений в пирамиде. В заключение вводится определение правильной пирамиды.

Методические рекомендации к изучению материала

Важно, чтобы учащиеся поняли, что теоремы 2.4 и 2.5 являются прямыми следствиями из фактов, имеющихся в § 1.5 (в нем самом и в задачах). Поэтому естественно их повторить (теорию параграфа и задачи 1, 3, 5, 6). Теорема 2.4 о свойстве пирамиды с равными боковыми ребрами, по сути, есть переформулированная задача 3 из § 1.5, а теорема 2.5 — следствие задачи 6 из § 1.5. Задачи же 1 и 5 соответственно являются подготовительными по отношению к задачам 3 и 6.

При таком подходе к теоремам 2.4 и 2.5 их усвоение учащимися будет значительно более легким и прочным.

По поводу теоремы 2.5 следует отдельно заметить, что в ней идет речь именно об углах между двумя плоскостями (основанием и боковой гранью или об угле наклона боковой грани к основанию), но не о двугранных углах при основании. В случае равенства указанных двугранных углов формулировка теоремы несколько меняется (уточняется и упрощается). В более слабом классе можно, по сути, ограничиться ослабленной формулировкой.

Т е о р е м а 2.5*

Если все двугранные углы при основании пирамиды равны, то в основании пирамиды лежит многоугольник, в который можно вписать окружность, и вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности.

Для треугольной пирамиды эту формулировку можно упростить. (Как?)

Можно также переформулировать утверждение задачи 6 из § 1.5 в виде теоремы.

Т е о р е м а 2.5**

Если все углы между плоскостью основания и боковыми гранями треугольной пирамиды равны между собой, то вершина пирамиды проектируется либо в центр вписанной, либо в центр одной из вневписанных окружностей основания.

В доказательстве этих теорем также используются результаты задач 3 и 6 из § 1.5. Желательно каждый шаг при доказательстве теорем 2.4, 2.5 (2.5*, 2.5**) сопровождать не только чертежами, но и демонстрациями на моделях пирамид.

Необходимо напомнить учащимся, где расположены центры вписанной и описанной окружностей треугольника в общем случае и для некоторых частных (например, для прямоугольного треугольника).

В параграфе дается определение правильной пирамиды. Учителю необходимо уделить достаточное количество времени на отработку навыков изображения правильных пирамид (прежде всего, треугольных и четырехугольных), повторяя при этом свойства параллельного проектирования, устанавливая связи между основными характеристиками правильных пирамид и вспоминая некоторые свойства правильных многоугольников.

В качестве основных характеристик правильной пирамиды обычно берутся следующие линейные величины (обозначения могут быть и отличными от приводимых здесь): a — сторона основания, b — боковое ребро, l — апофема боковой грани (в учебнике этот термин не вводится, поэтому напомним: *апофемой* боковой грани правильной пирамиды называется высота этой грани, проведенная к стороне основания пирамиды), h — высота пирамиды. Учащиеся должны уметь находить по любым двум из этих величин две оставшиеся для правильной треугольной и четырехугольной пирамид. (Не будем напоминать здесь соответствующие формулы.) Реже встречаются такие величины, как радиусы описанных и вписанных окружностей для основания и боковых граней, позднее к ним добавятся радиусы описанного и вписанного шара для всей пирамиды и т. д. В теоремах и задачах, касающихся правильных пирамид, учащимся, кроме линейных величин, придется встречаться с величинами площадей (например, площадей граней), с объемами (позднее), с величинами различных углов (плоских, двугранных и между прямой и плоскостью).

Перед доказательством теоремы о свойстве параллельных сечений следует вспомнить известный планиметрический факт о том, что площади подобных фигур относятся как квадраты коэффициента подобия.

Учащиеся должны

знать: определение n-угольной пирамиды и ее основных элементов (основание, вершина, боковые ребра, боковые грани, высота), формулировку и доказательство теоремы о свойствах пирамиды с равными боковыми ребрами и теоремы о пирамидах с равными углами между боковыми гранями и основанием, свойство параллельных сечений в пирамиде, определение правильной пирамиды;

уметь: изображать пирамиды, в том числе правильные пирамиды, находить элементы пирамиды по двум известным (основные случаи), использовать свойства пирамид, рассмотренные в параграфе, при решении задач.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Теория до теоремы 2.5. Решение задач 1, 2, 3, 4, 13, а также дополнительных.

Задание на дом: теория § 2.5 до теоремы 2.5, задачи 5, 6, 26 учебника.

Урок 2. Теорема 2.5. Решение задач 8, 12 учебника.

Задание на дом: теорема 2.5, задачи 14, 15 учебника.

Урок 3. Правильная пирамида. Решение задач 7, 16, 19 (для случая $n = 3$).

Задание на дом: задачи 19 ($n = 4$, произвольное n), 22, 30 учебника.

Урок 4. Свойство параллельных сечений пирамиды. Решение задач (из дополнительных) 5, 6, 7; повторение 8, 9, 10, 11, 20 из § 2.5 учебника.

Задание на дом: задачи 21, 27 учебника.

Урок 5. Решение задач 17, 24, 29, 33 учебника.

Задание на дом: задачи 18, 25, 31 учебника.

Урок 6. Может быть посвящен разбору задач, вызвавших затруднение дома или не решавшихся на предыдущих занятиях. Можно дать самостоятельную работу.

Задание на дом: задачи 20, 23, 28, 32 учебника.

Указания к решению задач учебника

1. $\sqrt{b^2 - h^2}$.

2. $\arccos \frac{1}{3}$.

3. $\alpha\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4. Таких пирамид три — треугольная, четырехугольная и пятиугольная. Боковые грани таких пирамид являются правильными треугольниками. А поскольку сумма плоских углов при вершине пирамиды должна быть меньше 2π (см. задачу 18 из § 2.4), число боковых граней не может превышать пяти.

5. Утверждение задачи следует из теоремы 1.14 (о наклонных и проекциях).

6. $\frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - a^2 - b^2}$. Из утверждения предыдущей задачи следует, что вершина пирамиды проектируется в центр описанной около основания окружности, т. е. в середину гипотенузы.

7. Из теорем 2.4 и 2.5 следует, что в основании пирамиды лежит многоугольник, который одновременно является вписанным и описанным, причем центры вписанной и описанной окружности совпадают между собой и совпадают с основанием высоты пирамиды. Отсюда следует, что в основании лежит правильный многоугольник (он вписанный, и все его стороны равноудалены от центра), а боковые ребра равны.

8. Ответ: 6. Из теоремы 2.5 следует, что в основании лежит четырехугольник, в который можно вписать окружность. А это значит, что суммы противоположных сторон у него равны.

9. Отношение равно 2. Воспользуйтесь теоремой 2.6.

10. $99^2 = 9801$.

11. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Обозначим отношение AK и BM к AB через x. Из условия на основании теоремы 2.6 получаем уравнение: $x^2 + (1 - x)^2 = \frac{2}{3}$. Ответом к задаче будет величина $|1 - 2x|$.

12. Из условия следует, что данная пирамида является правильной (см. задачу 7 и ее решение).

13. $S\cos\alpha$. Ответ сразу следует из теоремы 1.19 (о площади проекции).

14. Возможны два случая: вершина проектируется в центр вписанной и в центр вневписанной окружности (см. теорему 2.5 и замечание к ней).

15. Вершина проектируется либо в центр вписанной, либо в центр одной из трех вневписанных окружностей. Поэтому возможны четыре случая. Высота пирамиды равняется радиусу одной из четырех указанных окружностей, поскольку $\operatorname{tg} 45° = 1$.

16. $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$.

17. Центр правильного тетраэдра делит каждую высоту в отношении 3 : 1, считая от вершины. Отсюда следует, что расстояния указанных в условии вершин до центра исходного тетраэдра относятся к расстоянию от вершин исходного тетраэдра до его центра, как 5 : 3. Так же относятся и стороны этих тетраэдров.

18. Получившийся многогранник является кубом. Убедиться в этом можно, например, следующим образом. Рассмотрим куб, у которого диагонали граней равны ребру данного тетраэдра. Выберем в нем четыре вершины, образующие правильный тетраэдр. (Это можно сделать двумя способами. При этом в каждой грани берутся две противоположные вершины.) Получим в результате заданную в условии конструкцию: на гранях правильного тетраэдра во внешнюю сторону построены соответствующие пирамиды.

19. $\arccos\left(\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\right)$.

21. $\frac{2}{3}$.

22. $\arccos\left(\frac{S}{nQ}\right)$.

23. 2 : 1. При решении этой задачи можно обойтись почти без вычислений. Пусть AB — диагональ куба, K, L и M — три вершины куба, соседние с вершиной A. Тогда пирамиды $BKLM$ и $AKLM$ удовлетворяют условию задачи. Теперь ответ следует из того, что диагональ AB делится плоскостью KLM в отношении 2 : 1.

24. $\sqrt{3}$: 2. Воспользуйтесь теоремой 2.6.

25. Одну. Каждый отрезок должен входить в два треугольника, являющихся гранями пирамиды. Очевидно, что отрезок длины 1 должен войти в два треугольника: 1, 2, 2 и 1, 3, 3.

26. Да, существует. Такой будет пирамида $SABCD$, в которой стороны AB и CD основания не параллельны, а вершина S проектируется в точку их пересечения (при продолжении).

27. Проекция каждого бокового ребра на основание перпендикулярна соответствующей стороне основания. Теперь утверждение задачи следует из теоремы 1.15 (о трех перпендикулярах).

28. По теореме 2.3 для трехгранного угла $ABCS$ с вершиной S получаем $10° < \angle ASC < 70°$ (каждый плоский угол меньше суммы и больше разности оставшихся плоских углов). Из трехгранного угла $DACS$ с вершиной S получаем $30° < \angle ASC < 130°$. Таким образом, $30° < \angle ASC < 70°$. Аналогично рассуждая, получим $50° < \angle BSD < 90°$.

29. Пусть плоские углы при вершине D пирамиды $ABCD$ прямые. Поскольку прямая AD перпендикулярна BD и CD, прямая AD перпендикулярна плоскости BCD (теорема 1.9). Значит, прямая AD перпендикулярна прямой (определение 6) BC. Если теперь H — проекция D на плоскость ABC, то AH будет перпендикулярна (теорема 1.15 — о трех перпендикулярах) BC.

Точно так же BH перпендикулярна AC. Значит, H — точка пересечения высот треугольника ABC.

30. $\frac{ab}{4}$. Поскольку стороны сечения параллельны двум противоположным ребрам правильной треугольной пирамиды, сечением является прямоугольник (см. задачу 27), стороны которого в два раза меньше соответствующих ребер пирамиды.

31. Проекцией тетраэдра может быть либо треугольник, либо четырехугольник. В первом случае площадь проекции не больше площади грани тетраэдра, во втором не больше полупроизведения его ребер (каждая из диагоналей четырехугольника не превосходит длины ребра). Теперь нетрудно заключить, что наибольшая площадь проекции правильного тетраэдра будет иметь место, когда плоскость, на которую он проектируется, параллельна двум противоположным его ребрам.

32. $60°$ или $36°$. Заметим, что треугольники DAB и DAC равны, поскольку они равнобедренные с равными боковыми сторонами и углами при основаниях (DB и DC). Возможны два случая. *Первый*. Треугольники DAB и DBC равны. В этом случае все грани нашей пирамиды являются правильными треугольниками (пирамида — правильный тетраэдр) и все искомые углы по $60°$. *Второй* случай. Пусть указанные треугольники не равны (рис. 21). Значит, DA не равняется DC. (В курсе планиметрии мы доказывали, что если у двух треугольников равны соответственно по две стороны и по одному углу, противолежащему одной паре равных сторон, то углы, противолежащие другой паре, либо также равны — в этом случае равны и треугольники, — либо в сумме составляют $180°$. Но мы не будем ссылаться на это утверждение.) Положим $\angle ADB = \angle BDC = \alpha$. Возьмем на

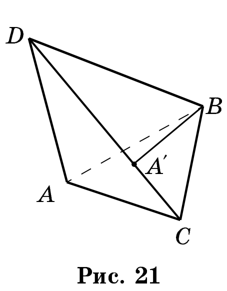


Рис. 21

луче DC точку A' такую, что $DA' = DA$. Тогда треугольник $DA'B$ будет равен треугольнику DAB, а треугольник $A'BC$ — равнобедренным. Отсюда найдем $\angle DCB = 180° - \angle DA'B = 180° - \angle DAB = 2\alpha$, $\angle DBC = \angle DCB = 2\alpha$. Далее имеем уравнение $2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180°$. Откуда $\alpha = 36°$.

33. Существуют две возможности — четырехугольник $ABCD$ является выпуклым и не является выпуклым. В первом случае $BD = \sqrt{3} + 2\sqrt{6} > 6 = SB$. Этот случай невозможен. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ — невыпуклый и $BD = 2\sqrt{6} - \sqrt{3}$.

34. а) На рисунке 22 показано, каким образом данную пирамиду можно разделить на 8 в два раза меньших. Сначала отрежем четыре пирамиды $AKPM$, $BKMQ$, $CQNL$ и $DLMP$, а затем оставшийся многогранник разрежем на четыре части $KLPM$, $KLMO$, $KLQN$ и $KLPN$. Пункты б, в и г удобно решать одновременно. Рассмотрим пирамиду $ABCD$, как указано в пункте а (рис. 23). Разрежем ее на две равных пирамиды $AKDC$ и $BKDC$, где K — середина AB. Нетрудно увидеть, что эти две пирамиды имеют вид, описанный в пункте в. Любую пирамиду, соответствующую пункту в, в свою очередь можно разрезать на две пирамиды, описанных в пункте г. Например, плоскость KDP, где P — середина AC, делит пирамиду $AKDP$ на

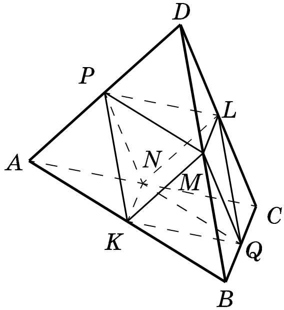


Рис. 22

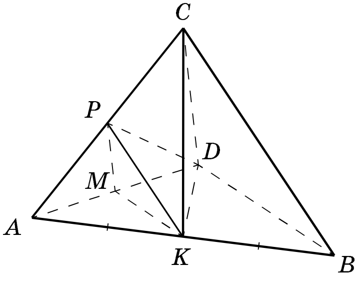


Рис. 23

две равных пирамиды именно таким образом. И наконец, любую пирамиду, описанную в пункте г, можно разрезать на две равных пирамиды из пункта б. Например, плоскость KPM, где M — середина AD, делит пирамиду $AKDP$ таким образом. Из наших рассуждений следует утверждение задачи. В самом деле, назовем для краткости пирамиды, соответствующие пунктам б, в и г, пирамидами 1, 2 и 3-го типов. Мы получили, что любую пирамиду 1-го типа можно разрезать на две равные пирамиды 2-го типа, любую пирамиду 2-го типа — на две равные пирамиды 3-го типа и, наконец, любую пирамиду 3-го типа — на две равные пирамиды 1-го типа. Следовательно, пирамиду 1-го типа можно разрезать на две равные пирамиды 2-го типа, на четыре равные пирамиды 3-го типа и на восемь пирамид 1-го типа. Аналогичные утверждения верны и для пирамид 2-го и 3-го типов.

Дополнительные задачи

1. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 и 8 см. Каждое боковое ребро равно 13 см. Найдите высоту пирамиды. (*Ответ:* 12 см.)

2. Известно, что боковые ребра четырехугольной пирамиды равны между собой и вершина проектируется в точку пересечения диагоналей основания. Какой вид имеет основание? (Укажите название.) (*Ответ:* прямоугольник.)

3. Верно ли, что у правильной пирамиды равны все двугранные углы? (*Ответ:* нет.)

4. Боковые ребра треугольной пирамиды равны между собой и равны гипотенузе прямоугольного треугольника, лежащего в ее основании. Гипотенуза равна 12 см. Найдите высоту пирамиды. (*Ответ:* $6\sqrt{3}$ см.)

5. Площадь основания пирамиды равна 150 см^2, а площадь сечения, параллельного основанию, равна 54 см^2. Расстояние между плоскостью основания и плоскостью сечения равна 14 см. Найдите высоту пирамиды. (*Ответ:* 35 см.)

6. Высота пирамиды равна 16 см, а площадь основания 512 $см^2$. На каком расстоянии от основания находится плоскость сечения, если площадь сечения равна 50 $см^2$? (*Ответ:* 11 см.)
7. Основаниями усеченной пирамиды служат правильные треугольники со сторонами 5 и 3 см. Одно из боковых ребер равно 1 см и перпендикулярно плоскостям основания. Найдите боковую поверхность этой усеченной пирамиды. (*Ответ:* 16 $см^2$.)

Замечание. При решении этой задачи учитель должен объяснить учащимся смысл понятия *усеченная пирамида,* поскольку оно отсутствует в учебнике.

2.6. Призма, параллелепипед

В этом параграфе дается определение призмы и ее основных элементов (основания, боковые грани, боковые ребра). Дается определение параллелепипеда (как частный случай призмы), прямой и правильной призмы и, наконец, определение прямоугольного параллелепипеда. Формулируются и доказываются три теоремы: свойство диагоналей параллелепипеда, свойство диагоналей прямоугольного параллелепипеда и теорема Пифагора для прямоугольного параллелепипеда.

Теория этого параграфа достаточно проста и может быть вся изучена на одном уроке. С другой стороны, призмы (главным образом треугольные и четырехугольные) и параллелепипеды являются (вместе с пирамидами) основными видами многогранников, изучаемыми в курсе, и поэтому следует уделить достаточно много времени на отработку технических умений и стандартных приемов, используемых при работе с этими многогранниками, иными словами, уделить достаточное время решению задач по теме этого параграфа.

Учащиеся должны

знать: определения призмы, параллелепипеда, прямой призмы, правильной призмы, прямоугольного параллелепипеда, формулировки и доказательства теорем о свойствах диагоналей параллелепипедов и теоремы Пифагора для прямоугольного параллелепипеда;

уметь: строить изображения призм и параллелепипедов, указывать их элементы, применять теоремы для решения простейших задач (по двум элементам для правильной призмы и по трем для прямоугольного параллелепипеда находить другие элементы).

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Теория. Решение задач 4, 5 учебника.

Задание на дом: задачи 1, 2, 3, 6 учебника.

Урок 2. Решение задач 7, 8, 9, 13, 14, 19 а учебника.

Задание на дом: задачи 10, 11, 12, 19 б учебника.

Урок 3. Решение задач 19 в, 20, 24 а, 25 а, б, в, г.

Задание на дом: задачи 15, 24 б, 26 учебника.

Урок 4. Задачи 17, 18 а, б, 22, 23.

Задание на дом: задачи 28, 29 учебника.

Урок 5. Задачи 21, 27, 30, 31.

Задание на дом: 16, 32 учебника.

Урок 6. Подготовка к контрольной работе. Можно использовать дополнительные задачи и вопросы для беседы.

Урок 7. Контрольная работа № 3.

Указания к решению задач учебника

1. См. рисунок 24.

2. См. рисунок 25.

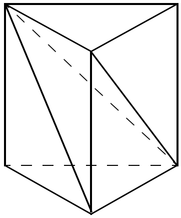


Рис. 24

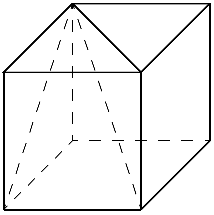


Рис. 25

3. У n-угольной пирамиды имеется $n + 1$ вершина, $2n$ ребер и $n + 1$ грань, т. е. указанная сумма равна $4n + 2$. У n-угольной призмы соответственно $2n$ вершин, $3n$ ребер и $n + 2$ грани, т. е. указанная сумма равна $6n + 2$. Таким образом, в случае а данный многогранник является 25-угольной пирамидой, а в случае б — 17-угольной призмой.

4. $\sqrt{3}$.

5. Исправить условие. Сколько существует различных параллелепипедов, шесть из восьми вершин которых совпадают с концами данных отрезков?

6. $\sqrt{1,5}$.

7. Рассмотрим сечение нашего параллелепипеда, проходящее через его две диагонали. Сечением будет прямоугольник. Угол между диагоналями этого прямоугольника (он же угол между соответствующей парой диагоналей параллелепипеда) в два раза больше угла, образованного его диагональю с большей стороной прямоугольника.

8. $\sqrt{14}$.

9. $\sqrt{5}$.

11. Рассмотрим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пара тетраэдров $ABCC_1$ и $DA_1B_1D_1$ обладает указанным свойством.

12. См. рисунок 26.

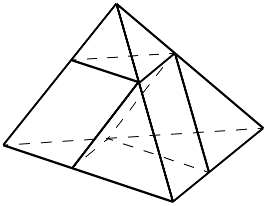


Рис. 26

13. $\sqrt{\dfrac{m^2 + n^2 + p^2}{2}}$.

15. 1 : 2. Рассмотрим параллелограмм AA_1C_1C. Указанная плоскость проходит через середину AC_1.

16. Рассмотрим, например, две треугольные призмы с равными основаниями, боковые ребра которых имеют различный наклон к основанию, а затем поставим одну на другую, т. е. совместим нижнее основание одной с верхним основанием другой.

17. Боковые грани двух соседних пирамид, имеющие общее ребро (оно же — ребро куба), лежат в одной плоскости, а значит, они образуют одну грань у получившегося многогранника. Таким образом, у этого многогранника все грани — равные ромбы. Нетрудно убедиться, что он является выпуклым и удовлетворяет всем условиям определения, данного в предыдущей задаче. Также понятно, что этот многогранник не является призмой.

18. а) Пусть ребро куба равно x. Проведем через грань куба, не лежащую в основании пирамиды, плоскость. Эта плоскость пересечет пирамиду по квадрату со стороной $a\dfrac{h-x}{h}$. Вершины рассматриваемой грани куба лежат на сторонах этого квадрата. Следовательно, $x \leqslant a\dfrac{h-x}{h}$ и $x\sqrt{2} \geqslant a\dfrac{h-x}{h}$. Отсюда найдем, что ребро куба может принимать любые значения от $\dfrac{ah}{a+h\sqrt{2}}$ до $\dfrac{ah}{a+h}$. В пункте б ответ один, поскольку в правильный треугольник квадрат можно вписать единственным образом: $\dfrac{ah\sqrt{3}}{a\sqrt{3}+(2+\sqrt{3})h}$.

19. а) Найдем сначала угол между двумя диагоналями, выходящими из концов ребра длиной a. Соединив концы этого ребра с центром параллелепипеда, получим равнобедренный треугольник с основанием a и боковыми сторонами, равными $d = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Угол при вершине этого треугольника равен углу между соответствующими диагоналями. И он равен $2\arcsin\dfrac{a}{2d} = 2\operatorname{arctg}\dfrac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}$. Точно так же находятся остальные углы между диагоналями.

20. $\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}+c^2} + \sqrt{\dfrac{a^2}{4}+b^2+\dfrac{c^2}{4}} + \sqrt{a^2+\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{c^2}{4}}$.

Каждая из сторон треугольника является диагональю параллелепипеда, две стороны которого вдвое меньше сторон исходного, а третья — равна стороне исходного параллелепипеда.

21. Решим сначала следующую задачу. Через данную точку P провести прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые a и b. Искомая прямая является линией, по которой пересекаются две плоскости: первая проходит через P и a, а вторая — через P и b. Задача не имеет решения, если эта линия пересечения параллельна одной из данных прямых. Это имеет место, если первая плоскость параллельна прямой b или вторая плоскость параллельна прямой a. Таким образом, задача не имеет решения, если точка P принадлежит одной из двух плоскостей, проходящих через одну из данных прямых параллельно другой. Используя полученный результат, получим ответ: а) точки A и C_1; б) точки, делящие AC_1 на три равные части. (Плоскость A_1BD параллельна B_1C, а плоскость B_1CD_1 параллельна A_1B. Эти плоскости делят AC_1 на три равные части.)

22. Пусть неизвестное ребро данного параллелепипеда разделено на отрезки x и y ($x < y$). У нас получились два прямоугольных параллелепипеда с ребрами 1, 2, x и 1, 2, y. Эти параллелепипеды могут быть подобны, если x — наименьшее ребро в первом, а y — наибольшее ребро в другом параллелепипеде и при этом $\frac{x}{1} = \frac{1}{2} = \frac{2}{y}$ (соответствующие ребра пропорциональны). Таким образом, $x = 0{,}5$, $y = 4$. Искомое ребро равно 4,5.

23. Пусть P — середина KM, F — проекция P на AC_1 (рис. 27). Имеем: $A_1P = PM = x\frac{\sqrt{2}}{2}$, $PC_1 = \sqrt{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right)$. Из подобия треугольников PFC_1 и AA_1C най-

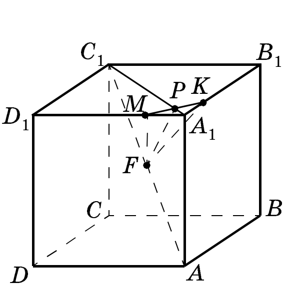


Рис. 27

дем $PF = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(1 - \frac{x}{2}\right)$. Но $\frac{PM}{PF} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Заменяя PM и PF найденными выражениями, найдем $x = \dfrac{2}{1 + \sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$.

24. а) Поскольку BB_1C_1C — параллелограмм, точку C (изображение точки C) можно построить. б) Обозначим середины данных в условии ребер соответственно через K, L, M и P. Проведем через P прямую, параллельную KM, и отложим на этой прямой по разные стороны от P отрезки, равные половине KM. Получим изображения вершин A_1 и C_1 рассматриваемой призмы.

25. Во всех пунктах формально возможны два решения, в зависимости от того, какие ребра являются видимыми, а какие нет (для однозначности достаточно указать одно невидимое ребро). Рассмотрим пункты г и д. Пункт г. Обозначим данные точки соответственно K, L, M, N. Сначала построим точку P — середину AD ($KLMP$ — параллелограмм). NP параллелен и равен ребру AA_1. Затем строим середины ребер AB и BC. Для этого проведем через точки K и L прямые, параллельные NP, и отложим на них в нужном направлении отрезки, равные половине NP. Зная середины изображения середин сторон параллелограмма $ABCD$, мы можем построить изображение самого параллелограмма. Пункт д. Рассмотрим параллелограмм с вершинами в середине данного ребра AB и всех ему параллельных ребер. Мы имеем изображение одной вершины этого параллелограмма (середина AB) и середин двух его противоположных сторон (центры граней параллелепипеда). Возникает несложная планиметрическая задача: построить параллелограмм, если на плоскости отмечены три точки — одна его вершина и середины двух противоположных этой вершине сторон.

26. Плоскости A_1BC и AB_1C пересекаются по прямой, проходящей через C и центр противоположной грани, т. е. у треугольников A_1BC и AB_1C_1, медианы, выходящие из вершины C, совпадают. Таким образом, у любых двух треугольников, задающих плоскости, есть совпадающие медианы. Следовательно, у этих треугольников совпадают точки пересечения медиан и эта общая точка и есть точка пересечения данных плоскостей. Изображением точки M будет являться точка пересечения медиан на изображении любого из указанных в условии треугольника. Расстояния до оснований призмы будут равны $\frac{h}{3}$ и $\frac{2h}{3}$.

27. Понятно, что поверхность полученного многогранника образована тремя боковыми гранями исходной пирамиды и тремя симметричными им плоскостями, т. е. она образована шестью попарно параллельными плоскостями. Получившееся тело является параллелепипедом. Докажем, что ребра этого параллелепипеда в три раза меньше соответствующих боковых ребер треугольной пирамиды. Рассмотрим правильную треугольную пирамиду $SABC$ (рис. 28), SQ — высота этой пирамиды, D — середина BC. Проведем через Q прямую, параллельную SD, и обозначим через F точку ее пересечения с ребром SA; F является точкой, в которой плоскость, симметричная плоскости SBC относительно O, пересекает ребро SA. Имеем: $SF = SA\frac{QD}{AD} = \frac{1}{3}SA$, что и требовалось. Отсюда получаем, что площадь каждой грани параллелепипеда равна $\frac{2}{9}S$, а вся площадь поверхности параллелепипеда $\frac{4}{3}S$.

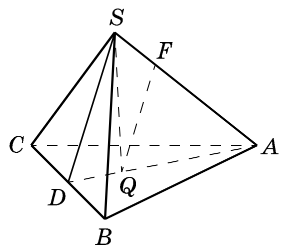


Рис. 28

28. Докажем сначала вспомогательное утверждение. Пусть две перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой p, а две перпендикулярные прямые m и n принадлежат плоскостям α и β. Тогда хотя бы одна из этих прямых перпендикулярна p. Докажем это утверждение. Предположим, что прямая m, лежащая в плоскости α, не перпендикулярна p (рис. 29). Спроектируем m на плоскость β. Проекцией m будет прямая p. По теореме о трех перпендикулярах прямая n должна быть перпендикулярна p. Из этого вспомогательного утверждения следует, что какая-то сторона получившегося квадрата должна быть параллельна ребру параллелепипеда, а следовательно, равна ему. Понятно, что сторона квадрата не может равняться наименьшему ребру параллелепипеда. Поскольку в прямоугольнике со сторонами a и c всегда можно провести отрезок длины b с концами на его сторонах ($b < c$), всегда существует сечение, являющееся квадратом со стороной b. Кроме того, если диагональ прямоугольника со сторонами a и b не меньше c, то существует отрезок с концами на сторонах этого прямоугольника длиной c, а следовательно, и сечение, являющееся квадратом со стороной c. Таким образом, если $a^2 + b^2 < c^2$, то задача имеет один ответ b, в остальных случаях — ответов два: b и c.

29. Проекцией параллелепипеда является шестиугольник $A_1B_1BCDD_1$ (рис 30), площадь которого в два раза больше площади треугольника AB_1D, поскольку шестиугольник составлен из трех параллелограммов, а треугольник из трех «половинок» этих параллелограммов.

30. Рассмотрим проекцию нашего параллелепипеда (рис. 30). Поскольку площадь проекции — площадь

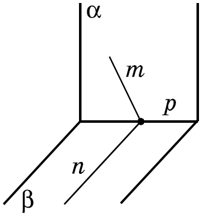


Рис. 29

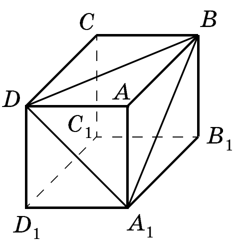


Рис. 30

шестиугольника $A_1B_1BCDD_1$ в два раза больше площади треугольника AB_1D, площадь проекции будет наибольшей, когда наибольшей будет площадь проекции треугольника AB_1D. Наибольшей она будет, когда плоскость, на которую проектируется параллелепипед, будет параллельна плоскости этого треугольника. В этом случае площадь проекции треугольника AB_1D равна площади этого треугольника, а площадь проекции параллелепипеда — в два раза больше. Стороны треугольника AB_1D известны (они равны диагоналям граней параллелепипеда), и его площадь легко находится. При этом лучше не пользоваться формулой Герона, а найти сначала по теореме косинусов косинус какого-то угла, затем синус этого угла, а затем и площадь треугольника. Можно также воспользоваться пунктом 2) из задачи 20 к § 1.7. (*Ответ*: $\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$.)

31. Пусть плоскость пересекает ребро AB куба. Обозначим через M середину противоположного ребра. Один из двух отрезков AM или BM принадлежит одному и тому же многограннику. Но длина каждого из этих отрезков равна $\frac{3}{2}$. Из этого следует утверждение задачи.

32. Пусть пространство обычным образом разбито на кубы. Рассмотрим множество точек, состоящее из вершин этих кубов и центров этих кубов. Рассмотрим одну точку и поставим ей в соответствие все точки, которые удалены от нее не дальше, чем от любой другой точки нашего множества. Тогда все пространство разобьется на многогранники, описанные в условии задачи. У каждого многогранника 14 граней — 6 квадратов и 8 правильных треугольников.

Дополнительные задачи

1. Докажите, что если одна из граней прямоугольного параллелепипеда является квадратом, то его диаго-

наль (любая) образует равные углы с непараллельными этой грани гранями.

2. Боковое ребро прямой четырехугольной призмы равно 5 см, стороны основания 6 и 8 см, одна из диагоналей основания равна 12 см. Найдите диагонали параллелепипеда. (*Ответ:* 13 и 9 см — основания параллелограмма.)
3. Возможно ли, чтобы хотя бы одно диагональное сечение прямоугольного параллелепипеда было квадратом? А могут ли два диагональных сечения прямоугольного параллелепипеда быть квадратами? (*Ответ:* да, нет.)
4. Каждое из ребер правильной шестиугольной призмы равно 1. Найдите диагонали призмы. (*Ответ:* $\sqrt{5}$ и 2 — надо найти диагонали правильного шестиугольника.)
5. Определите полную поверхность призмы, боковые грани которой квадраты, а основание — правильный треугольник, вписанный в окружность радиуса R. $\left(\textit{Ответ: } R^2\left(9 + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right).\right)$
6. Боковое ребро правильной шестиугольной призмы равно a, среди диагоналей смежных боковых граней есть пара перпендикулярных (принадлежащих разным граням). Определите полную поверхность призмы. (*Ответ:* $6a^2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.)
7. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно a, среди диагоналей двух боковых граней есть пара перпендикулярных (принадлежащих разным граням). Определите полную поверхность призмы. (*Ответ:* $a^2(3\sqrt{2} + \sqrt{3})$.)
8. Основанием параллелепипеда служит ромб со стороной 60 см. Плоскость диагонального сечения, проходящего через бóльшую диагональ основания, перпендикулярна плоскости основания. Его площадь равна 72 дм^2. Найдите меньшую диагональ основания, если боковое ребро равно 80 см и образует с плоскостью основания угол в $60°$. (*Ответ:* 60 см.)

9. Три диагонали параллелепипеда попарно перпендикулярны. Их длины a, b и c. Найдите длину четвертой диагонали. (*Ответ:* $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.)

10. Двугранные углы между соседними боковыми гранями правильной пирамиды равны 100°. Какая это пирамида? (*Ответ:* треугольная или четырехугольная.)

Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами 7 и 24 см. Боковые ребра образуют с высотой пирамиды углы, равные 30°. Найдите боковые ребра.

2. Все ребра правильной треугольной призмы равны a. Найдите площадь сечения, проходящего через диагональ одной из ее граней и середину не принадлежащего этой грани ребра.

3. В основании пирамиды лежит многоугольник с периметром $2p$, высота пирамиды равна h, двугранные углы при основании имеют величину α. Найдите площадь основания.

4. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Известно, что площадь треугольника BDA_1 равна S. Найдите площадь сечения, проходящего через середины ребер A_1D_1, DC и BB_1.

5. Сторона основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $ABCDE$ равна 2, боковые ребра равны 3. Боковая грань ABE служит основанием треугольной пирамиды $ABEF$, расположенной вне исходной пирамиды, причем $AF = BF = 3$, $EF = 2$. Сколько граней имеет многогранник $ABCDEF$? Как он называется? Через точку K на ребре EF такую, что $EK = 1$, проведена плоскость, перпендикулярная EF. Найдите площадь сечения.

Вариант 2

1. Боковые ребра треугольной пирамиды равны 2. В основании лежит треугольник, одна сторона которого равна 3, а противолежащий угол равен 60°. Найдите высоту пирамиды.
2. Боковое ребро правильной треугольной призмы в два раза больше стороны основания. Проведено сечение через диагональ боковой грани призмы и середину противоположного ребра. Найдите наибольший угол у получившегося в сечении треугольника.
3. В основании пирамиды лежит многоугольник площадью S и периметром P. Все двугранные углы при основании равны β. Найдите высоту пирамиды.
4. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Известно, что площадь сечения, проходящего через середины AB, AA_1 и AD, имеет площадь q. Найдите площадь сечения, проходящего через середины ребер DD_1, A_1B_1 и BC.
5. Сторона основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $ABCDE$ равна 3, боковые ребра равны 4. Боковая грань ABE служит основанием треугольной пирамиды $ABEF$, расположенной вне исходной пирамиды, причем $AF = BF = 4$, $EF = 3$. Сколько граней имеет многогранник $ABCDEF$? Как он называется? Через точку K на ребре EF такую, что $EK = 2$, проведена плоскость, перпендикулярная EF. Найдите площадь сечения.

Вопросы к главе 2

1. Может ли сумма плоских углов трехгранного угла равняться 400°?

2. Куда проектируется вершина пирамиды с равными боковыми ребрами?

3. Сформулируйте теорему, выражающую свойство пирамиды с равными углами между основанием и боковыми гранями.

4. Сформулируйте теорему о свойстве пирамиды с равными боковыми ребрами.

5. Какое наименьшее число граней (вершин, ребер) может иметь: а) пирамида; б) призма?

6. Возможно ли, чтобы все грани пирамиды имели бы равное число сторон? Какая это пирамида? Те же вопросы для призмы.

7. Какое наименьшее число пар соответственно параллельных сторон может быть у призмы?

8. Все диагонали параллелепипеда равны между собой. Обязательно ли этот параллелепипед является прямоугольным?

9. Каким неравенствам должны удовлетворять плоские углы трехгранного угла?

10. Какая пирамида называется правильной?

11. Возможно ли, чтобы у призмы было ровно две пары соответственно параллельных граней?

12. В основании пирамиды лежит правильный многоугольник. Обязательно ли эта пирамида является правильной?

13. Сколько сторон может иметь многоугольник, являющийся сечением 100-угольной пирамиды? 100-угольной призмы?

14. Может ли двугранный угол между соседними боковыми гранями правильной призмы равняться $100°$?

15. Приведите пример свойства, которое имеется у любой правильной пирамиды, но из которого еще не следует, что пирамида является правильной.

16. Все ребра треугольной призмы равны между собой. Следует ли из этого, что данная призма является правильной?

17. Назовите какие-нибудь характеристические признаки правильной пирамиды.

Глава 3

Круглые тела

В данной главе вводятся цилиндр, конус, шар, а также некоторые связанные с ними понятия. Это вполне соответствует традициям преподавания геометрии в России. (В некоторых курсах изучается также усеченный конус.) Указанные тела рассматриваются с двух точек зрения: как тела, ограниченные некоторыми поверхностями, и как тела вращения. Большая часть главы посвящена двум темам: «касание круглых тел (между собой, с плоскостью и прямой)» и «вписанные и описанные многогранники».

Как и в предыдущей главе, теоретическая часть невелика по объему, основные определения апеллируют к здравому смыслу и интуиции. С теоретической и практической точек зрения основными являются два последних параграфа. В них дается несколько теорем, важных для дальнейшего построения геометрической теории и широко используемых при решении типичных стереометрических задач.

3.1. Основные понятия

В этом параграфе определяются конус и цилиндр. При этом говорится о конусах и цилиндрах общего вида, среди которых выделяются в качестве основных прямые круговые конус и цилиндр. Конусы и цилиндры именно этого вида будут рассматриваться в дальнейшем. Даются определения шара и сферической поверхности.

3.2. Тела вращения

В этом параграфе идет речь об одном специальном виде круглых тел — телах вращения. Оказывается, что прямые круговые цилиндр и конус могут рассматриваться и как тела вращения. Шар также является телом вращения.

Каждое тело вращения имеет «ось» и «осевое сечение».

В параграфе доказываются две теоремы. Одна — широкоизвестная, о сечении шара плоскостью. Вторая теорема о кратчайшем пути на сфере в большинстве известных курсов отсутствует. Эта вторая теорема играет особую роль. Учащиеся получают очень важное знание с точки зрения их общекультурного развития, знакомятся с понятием «геодезической» координаты (хотя сам термин в учебнике отсутствует).

В первых двух параграфах почти отсутствует теоретический материал, используемый в решении задач.

В результате изучения этих параграфов учащиеся должны

знать: что такое цилиндр, конус (прежде всего, прямые круговые цилиндр и конус), шар, основные понятия, связанные с этими телами, формулировку и доказательство теоремы о сечении шара плоскостью, свойство кратчайшего пути на сфере;

уметь: изображать цилиндр и конус, их осевые сечения и различные проекции, применять свойства цилиндра, конуса и шара, следующие из определений, и теоремы о сечении шара при решении простейших задач.

Методические рекомендации к изучению материала

Изучение § 3.1 и 3.2 (в части, касающейся цилиндра и конуса) можно объединить во времени и одновременно рассматривать конус и цилиндр с обеих позиций, заявленных в этих параграфах. Всю теорию (до теорем о свойствах шара) можно уложить в один урок. На втором же уроке рассмотреть теорему о сечении шара плоскостью, а в сильных классах и более детально изучить теорему 3.2 о кратчайших путях на сфере (в слабых можно ограничиться знакомством с формулировкой).

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Теория § 3.1 и 3.2 до теоремы 3.3. Задачи 1, 7 из § 3.2 учебника.

Задание на дом: § 3.1 и 3.2 (теория) до теоремы 3.1, задачи 2, 4 учебника.

Урок 2. Теорема 3.1 (и 3.2 в сильном классе). Задачи 3, 6, 8 учебника.

Задание на дом: § 3.1 и 3.2 (повторить целиком), задачи 5, 9 учебника.

Указания к решению задач учебника

1. $\sqrt{l^2 - h^2}$; $h\sqrt{l^2 - h^2}$.

2. Два конуса с общим основанием.

3. 120°.

4. 5π.

5. Из условия следует, что радиус основания конуса равен 1, высота конуса также равна 1. В указанном сечении будет равнобедренный треугольник, высота которого равна $\frac{1}{\sin\alpha}$, а основанием является хорда основания конуса, удаленная от центра основания на расстояние, равное $\operatorname{ctg}\alpha$. Длина хорды равна $2\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\alpha}$. Площадь сечения равна $\frac{\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\sin^2\alpha}$.

6. Понятно, что искомое отношение не зависит от радиуса круга. Будем считать для удобства вычислений, что радиус круга равен 4, тогда у каждого конуса образующая равна 4, радиусы оснований соответственно 1 и 3, а высоты $\sqrt{16 - 1} = \sqrt{15}$ и $\sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$. Искомое отношение равно $\sqrt{\frac{15}{7}}$.

7. $4\pi\sqrt{3}$.

8. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

9. Пусть S — площадь сечения. Поскольку проекция сечения на плоскость основания цилиндра совпадает с самим основанием, получаем равенство $S\cos\alpha = \pi r^2$. Таким образом, $S = \dfrac{\pi r^2}{\cos\alpha}$.

10. Телом вращения будет являться «цилиндрическое кольцо» — множество точек, находящихся между боковыми поверхностями двух цилиндров. Высота каждого цилиндра равна a, радиус внутреннего цилиндра равен h, а внешнего — расстоянию от оси вращения до параллельной ей стороны квадрата: $\sqrt{h^2 + \dfrac{a^2}{4}}$. Площадь осевого сечения равна $a(\sqrt{4h^2 - a^2} - 2h)$.

11. Телом вращения является цилиндр с высотой a и радиусом основания $\sqrt{h^2 + \dfrac{a^2}{4}}$, из которого удалены два конуса, вершины которых совпадают с центром цилиндра, а основания принадлежат основаниям цилиндра и равны h. (См. предыдущую задачу.) Осевое сечение имеет вид, изображенный на рисунке (рис. 31), его площадь $a\,(\sqrt{4h^2 + a^2} - 2h)$.

12. Пусть O — центр основания конуса (рис. 32). Плоскость, проходящая через вершину конуса и точки A и B, пересечет плоскость основания конуса по

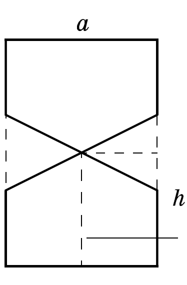


Рис. 31

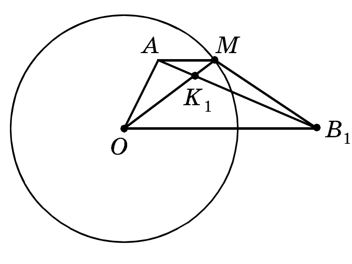


Рис. 32

прямой, параллельной OB_1 (это следует из условия задачи). Проведя эту прямую, мы построим изображение OM образующей конуса, которую пересекает прямая AB ($OAMB_1$ — трапеция, AM — одно из оснований). Точка пересечения диагоналей этой трапеции (точка K_1) и является изображением нужной точки K.

13. Любое сечение, проходящее через вершину конуса, является равнобедренным треугольником, боковые стороны которого равны образующим конуса. Если φ — угол между боковыми сторонами этого треугольника, то его площадь равна $\frac{1}{2}l^2\sin\varphi$. При этом $0 < \varphi \leqslant \alpha$, где α — угол в осевом сечении. Теперь ясно, что если $\alpha \leqslant 90°$, то площадь осевого сечения является наибольшей. Если же $\alpha > 90°$, то наибольшую площадь имеет сечение, являющееся равнобедренным прямоугольным треугольником ($\varphi = 90°$). Значит, $\alpha > 90°$ и $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 150°$.

14. Проведем в основаниях цилиндра два диаметра AB и CD, параллельные плоскости, на которую проектируется цилиндр. Четырехугольник $ABCD$ представляет собой осевое сечение цилиндра (т. е. это прямоугольник). При этом проекция цилиндра является фигурой, составленной из трех частей: проекции четырехугольника $ABCD$, которая также является прямоугольником, и проекции двух «половинок» оснований цилиндра (рис. 33). Если плоскость четырехугольника $ABCD$ образует угол φ с плоскостью проекции, то плоскости оснований цилиндра будут составлять угол $90° - \varphi$. Согласно теореме о площади проекции (теорема 1.19), получаем, что площадь проекции цилиндра равна $2rh\cos\varphi + \pi r^2\sin\varphi$. Далее мы можем воспользоваться следующим утверждением: наибольшее значение функции $A\cos\varphi + B\sin\varphi$ равно $\sqrt{A^2 + B^2}$. (Можно предложить следующее чисто

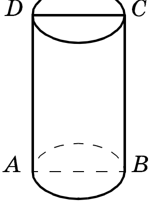


Рис. 33

геометрическое доказательство этого утверждения. Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами A и B и проведем через вершину прямого угла прямую, пересекающую гипотенузу и образующую угол φ с катетом, равным B. Сумма расстояний от вершин острых углов нашего треугольника до этой прямой равна $A\cos\varphi + B\sin\varphi$ и, очевидно, не превосходит гипотенузы, длина которой $\sqrt{A^2 + B^2}$. Наибольшее значение достигается, когда построенная прямая перпендикулярна гипотенузе.) Таким образом, наибольшее значение площади проекции цилиндра равно $r\sqrt{4h^2 + \pi^2 r^2}$.

Дополнительные задачи

1. Высота конуса равна h. На каком расстоянии от вершины следует провести плоскость, параллельную основанию конуса, чтобы площадь сечения была в два раза меньше площади основания конуса? $\left(\textit{Ответ: } \dfrac{h}{\sqrt{2}}.\right)$
2. Радиус основания цилиндра равен 37 см, высота 24 см. Плоскость, параллельная оси цилиндра, пересекает его по квадрату. На каком расстоянии эта плоскость находится от оси цилиндра?
   (*Ответ:* 35 см.)
3. Через точку A, лежащую на сфере, ограничивающей шар радиуса r с центром в O, проведена плоскость, образующая угол 30° с OA. Определите площадь полученного сечения. $\left(\textit{Ответ: } \dfrac{3\pi r^2}{4}.\right)$

3.3. Касание круглых тел с плоскостью, с прямой и между собой

В параграфе дается определение плоскости, касательной к сфере, и доказывается теорема о существовании и единственности плоскости, касающейся сферы в данной точке сферы. При этом формулируется (и доказывается) характерное свойство касательной плоскости (перпендикулярность соответствующему радиусу).

В параграфе объясняется также смысл других терминов, относящихся к различным случаям касания (сфер, конусов, цилиндров между собой, а также с плоскостями и прямыми).

В результате изучения параграфа учащиеся должны

знать: определение плоскости, касающейся сферы, формулировку и доказательство соответствующей теоремы, что означают такие понятия, как касание двух сфер, касание между прямой и поверхностью круглого тела и т. д.;

уметь: в конкретных ситуациях определять условия, при которых имеет место нужный случай касания; строить соответствующие изображения (в том числе и так называемые «скелетные» чертежи, т. е. чертежи, на которых нет изображений самих круглых тел, а выделены некоторые характеристические элементы, расположение которых определяет нужный вид касания).

Методические рекомендации к изучению материала

Теоретический материал параграфа невелик по объему, изложен достаточно концентрированно. Его надо рассмотреть на одном уроке.

При доказательстве теоремы следует обратить внимание на то, что теорема содержит два взаимно обратных утверждения:

1. Плоскость, определяемая условиями теоремы (перпендикулярная радиусу), является касательной (существование касательной плоскости).

2. Если плоскость касается сферы, то она перпендикулярна радиусу (единственность касательной плоскости).

Следует подробнее остановиться на замечании о возможности внутреннего и внешнего касания круглых тел, данном в конце параграфа, и привести различные примеры, иллюстрирующие обе эти возможности.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Теория § 3.3. Решение задач 1, 2, 4 учебника.

Задание на дом: § 3.3, задачи 3, 5 учебника.

Урок 2. Решение задач 7 а, б, 8 а.

Задание на дом: задачи 6 а, б, в, 7 в, г учебника.

Указания к решению задач учебника

1. Возможны два случая: плоскость пересекает отрезок AB и пересекает его продолжение. В обоих случаях $AM : BM = 2 : 3$. Соответственно возможны два *ответа:* 2,8 и 14.

2. а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\sqrt{3}$.

3. $\frac{1}{4}$.

4. Окружность радиуса r, расположенная в плоскости, параллельной плоскости α и удаленной от нее на расстояние r.

5. Центры этих шаров образуют прямую линию, параллельную ребру данного двугранного угла и принадлежащую биссекторной плоскости этого угла.

6. Оба множества представляют собой равные окружности, расположенные в параллельных плоскостях. Расстояние между плоскостями равно r. Радиус каждой окружности равен $2\sqrt{Rr}$. Третье множество — окружность радиуса $2\sqrt{Rr}\,\frac{R}{R+r}$, тоже расположенная в плоскости, параллельной данной.

7. Проведем плоскость, содержащую прямые AB и AC. Эта плоскость пересекает сферу по окружности. AB — касательная к этой окружности. Точки C и D

этой окружности принадлежат секущей, проходящей через A. Теперь утверждение задачи следует из соответствующей теоремы планиметрии.

8. Обозначим через φ угол BAC. Пусть далее, M — точка касания указанной прямой с шаром, имеющим центр в точке B. Тогда $\angle BAM = \arcsin \frac{2}{3} = \alpha$, а $\angle CAM$ будет равен β или $\pi - \beta$, где $\beta = \arcsin \frac{3}{4}$. Таким образом, плоские углы при вершине A трехгранного угла с ребрами AB, AC, AM равны (1) φ, α, β или (2) φ, α, $\pi - \beta$. Понятно, что для каждого такого трехгранного угла, если он существует, прямая AM касается обоих шаров. Только в случае (1) точки касания расположены по одну сторону от точки A и, следовательно, $MK = AK - AM = \sqrt{7} - \sqrt{5}$, в случае (2) $MK = \sqrt{7} + \sqrt{5}$. Заметим также, что три данных угла могут являться плоскими углами трехгранного угла, если наибольший из этих углов меньше суммы двух других. (Полная аналогия с треугольником: из трех отрезков можно составить треугольник, если наибольший меньше суммы двух других.) В нашей ситуации достаточно, чтобы наибольший угол не превосходил суммы двух других, поскольку AB, AC и AM могут быть в одной плоскости. Рассмотрим теперь пункты нашей задачи.

а) По теореме косинусов $\cos \varphi = \frac{7}{8}$. В случае (1) наибольшим является угол β. Надо проверить, что $\beta \leqslant \alpha + \varphi$. Так как все углы острые, то достаточно проверить выполнение неравенства $\cos \beta \geqslant \cos(\alpha + \varphi) = \cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi$ (*), где $\cos \beta = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \varphi = \frac{7}{8}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{15}}{8}$. Заменяя в неравенстве (*) все значения синусов и косинусов указанными числами, получим неравенство $\frac{\sqrt{7}}{4} \geqslant \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{7}{8} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{15}}{8}$ или после освобождения от знаменателя $6\sqrt{7} \geqslant 7\sqrt{5} - 2\sqrt{15}$. Возведя в квадрат, получим очевидное числовое неравенство. В случае (2) наибольшим будет угол $\pi - \beta$. Верно неравенство $\pi - \beta > \alpha + \varphi$. (Проверяется так же.) Этот случай невозможен. Для пункта б возможны оба варианта (1) и (2). В случае в возможен лишь вариант (2). Таким образом, получаем *ответ:* а) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$; б) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ или $\sqrt{7} + \sqrt{5}$; в) $\sqrt{7} + \sqrt{5}$.

9. Понятно, что если какая-то плоскость касается всех трех шаров, то и плоскость, симметричная ей относительно плоскости, в которой расположены центры шаров, также касается всех трех шаров (эти плоскости могут совпасть, если они перпендикулярны плоскости, содержащей центры шаров). Понятно также, что, вообще говоря, существует два типа касательных плоскостей: для одного типа центры шаров расположены по одну сторону от плоскости, а для другого — два центра с одной стороны, а два — с другой. Также понятно, что если плоскость делит отрезок, соединяющий центры двух шаров в отношении, равном отношению их радиусов (внутренним или внешним образом), и при этом касается одного шара, то она касается и другого шара. Перейдем к нашим пунктам. а) Здесь существует ровно две плоскости (первого типа), касающихся данных шаров; б) в этом случае плоскостей восемь — две первого типа и шесть — второго; в) если радиусы x не превосходят половины высоты правильного треугольника со стороной 11, т. е. $x < \frac{11}{2}\sqrt{3}$, то, как и в пункте б, различных плоскостей восемь; если $x = \frac{11}{2}\sqrt{3}$, то плоскости, разделяющие центры шаров, станут перпендикулярными плоскости треугольника и у нас будет две плоскости первого типа и три (а не шесть) плоскости второго типа. В этом случае *ответ* 5; в) если $x > \frac{11}{2}\sqrt{3}$, то плоскостей второго типа не будет. В этом случае *ответ* 2; г) докажем, что не существует плоскости, касающейся данных плоскостей так, что сфера радиуса 6 расположена по одну сторону от нее, а сферы радиусов 3 и 4 — по другую. Пусть центры сфер с радиусами 3, 4 и 6 находятся в точках A, B и C соответственно. Если бы указанная касательная плоскость существовала бы, то она должна была бы делить отрезки AC и BC в отношениях 1 : 2 и 2 : 3, т. е. проходить через точки K и L такие, что $CK = \frac{22}{3}$, $CL = \frac{33}{5}$. В треугольнике CKL знаем две стороны и угол между ними. Нетрудно найти расстояние от вершины C до прямой KL. Оно равно $33\sqrt{\frac{3}{91}} < 6$. Отсюда следует, что через KL нельзя провести плоскость, касающуюся шара радиуса 6 с центром в C. То есть в этом случае число различных касательных плоскостей равно 6. (Все другие существуют.)

10. Рассмотрим два шара с радиусами x и y, касающиеся между собой внешним образом и одной плоскости (рис. 34). Обозначения понятны из рисунка. $OQ = x + y$, $OK = x$, $QM = y$, $QL = |y - x|$, $KM = QL =$ $= \sqrt{OQ^2 - OL^2} = \sqrt{(x + y)^2 - (y - x)^2} = 2\sqrt{xy}$. Пусть теперь для определенности шары с радиусами x и y касаются плоскости треугольника в концах стороны длины a. Положим радиус третьего шара, равным z.

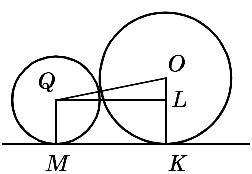


Рис. 34

Получаем систему $\begin{cases} 2\sqrt{xy} = a, \\ 2\sqrt{yz} = b, \\ 2\sqrt{zx} = c. \end{cases}$

Перемножая уравнения, найдем $8xyz = abc$. Но из второго уравнения $4yz = b^2$. Значит, $x = \frac{ac}{2b}$. Затем находим $y = \frac{ab}{2c}$, $z = \frac{bc}{2a}$.

3.4. Вписанные и описанные многогранники

В параграфе даются определения вписанных (в сферу) и описанных (около сферы) многогранников. При этом рассматриваются лишь выпуклые многогранники. Доказываются две важные теоремы о существовании и единственности у тетраэдра описанной и вписанной сферы. Рассматривается также вопрос о существовании описанной и вписанной сферы для цилиндра и конуса.

Несмотря на относительно небольшой теоретический объем параграфа, после его изучения мы имеем возможность значительно расширить тематику задач. Эта возможность максимально используется автором учебника. Часть задач, причем относительно небольшая, направлена на непосредственную отработку данной в параграфе теории. Большинство же задач предназначено для повторения пройденного материала, используя вновь появившиеся термины.

Методические рекомендации к изучению материала

Перед тем как приступить непосредственно к изучению теории этого параграфа, стоит напомнить учащимся (заодно и повторить) аналогичный теоретический материал из курса планиметрии: определения вписанного и описанного многоугольников; геометрические места точек, равноудаленных от концов отрезка или от сторон угла; существование и единственность описанной и вписанной окружности для треугольника и местонахождение центров описанной и вписанной окружности треугольника; свойства вписанных и описанных четырехугольников.

После такого повторения учащиеся без особого труда смогут самостоятельно дать определения понятий вписанного и описанного многогранника (описанной и вписанной сферы для многогранника). Перед началом изучения двух основных теорем параграфа целесообразно обсудить вопросы об определении геометрического места точек, равноудаленных от концов отрезка, в пространстве и геометрического места точек, равноудаленных от граней двугранного угла. После этого способ доказательства обеих теорем становится вполне прозрачным для учащихся.

Полезно обратить внимание учащихся на два утверждения (их можно получить как следствия из теорем 3.1 и 3.2, но можно и вывести непосредственно).

1. Около любой правильной пирамиды можно описать сферу, причем центр этой сферы расположен в точке пересечения высоты пирамиды и серединного перпендикуляра любого из ее боковых ребер.

2. В любую правильную пирамиду можно вписать сферу, причем центр этой сферы расположен в точке пересечения высоты пирамиды (или ее продолжения) и биссекторной плоскости любого двугранного угла при основании пирамиды.

После этого следует обсудить вопросы, связанные с существованием вписанных и описанных сфер для призмы (в частности, для правильной призмы), цилиндра и конуса.

Перед тем как приступить к решению задач, следует напомнить учащимся основные формулы, используемые для вычисления радиусов описанной и вписанной окружностей треугольника.

В результате изучения параграфа учащиеся должны

знать: определения вписанного и описанного многогранника, геометрические места точек в пространстве, равноудаленных от концов отрезка и от граней двугранного угла, формулировки и доказательства двух основных теорем;

уметь: находить центры и радиусы вписанной и описанной сферы данного многогранника, решать задачи на применение теории.

Примерное планирование изучения материала

Урок 1. Теоретический материал параграфа (по возможности весь; если не удастся, то часть можно перенести на 2-й урок), решить задачу 2.

Задание на дом: теория, задачи 1, 3 (1 а, б), 4 учебника.

Урок 2. Окончание теории, задачи 3 (1 в, г, д), 5.

Задание на дом: повторить теорию; задачи 3 (2 а, б, в, г, д) учебника.

Урок 3. Задачи 3 (3 а, б, в, г, д).

Задание на дом: задачи 8, 9, 10 учебника.

Урок 4. Задачи 6, 7, 11, 12.

Задание на дом: задачи 13, 16, 17 учебника.

Урок 5. Задачи 15, 18, 20.

Задание на дом: задачи 14, 19 учебника.

Урок 6. Резервный.

Урок 7. Контрольная работа № 4.

Указания к решению задач учебника

1. Радиус вписанного шара втрое меньше радиуса описанного шара и равен четверти высоты тетраэдра. Таким образом, радиус описанного шара равен $\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{6}}{4}a$, радиус вписанного шара равен $\frac{\sqrt{6}}{12}a$.

2. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

3. Каждая грань параллелепипеда является в этом случае параллелограммом, вписанным в окружность (любое сечение сферы есть окружность). Значит, каждая грань является прямоугольником, т. е. вписанный параллелепипед является прямоугольным параллелепипедом.

4. Пусть S — вершина пирамиды, A — одна из вершин основания, E — середина одной из сторон основания, O — центр основания (рис. 35).

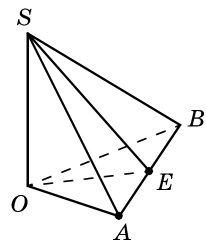


Рис. 35

а) Проведем диаметр описанного шара SD (рис. 36). Треугольник SAD — прямоугольный, в котором OA — высота, опущенная на гипотенузу. Следовательно, $SA^2 = SO \cdot SD$, откуда $2R = SD = \frac{SA^2}{SO}$ (1), где R — радиус описанного шара. Осталось для каждого отдельного случая (четырехугольной, треугольной и шестиугольной пирамиды) найти SO и из формулы (1) получить ответ. Будем иметь: 1) $\frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}$; 2) $\frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - \frac{4}{3}a^2}}$; 3) $\frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - a^2}}$. б) Рассмотрим прямоугольный треугольник SEO (рис. 37). Биссектриса угла SEO пересекает SO в точке Q, являющейся центром вписанного шара, при этом QO и является радиусом вписанного шара. По известной теореме о биссектрисе имеем: $\frac{SQ}{QO} = \frac{SE}{OE}$. Прибавляя к обеим частям равенства по 1, найдем $OQ = \frac{SO \cdot OE}{OE + SE}$ (2). Осталось теперь для каждого вида рассматриваемых пирамид выразить величины в правой части формулы (2) через данные величины. (При возможности упростить.) Получим:

1) $\frac{\sqrt{b^2 - \frac{1}{2}a^2} \cdot a}{\sqrt{4b^2 - a^2} + a}$; 2) $\frac{\sqrt{b^2 - \frac{1}{3}a^2} \cdot a}{\sqrt{12b^2 - 3a^2} + a}$; 3) $\frac{\sqrt{b^2 - a^2} \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{4b^2 - a^2} + a\sqrt{3}}$.

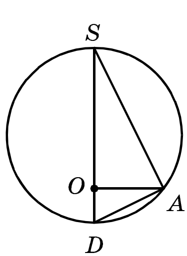


Рис. 36

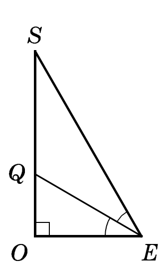


Рис. 37

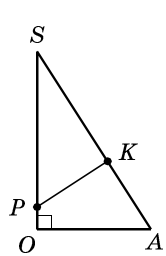


Рис. 38

в) Понятно, что сторон основания шар касается в серединах, а его центр P расположен на прямой SO. Если K — точка касания шара с ребром SA (рис. 38), то $AK = \frac{a}{2}$ (ввиду равенства касательных из A к шару. PK — радиус искомого шара). Из подобия треугольников SPK и SOA найдем $PK = \frac{OA \cdot SK}{SO}$ (3). Вновь выражая отрезки в правой части формулы (3) через данные величины, найдем *ответ:* 1) $\frac{a(2b-a)}{2\sqrt{2b^2-a^2}}$; 2) $\frac{a(2b-a)}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$; 3) $\frac{a(2b-a)}{2\sqrt{b^2-a^2}}$.

г) Этот случай рассматривается абсолютно аналогично предыдущему, и во всех ответах множитель $2b - a$ в числителе надо заменить на $2b + a$.

д) И этот случай рассматривается аналогично пункту в. Только на этот раз длина отрезка касательной от вершины A равна OA. (Здесь M — центр искомой сферы, L — точка касания с ребром SA, $SL = SA - OA$, ML — искомый радиус.) Имеем $ML = \frac{OA \cdot (SA - OA)}{SO}$ (4). По формуле (4) находим ответы: 1) $\frac{a(b\sqrt{2}-a)}{\sqrt{4b^2-2a^2}}$; 2) $\frac{a(b\sqrt{3}-a)}{\sqrt{9b^2-3a^2}}$; 3) $\frac{a(b-a)}{\sqrt{b^2-a^2}}$.

5. Радиус искомого шара равен радиусу окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием $2r$ и высотой h. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{hr}{r+\sqrt{h^2+r^2}} = \frac{r(\sqrt{h^2+r^2}-r)}{h}.\right)$

6. $2 - \sqrt{2}$.

7. Центр шара расположен посередине отрезка, соединяющего центры оснований призмы (если n — четно, то это центр призмы). $\left(\textit{Ответ}:\ \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{\sin^2\frac{\pi}{n}}}.\right)$

8. Боковое ребро призмы равно диаметру окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной 1, т. е. оно равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

9. Пусть $ABCD$ — одна из боковых граней призмы (AB — сторона основания призмы), P и O — точки касания вписанного шара с основаниями призмы, а L — точка касания с рассматриваемой боковой гранью (рис. 39). Тогда треугольники ABP и ABL равны. Также равными являются треугольники CDQ и CDL. Но сумма площадей треугольников ABL и CDL равна половине площади параллелограмма $ABCD$. Рассмотрев таким образом все боковые грани призмы, получим, что площадь боковой поверхности призмы в два раза больше суммы площадей оснований. Вся боковая поверхность равна $4S$.

10. Рассмотрим два случая: 1) $a < 1$. Здесь, в свою очередь, возникают два случая. а) Центр шара и куб расположены по одну сторону от плоскости (рис. 40). Обозначим через O центр шара, P — центр грани, не лежащий в заданной плоскости, A — вершина куба, не лежащая в этой плоскости. Если x — ребро куба, то в прямоугольном треугольнике OPA имеем: $OP = x - a$, $PA = x\frac{\sqrt{2}}{2}$, $OA = 1$. По теореме Пифагора $(x - a)^2 + \frac{x^2}{2} = 1$, откуда $3x^2 - 4ax + 2(a^2 - 1) = 0$. От-

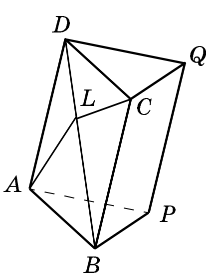


Рис. 39

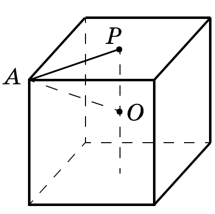


Рис. 40

куда $x = \frac{2a + \sqrt{6 - 2a^2}}{3}$. Случай 1: центр шара и куб расположены по разные стороны от заданной плоскости. В этом случае, рассматривая такой же треугольник, получим $OP = x + a$, $PA = x\frac{\sqrt{2}}{2}$, $OA = 1$. Точно так же, записывая теорему Пифагора, получим квадратное уравнение $3x^2 + 4ax + 2(a^2 - 1) = 0$. Из этого уравнения получим $x = \frac{-2a + \sqrt{6 - 2a^2}}{3}$.

Случай 2: $a > 1$. Здесь возможна лишь ситуация, описанная в варианте 1 а. Центр шара и куб расположены по одну сторону от заданной плоскости. Но в этом случае подходят оба корня уравнения $3x^2 - 4ax + 2(a^2 - 1) = 0$, если они существуют (оба корня положительны). Получаем *ответ:* 1) если $0 \leqslant a < 1$, то ребро куба может быть равным $x = \frac{\pm 2a + \sqrt{6 - 2a^2}}{3}$; 2) если $a = 1$, ребро куба равно $\frac{4}{3}$; 3) если $1 < a \leqslant \sqrt{3}$, то ребро куба может быть равным $\frac{2a \pm \sqrt{6 - 2a^2}}{3}$; 4) если $a > \sqrt{3}$, задача не имеет решения.

11. Утверждение задачи следует из того, что любое сечение шара есть плоскость. $\left(\textit{Ответ}: \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}.\right)$

12. $\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 + h^2}$.

13. Из условия следует, что сфера с диаметром AB проходит через C и D. Следовательно, искомый радиус равен $\frac{a}{2}$.

14. Пусть x — ребро куба. Рассмотрим сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, проходящей через грань куба, не лежащую в основании. В сечении будет окружность радиусом $r\frac{h - x}{h}$. По условию сторона квадрата, вписанного в эту окружность, равна x. Получаем уравнение $r\frac{h-x}{h}\sqrt{2} = x$, из которого найдем $x = \frac{rh\sqrt{2}}{h + r\sqrt{2}}$.

15. Если x — радиус искомой сферы, то расстояние от ее центра до центра данной сферы равно $x\sqrt{3}$. Возможны два случая: 1) искомая сфера расположена внутри данной и 2) искомая сфера — вне данной. В первом случае получаем уравнение $x + x\sqrt{3} = R$, откуда $x = \frac{R}{\sqrt{3}+1} = \frac{1}{2}R(\sqrt{3} - 1)$. Во втором *ответ* $\frac{1}{2}R(\sqrt{3} + 1)$.

16. Рассмотрим половину осевого сечения конуса плоскостью, проходящей через центр искомого шара (рис. 41). Здесь O — центр основания конуса, Q — центр искомого шара, M — точка его касания с основанием конуса, SA — образующая конуса. Если x — радиус искомого шара, то $OM = x\sqrt{2}$ $(OQ = x\sqrt{3})$, $\angle QAM = 30°$. Следовательно, $AM = x\sqrt{3}$. Получаем уравнение $x\sqrt{2} + x\sqrt{3} = \frac{a}{2}$. $\left(\textit{Ответ}: \frac{a}{2}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right).\right)$

17. Центры шаров служат вершинами куба со стороной $2x$ (здесь x — радиусы искомых шаров), расстояние от центра каждого шара до ближайшей грани равно x. Значит, $4x = 1$, $x = \frac{1}{4}$.

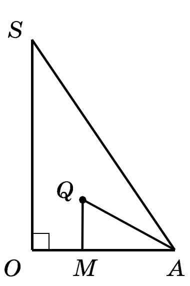


Рис. 41

18. Центры шаров образуют правильный тетраэдр с ребром $2R$. Радиус описанного около такого тетраэдра шара равен $\frac{R\sqrt{6}}{2}$. А радиус искомого шара будет равен $\frac{R\sqrt{6}}{2} \pm R$. (Знак «$-$»

соответствует случаю, когда данные шары касаются искомого внешним образом, а знак «+» соответствует внутреннему касанию.)

19. Если шар радиуса x касается всех граней трехгранного угла, плоские углы которого прямые, то расстояние от центра этого шара до вершины трехгранного угла равно $x\sqrt{3}$. Таким образом, если радиусы данных шаров равны x и y ($y > x$), то получаем соотношение $(y - x)\sqrt{3} = y + x$. Искомое отношение равно $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}$.

20. Рассмотрим (выпуклый) четырехгранный угол $SABCD$ с ребрами SA, SB, SC, SD. Пусть существует шар, касающийся его граней, при этом K, L, M и N точки касания соответственно с гранями ASB, BSC, CSD и DSA (рис. 42, *а*). Имеем: $\angle ASK = \angle ASN$, $\angle BSK = \angle BSL$, $\angle CSM = \angle CSL$, $\angle DSM = \angle DSN$. Складывая эти равенства, получим: $\angle ASB + \angle CSD = \angle BSC + \angle ASD$ (1). Докажем теперь, что если для выпуклого четырехгранного угла $SABCD$ выполняется равенство (1), то существует сфера (на самом деле бесконечно много сфер), касающаяся всех его граней. Наметим основные пункты доказательства от противного. Пусть для четырехгранного угла $SABCD$ выполняется равенство (1). Рассмотрим какой-либо шар,

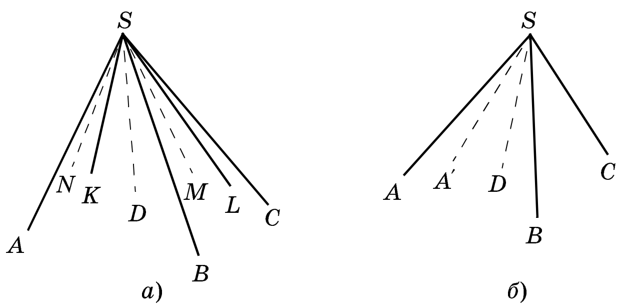


Рис. 42

расположенный внутри данного четырехгранного угла и касающийся трех его граней. Пусть он не касается грани ASB. Проведем через прямую BS плоскость, касающуюся этого шара и отличную от грани BSC. Пусть эта плоскость пересекает грань ASD по лучу SA' (рис. 42, *б*). Для четырехгранного угла $SA'BCD$ выполняется равенство (поскольку существует шар, касающийся всех его граней) $\angle A'SB + \angle CSD = \angle BSC + \angle A'SD$ (1′). Вычитая соответственно равенства (1) и (1′), получим $\angle ASB - \angle A'SB = \angle ASA'$. А это означает, что лучи SB, SA и SA' не могут быть ребрами трехгранного угла (см. теорему 2.3). Таким образом, SA и SA' совпадают, т. е. в данный четырехгранный угол можно вписать шар.

21. Обозначим через M и L точки касания вписанного в трехгранный угол шара соответственно с гранями BOA и AOC (рис. 43). Обозначим $\angle KOB = x$. Последовательно вычисляем $\angle MOB = x$, $\angle LOA = \angle MOA = \gamma - x$, $\angle KOC = \angle LOC = \beta - \gamma + x$. Но $\angle KOB + \angle KOC = \alpha$, или $x + \beta - \gamma + x = \alpha$. Откуда $x = \angle KOB = \dfrac{\alpha + \gamma - \beta}{2}$. З а м е ч а н и е. Нетрудно увидеть полную аналогию с известной планиметрической задачей: найти отрезки, на которые делится сторона треугольника точкой касания вписанной в этот тре-

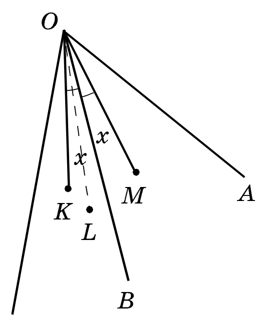


Рис. 43

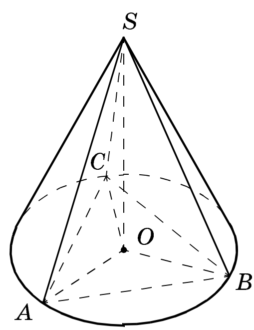


Рис. 44

угольник окружностью, если заданы стороны треугольника.

22. Для удобства вычислений будем считать, что O внутри треугольника ABC. Рассмотрим три трехгранных угла $SOAB$, $SBOC$ и $SCOA$ (рис. 44). В каждом из этих трехгранных углов попарно равны двугранные углы при ребрах SA и SB, SB и SC, SC и SA. Нам надо найти величины первой пары (двугранные углы при ребрах SA и SB в трехгранном угле $SOAB$). Обозначим каждый из них через u. Тогда углы во второй паре (при ребрах SB и SC в трехгранном угле $SOAB$) будут равны $y - u$. Углы в третьей паре равны $z - y + u$. Таким образом, угол при ребре SA в трехгранном угле $SABC$ разбит на два: u и $z - y + u$. Получаем уравнение $u + z - y + u = x$, откуда $u = \dfrac{x + y - z}{2}$. (См. предыдущую задачу и замечание к ней.)

23. Положим $\angle AOC = x$, $\angle BOC = \angle COD = y$ (рис. 45). Применим к каждому из трехгранных углов $OABC$ и $OACD$ результат задачи 21. Если K — точка касания с плоскостью AOC шара, вписанного в трехгранный угол, то $\angle AOK = \dfrac{\alpha + x - y}{2}$, $\angle AOM = \dfrac{\beta + x - y}{2}$. Таким образом $\angle KOM = |\alpha - \beta|/2$.

24. Рассмотрим треугольную пирамиду $ABCD$ (рис. 46). Пусть P — середина DC, E и F — точки пе-

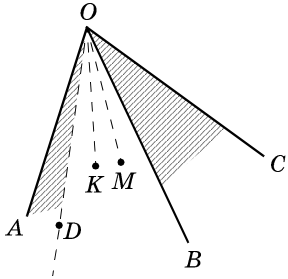


Рис. 45

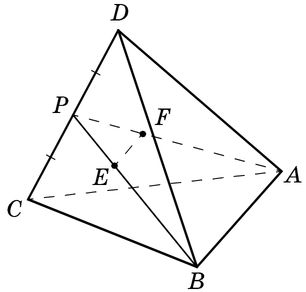


Рис. 46

ресечения медиан треугольников BCD и ACD. E и F делят отрезки BP и AP в отношении 2 : 1. Следовательно, $EF = \frac{AB}{3}$ и EF параллельна AB. Таким образом, все ребра тетраэдра с вершинами в точках пересечения медиан граней данного тетраэдра в три раза меньше соответствующих ребер исходного тетраэдра (и соответственно параллельны им), а значит, радиус сферы, проходящей через точки пересечения медиан данного тетраэдра, равен $\frac{R}{3}$. Но радиус сферы, проходящей через любые четыре точки, лежащие на различных гранях данного тетраэдра, не меньше радиуса вписанной в него сферы. Таким образом, $\frac{R}{3} \geqslant r$, что и требовалось доказать.

25. Радиус сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, равен радиусу окружности, описанной около равнобедренного треугольника, основание которого равно диагонали основания пирамиды, а боковая сторона равна боковому ребру пирамиды. Из условия следует, что диагональ основания равна $2l\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$. Имеем равнобедренный треугольник с боковой стороной l и основанием $2l\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$. Высота (проведенная к основанию) в этом треугольнике равна $h = \sqrt{l^2 - 2l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = l\sqrt{\cos\alpha}$. Радиус описанной окружности равен $R = \frac{l^2}{2h} = \frac{l}{2\sqrt{\cos\alpha}}$.

Дополнительные задачи

1. Оси двух равных цилиндров скрещиваются и принадлежат плоскостям двух противоположных граней единичного куба. Боковые поверхности этих цилиндров касаются. Найдите радиусы данных цилиндров. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2} \text{ у обоих цилиндров.}\right)$

2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 1. Центр описанного около пирамиды шара делит ее высоту в отношении 1 : 2. Найдите радиус описанного около пирамиды шара. $\left(\textit{Ответ: } \frac{2}{3}.\right)$
3. Радиус вписанного в правильную пирамиду шара в 3 раза меньше ее высоты. Найдите косинус двугранного угла при основании этой пирамиды. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}.\right)$
4. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 3, радиус описанного шара равен 2. Чему равна высота пирамиды? (*Ответ:* 1 или 3.)
5. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 4, радиус описанного шара равен 3. Чему равна высота пирамиды? (*Ответ:* 2 или 4.)
6. Все ребра четырехугольной пирамиды равны 1. Найдите радиус описанной сферы. $\left(\textit{Ответ: } \frac{\sqrt{2}}{2}.\right)$
7. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 2. Центр описанной около нее сферы расположен на расстоянии 1 от плоскости основания. Найдите радиус описанной сферы. (*Ответ:* $\sqrt{5}$.)
8. Все ребра четырехугольной пирамиды равны между собой. Найдите отношение радиусов вписанной и описанной сферы для этой пирамиды. $\left(\textit{Ответ: } \frac{R}{r} = \sqrt{3} + 1.\right)$
9. Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной 1. Высота пирамиды также равна 1 и проходит через одну из вершин основания. Най-

дите радиус описанной и вписанной сферы для этой пирамиды, если пирамида треугольная.

$\left(\textit{Ответ: } r = \dfrac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{7}};\ R = \dfrac{\sqrt{21}}{2}.\right)$

10. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 1, боковое ребро равно 2. Рассмотрим всевозможные шары, касающиеся всех плоскостей, содержащих грани этой пирамиды. Каково число этих шаров? Найдите их радиусы. $\Big($*Ответ:* 8 шаров, один вписанный с радиусом $\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}+3\sqrt{15}}$, четыре вневписанных радиуса $\sqrt{165} + \dfrac{22\sqrt{3}}{3}$ и три, каждый из которых касается продолжений всех четырех граней радиуса $\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{15}-\sqrt{3}}$. $\Big)$

Контрольная работа № 4

Вариант 1

1. Найдите площадь сечения шара радиусом 4 см плоскостью, расстояние до которой от центра шара равно 3 см.

2. Расстояние от центра шара радиуса 3 до прямой l равно $2\sqrt{3}$. Через l проведены две плоскости, касающиеся шара. Найдите величину угла между этими плоскостями.

3. Найдите отношение радиуса описанного шара к радиусу вписанного шара для правильной треугольной пирамиды, двугранные углы при основании которой равны α.

4. В основании призмы лежит треугольник со сторонами 3, 4 и 5; боковые ребра этой призмы равны 12. Известно, что около этой призмы можно описать шар. Найдите радиус этого шара.

5. Радиус шара, вписанного в треугольную пирамиду, все ребра которой равны между собой, равен 1. Найдите радиус шара, касающегося трех граней этой пирамиды и вписанного в нее шара.

Вариант 2

1. На каком расстоянии от центра шара радиуса 5 надо провести плоскость, чтобы площадь получившегося сечения была в 3 раза меньше площади сечения, проходящего через центр шара?

2. Две плоскости пересекаются под углом 60°. Центр шара, касающегося обеих плоскостей, находится на расстоянии 5 см от линии их пересечения. Найдите радиус этого шара, если известно, что этот радиус больше 3 см.

3. Найдите отношение радиуса описанного шара к радиусу вписанного шара для правильной шестиугольной пирамиды, двугранные углы при основании которой равны α.

4. В основании прямой призмы лежит треугольник со сторонами 5, 12 и 13. Известно, что в эту призму можно вписать шар. Найдите радиус этого шара.

5. Все ребра треугольной пирамиды равны 1. Внутри пирамиды расположены два равных касающихся между собой шара. Найдите радиусы этих шаров, если известно, что каждый из них касается трех граней пирамиды, но при этом каждая грань касается лишь одного шара.

Вопросы к главе 3

1. Что такое произвольная коническая поверхность?

2. Какой конус является прямым круговым?

3. Какое тело является телом вращения?

4. Сформулируйте теорему о кратчайшем пути по сфере.

5. При каком n верно утверждение: любая n-угольная пирамида имеет описанную сферу?

6. При каком n верно утверждение: любая n-угольная пирамида имеет вписанную сферу?

7. При каком n верно утверждение: любая правильная n-угольная пирамида имеет описанную сферу?

8. При каком n верно утверждение: любая правильная n-угольная призма имеет описанную сферу?

9. При каком n верно утверждение: любая правильная n-угольная призма имеет вписанную сферу?

Глава 4
Задачи и методы стереометрии

Четвертая глава занимает особое местоположение. Во-первых, в соответствии с авторской концепцией курса каждый учебный год следует заканчивать повторением. В соответствии с этим требованием и написаны учебники И. Ф. Шарыгина «Геометрия 7—9» и «Геометрия 10—11». При этом всякий раз выбирается особый, специальный инструмент повторения. (Это может быть просто итоговый обзор теории, как это было в 7 классе, или же просто решение задач, как в 8-м. В качестве же инструмента итогового повторения в планиметрии использовались методы векторный и координатный.) Именно повторение и является одной из основных методических функций четвертой главы. На сей раз инструментом для повторения служат некоторые, по мнению автора, наиболее распространенные методы стереометрии. Прежде всего, это методы, связанные с построением изображений, причем не только проекционных пространственных, но и планиметрических, ассоциированных с изучаемым телом. Основными являются приемы и методы, рассматриваемые в первых двух параграфах: 4.1 «Вспомогательные плоскости, сечения» и 4.2 «Проектирование». Во-вторых, опять же в соответствии с авторской концепцией, полноценный курс геометрии состоит из собственно геометрической теории, методов геометрии и системы задач. Особенность четвертой главы состоит также и в том, что она целиком посвящена изучению методов геометрии. Причем в соответствии с авторской классификацией — методам внутренним и частным. И в-третьих, в этой главе в полной мере выражена идея уровневой дифференциации. Большая часть ее предназначена классам и учащимся с хорошей подготовкой (не обязательно физматклассам, но и им в том числе). В обычных классах общеобразовательной школы рекомендуется изучить материал параграфов 4.1, 4.2 и 4.7.

Мы не будем предлагать здесь подробные методические рекомендации. Ограничимся общим советом. Всего на повторение в обычной школе следует отвести до 8 часов. При этом вместе с теоретическим материалом и задачами непосредственно из четвертой главы можно предлагать учащимся повторять теорию предыдущих глав и решать оттуда наиболее интересные задачи.

Указания к решению задач учебника

4.1

1. *Первый способ*. Обозначим через $2a$ сторону основания правильной четырехугольной пирамиды $SABD$ (рис. 47) ($ABCD$ — основание). Высота пирамиды будет равна $SO = h = a\mathrm{tg}\ \alpha$. Рассмотрим прямоугольный треугольник SOA с катетами $SO = h$ и $OA = a\sqrt{2}$. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из O на гипотенузу. Имеем $OM = \dfrac{SO \cdot OA}{SA} = \dfrac{a\sqrt{2}\mathrm{tg}\ \alpha}{\sqrt{2 + \mathrm{tg}^2\ \alpha}}$. Если φ — искомый угол, $\varphi = \angle BMD$. Следовательно, $\mathrm{tg}\ \dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{OB}{OM} = \dfrac{\sqrt{2 + \mathrm{tg}^2\ \alpha}}{\mathrm{tg}\ \alpha}$, $\varphi = 2\mathrm{arctg}\ \dfrac{\sqrt{2 + \mathrm{tg}^2\ \alpha}}{\mathrm{tg}\ \alpha}$.

Второй способ. Рассмотрим треугольную пирамиду $SOAB$. Двугранный угол при ребре AB равен α, углы при ребрах SA и SB равны $\dfrac{\varphi}{2}$. Все плоские и двугранные углы при вершине O — прямые. Воспользовавшись результатом задачи 20, пункт 3 (из § 1.7), получим: $\cos^2\alpha + 2\cos^2\dfrac{\varphi}{2} = 1$, откуда $\cos\varphi = -\cos^2\alpha$, $\varphi = \arccos(-\cos^2\alpha)$. Проверьте, что ответы, полученные при первом способе и при втором, совпадают.

2. Пусть $SABCD$ ($ABCD$ — основание) данная пирамида, SO — ее высота, M и P — середины AB и BC.

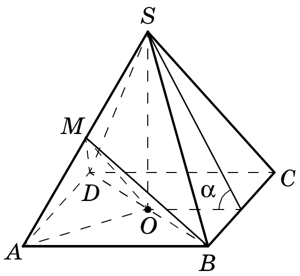


Рис. 47

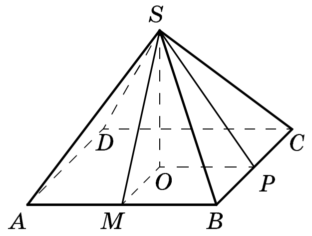


Рис. 48

Нетрудно убедиться, что радиус искомого шара равен радиусу шара, вписанного в пирамиду $SOMBP$ (рис. 48), а радиус этого шара, в свою очередь, равен радиусу окружности, вписанной в прямоугольный треугольник SOM с катетами $OM = \frac{a}{2}$, $SO = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ и гипотенузой $SM = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. По известной формуле для радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, находим $r = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{4}a$. Таким же будет и радиус пятой сферы. Ведь если мы добавим (сверху) пятый такой же шар, касающийся первых четырех, то получим пирамиду (ее вершины в центрах шаров), подобную исходной, все ее грани параллельны граням исходной и удалены от них на одинаковое расстояние, равное радиусу каждого шара.

3. Пусть O — центр правильного тетраэдра, A и B — две его вершины. Как мы знаем, O — центр вписанного и описанного шаров тетраэдра. При этом, если r — радиус вписанного шара, то радиус описанного шара равен $3r$ $\left(r = a\frac{\sqrt{6}}{12}\right.$, см. задачу 1 из § 3.4$\left.\right)$. Пусть x — радиус каждого из искомых шаров. Центры двух из них расположены на отрезках OA и OB. Обозначим их через M и N. Имеем $MN = 2x$,

$AM = AN = 3x$, $OM = ON = 3(r - x)$. Из подобия треугольников OMN и OAB получаем $\frac{MN}{AB} = \frac{OM}{OA}$ или $\frac{2x}{a} = \frac{3(r-x)}{3r}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{a}{2(\sqrt{6}+1)}.\right)$

4. Рассмотрим осевое сечение цилиндра, перпендикулярное ребрам куба, лежащим в основаниях цилиндра. Получим прямоугольник (осевое сечение цилиндра), в который вписан единичный квадрат (сечение куба). При этом одна из сторон квадрата образует с соответствующей стороной прямоугольника угол α, а другая соответственно угол $90° - \alpha$. Высота цилиндра равна $\sin\alpha + \cos\alpha$.

5. Рассмотрим осевое сечение конуса, содержащее центр шара. Высота конуса делит это осевое сечение на два прямоугольных треугольника. Гипотенуза каждого равна 1, а меньший катет S. Радиус искомого шара равен радиусу окружности, вписанной в такой прямоугольный треугольник. $\left(\textit{Ответ}: \frac{\sqrt{3}-1}{4}.\right)$

6. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью, содержащей ее высоту и центр шара. По условию этим сечением будет равносторонний треугольник со стороной a. Пусть этот треугольник SMN (рис. 49), сечением шара будет окружность, касающаяся MN и SM, P — середина SN, SA — одно из двух боковых ребер, которых касается шар, O — центр шара (лежит на MP), x — его радиус. Имеем $MP = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, $MO = 2x$. Расстояние от P до SA легко вычисляется (P — середина катета SN), $SN = a$, другой катет $NA = \frac{a}{2}$. Оно равно $d = \frac{a}{2\sqrt{5}}$. Расстояние от O до SA равно x. Следовательно, $OP = \sqrt{x^2 - d^2} =$

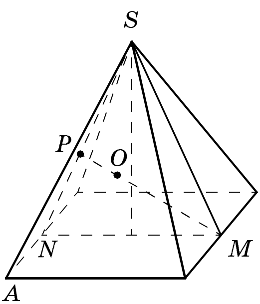


Рис. 49

$= \sqrt{x^2 - \frac{a^2}{20}}$. Поскольку $MO + OP = MP$, получаем уравнение $\sqrt{x^2 - \frac{a^2}{20}} + 2x = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\sqrt{x^2 - \frac{a^2}{20}} = a\frac{\sqrt{3}}{2} - 2x$. После возведения в квадрат (при условии неотрицательности правой части) после преобразований получаем уравнение: $15x^2 - 10a\sqrt{3}\,x + 4a^2 = 0$. Из этого уравнения найдем корень $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{15}}a$. (Второй корень оказывается лишним: шар радиуса $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{15}}a$ касается продолжений MS и MN.)

4.2

1. Очевидно, что высота цилиндра равна диагонали куба, т. е. она равна $\sqrt{3}$. Для определения радиуса цилиндра спроектируем всю конструкцию на плоскость основания цилиндра. Куб спроектируется в правильный шестиугольник. При этом концы ребер куба, выходящих из одного из центров оснований цилиндра, образуют правильный треугольник со стороной $\sqrt{2}$, плоскость которого параллельна основаниям цилиндра. Значит, сторона правильного треугольника, вписанного в основание цилиндра, равна $\sqrt{2}$, а радиус цилиндра равен $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

2. Рассмотрим сечение ACC_1A_1. Задача сводится к выяснению вопроса, в каком отношении отрезок, соединяющий A_1 с серединой AC, делит отрезок, соединяющий A с серединой CC_1. (*Ответ:* 2 : 3.)

3. Спроектируем призму $ABCA_1B_1C_1$ на плоскость одного из оснований цилиндра (рис. 50). Получим параллелограмм $A(=B)A_1(=B_1)CC_1$ (для простоты проек-

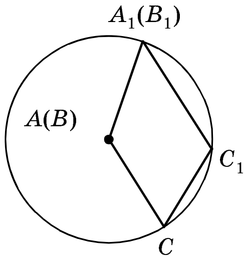


Рис. 50

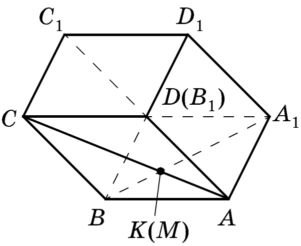


Рис. 51

ции обозначены так же, как и вершины призмы). При этом точка A совпадает с центром основания цилиндра, а остальные лежат на окружности. Угол A_1AC и есть искомый двугранный угол. (*Ответ:* 120°.)

4. Спроектируем параллелепипед на плоскость, перпендикулярную DB_1. По условию проекции точек K и M должны совпасть (рис. 51). Значит, точки K и M делят AC и BA_1 в отношении 1 : 2. Далее получаем, что прямые DK и B_1M проходят через середину AB. (*Ответ:* 1 : 3.)

4.3

1. а) В этом пункте мы не будем пользоваться общим приемом, описанным в § 4.3, а решим задачу иначе, используя конкретные особенности заданной ситуации. Рассмотрим правильный треугольник AB_1C (рис. 52).

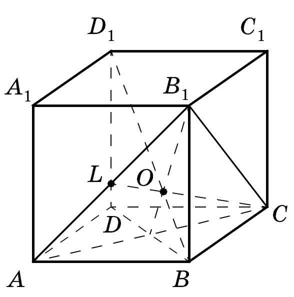


Рис. 52

Прямая BD_1 перпендикулярна плоскости этого треугольника и проходит через точку O — его центр. Если L — середина AB_1, то OL и есть общий перпендикуляр. В случае а) имеем ответ: 90°, $\frac{\sqrt{6}}{6}$, отрезок AB_1 делится пополам, отрезок BD_1 в отношении 1 : 2.

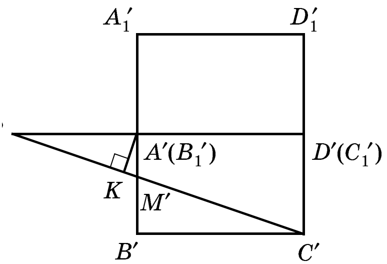


Рис. 53

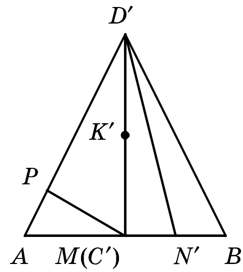


Рис. 54

б) Спроектируем куб на плоскость, перпендикулярную AB_1 (рис. 53). (Проекции точек обозначены такими же буквами с добавлением «$'$».) Пусть прямая $C'M'$ пересекает продолжение $A'D'$ в точке P, K — основание перпендикуляра, опущенного из A' на $M'P$. Далее будем пользоваться теорией, изложенной в § 4.3. Последовательно вычисляем: $A'P = 1, A'M' = \frac{1}{2}A'B' = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Искомое расстояние есть $A'K = \frac{PA' \cdot A'M'}{PM'} = \frac{1}{3}, \frac{PK}{KM'} = \frac{(PA')^2}{(A'M')^2} = 8, \frac{M'K}{KC'} = \frac{1}{10}$ (т. е. общий перпендикуляр проходит вне отрезка CM и пересекает его продолжение за точку M на расстоянии, равном $\frac{1}{9}CM$). Если теперь φ искомый угол, то $\sin\varphi = \frac{C'M'}{CM} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ $\left(\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$. Если мы рассмотрим проекцию на плоскость, перпендикулярную CM, то найдем, в каком отношении общий перпендикуляр делит отрезок AB_1. Это отношение равно 7 : 2 (от вершины A).

в) Практически все рассуждения и вычисления повторяют предыдущий пункт. Получаем почти те же *ответы:* $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{3}$, отрезок A_1B делится в отношении 7 : 2 (от вершины A), отрезок CM — в отношении 8 : 1 (от вершины D).

г) $45°$, $\frac{1}{3}$, 4 : 1 (от вершины A), 8 : 1 (от вершины D).

д) $\arccos \frac{1}{\sqrt{26}}$, $\frac{1}{\sqrt{26}}$; 11 : 15 (от вершины A), 6 : 7 (от вершины D).

2. Спроектируем тетраэдр на плоскость, перпендикулярную CM (рис. 54). Можно считать, что эта плоскость содержит ребро AB, так что точки A, B и M перейдут сами в себя, а проекции всех других точек мы будем обозначать теми же буквами с добавлением «$'$». Этот рисунок позволит нам ответить на все вопросы в каждом пункте, кроме вопроса, в каком отношении общий перпендикуляр делит отрезок CM.

а) Треугольник ABD' равнобедренный, основание $AB = 1$, высота $D'M = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Перпендикуляр MP, опущенный на AD', и есть искомое расстояние. Имеем: $AD' = \frac{\sqrt{33}}{6}$, $MP = \frac{MA \cdot MD'}{AD'} = \sqrt{\frac{2}{11}}$, $\sin \varphi = \frac{AD'}{AD} = \frac{\sqrt{33}}{6}$ $\left(\cos \varphi = \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$, $\frac{AP}{PD} = \frac{AP}{PD'} = \left(\frac{AM}{MD'}\right)^2 = \frac{3}{8}$. Для определения отношения, в котором общий перпендикуляр делит отрезок CM, можно рассмотреть треугольник CPM, все стороны которого известны (легко вычисляются), и вычислить отрезки, на которые высота делит сторону CM (найти отношение этих отрезков). А можно рассмотреть проекцию на плоскость, перпендикулярную AD, и далее действовать согласно общему правилу. После соответствующих вычислений получим, что отрезок CM делится в отношении 10 : 1 (от точки C).

б) В прямоугольном треугольнике $D'MN'$ знаем катеты $D'M = \sqrt{\frac{2}{3}}$ и $MN' = \frac{1}{4}$. Находим высоту, опущенную на гипотенузу (искомое расстояние) $\sqrt{\dfrac{2}{35}}$, синус искомого угла $\dfrac{D'N'}{DN} = \sqrt{\dfrac{35}{6}}$ $\left(\sin\varphi = \dfrac{1}{6}\right)$, отношение в котором делится DN, оно равно $\left(\dfrac{D'M}{MN'}\right)^2 = \dfrac{32}{3}$. Для определения отношения, в котором делится CM, надо поступить одним из двух способов, указанных в предыдущем пункте.

в) $\arccos\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, 3 : 2 (от точки C), 3 : 2 (от точки B).

3. Спроектируем куб на плоскость, перпендикулярную AC_1. Прямая l спроектируется в точку, равноудаленную от прямых $A_1'B'$, $C'C_1'$, $A'D'$ (рис. 55). Эти прямые образуют прямоугольный треугольник с катетами $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ $\left(\text{гипотенуза равна } \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$. Нам осталось найти радиус вписанной и радиусы вневписанных окружностей этого треугольника. Таким образом, задача имеет четыре решения: $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{6}}$, $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{6}}$, $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

4. Пусть O — центр общего основания данных конусов, A и B — их вершины ($OA = H$, $OB = h$), AD и BC — две образующие конусов, для которых $\angle COD = 90°$. Проведем через CO плоскость, перпендикулярную AD,

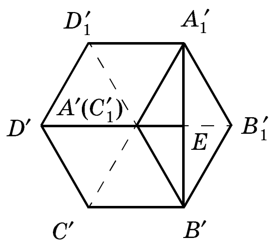


Рис. 55

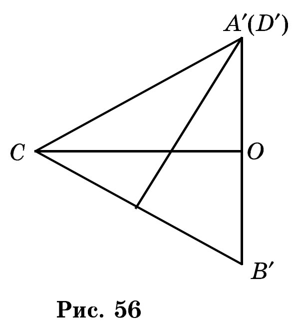


Рис. 56

и спроектируем все на эту плоскость (рис. 56). Имеем $CO = R$, $OA' = \dfrac{HR}{\sqrt{H^2 + R^2}}$ (равно высоте, умноженной на гипотенузу в треугольнике AOD). Поскольку $\dfrac{OB'}{OA'} = \dfrac{h}{H}$, $OB' = \dfrac{hR}{\sqrt{H^2 + R^2}}$. Искомое расстояние равно высоте в треугольнике $A'CB'$ к стороне CB'. Оно равно $\dfrac{A'B' \cdot CO}{CB'} = \dfrac{(H + h)R}{\sqrt{H^2 + h^2 + R^2}}$, синус искомого угла равен $\dfrac{\sqrt{H^2 + R^2}\sqrt{h^2 + R^2}}{R\sqrt{H^2 + h^2 + R^2}}$.

4.4

3. См., например, рисунок 57.

4. Покажем, как можно разрезать поверхность правильного единичного тетраэдра, чтобы получился указанный в условии прямоугольник. Разрежем поверхность, как на рисунке 58 (линии разрезов AKB и CMD, где K и M — середины соответствующих ребер), и развернем ее так, чтобы получилась боковая поверхность цилиндра. Длина каждой из окружностей равна удвоенной длине каждого разреза, т. е. равна $2\sqrt{3}$, а ширина $\dfrac{1}{2}$. Из боковой поверхности цилиндра получим нужный прямоугольник.

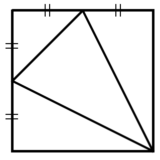


Рис. 57

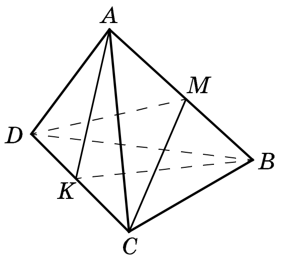


Рис. 58

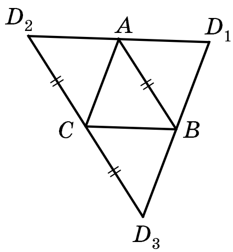


Рис. 59

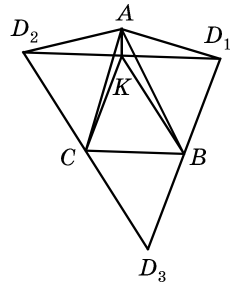


Рис. 60

5. Пусть у тетраэдра $ABCD$ равны ребра AB и CD. Возможны два случая: а) указанные вершины являются концами одного из этих ребер. Пусть это будет ребро AB. Сделаем развертку, как на рисунке 59. Согласно условию точки D_1, A и D_2, а также D_1, B и D_3 расположены на одной прямой. Таким образом, в треугольнике $D_1D_2D_3$ AB является средней линией и $D_2D_3 = 2AB$. Значит, в треугольнике $D_2C + CD_3 = D_2D_3$, т. е. точки D_2, C и D_3 лежат на одной прямой. б) Сумма плоских углов равна $180°$ при двух других вершинах. Например, при C и B. Сделаем развертку (рис. 60). Пусть A окажется вне треугольника $D_1D_2D_3$. (Вершины C и B расположены на сторонах этого треугольника по условию.) Обозначим через K середину D_1D_2. BK — средняя линия в треугольнике $D_1D_2D_3$. Значит, $BK = CD_2$, и по условию получаем $BK = AB$. Но угол AKB является тупым ($\angle AKD_1 = 90°$). Противоречие. Следовательно, A не может находиться вне треугольника $D_1D_2D_3$. Точно так же доказывается, что A не может располагаться внутри $D_1D_2D_3$.

4.5

1. «Развернув» две грани тетраэдра (рис. 61), получим, что искомое расстояние равно длине ребра тетраэдра. (*Ответ:* 1.)

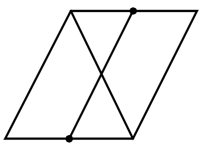
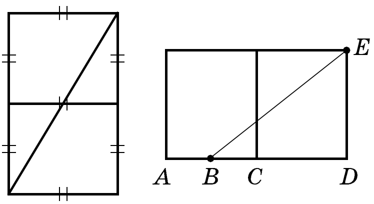


Рис. 61



а) *б*)

Рис. 62

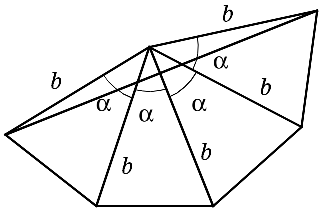


Рис. 63

2. Сделаем нужную развертку куба (рис. 62). (Достаточно рассмотреть две соседние грани.) Найдем длину нужного пути в каждом случае: $\sqrt{5}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{13}$.

3. Сделаем развертку боковой поверхности пирамиды (рис. 63). Если $\alpha < \frac{\pi}{4}$, длина искомого пути равна $2b \sin 2\alpha$. В остальных случаях минимального пути нет. (Он вырождается в дважды пройденное боковое ребро.)

4. Сделаем развертку боковой поверхности конуса. Получим круговой сектор радиуса 2, ограниченный дугой длины $\frac{4\pi}{3}$. Центральный угол в этом секторе равен $\frac{2\pi}{3}$. Соответствующая хорда, равная длине искомого кратчайшего пути, равна $2\sqrt{3}$.

5. Сделаем развертку половины цилиндра. Это прямоугольник со сторонами πr и h. Диаметрально противоположные точки разных оснований — это противоположные вершины прямоугольника. Кратчайший путь — $\sqrt{\pi^2 r^2 + h^2}$. Исправление в условии: прямоугольник $ABCD$ со сторонами a и b.

6. Представим себе, что треугольник BDM составлен из двух слоев, и сделаем развертку (рис. 64). Получим шестиугольник $ABCD_1MD_2$. Если угол при вершине B этого шестиугольника меньше развернутого $\left(\text{он равен } \frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$, то длина кратчайшего пути равна длине отрезка AC (на развертке). В противном случае она равна сумме соседних сторон данного прямоугольника. Теперь нетрудно получить *ответ:* если $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\sin\alpha}$, в остальных случаях $a + b$.

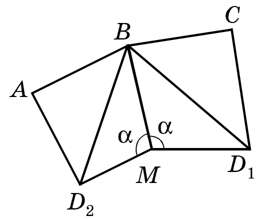


Рис. 64

4.6

1. Достроим данный тетраэдр до параллелепипеда, проведя через каждое ребро плоскость, параллельную противоположному ребру. Получим прямоугольный параллелепипед, ребра которого легко находятся (см. решение задачи 7 § 4.6). Центр этого параллелепипеда, очевидно, является и центром описанного около данного тетраэдра шара, а радиус шара равен половине диагонали параллелепипеда, т. е. он равен $\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Очевидно, что центр параллелепипеда равноудален ото всех граней данного тетраэдра, т. е. он также является и центром вписанного шара. Нам надо найти расстояние от центра параллелепипеда до любой плоскости, проходящей через концы трех ребер параллелепипеда, выходящие из одной вершины. Рассмотрим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть $AB = x$, $AD = y$, $AA_1 = z$. Диагональ AC_1 делится плоскостью BA_1D в отношении $1 : 2$ (от вершины A). Отсюда получаем, что центр параллелепипеда удален от плоскости BA_1D на расстояние, в два раза меньшее высоты в пирамиде ABA_1D, проведенной из вершины A. Обозначим через α двугранный угол при ребре BD в этой пирамиде. Если d — расстояние от A до BD, то расстояние от A до плоскости BA_1D равно $d\sin\alpha$. Нетрудно получить, что $d = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Как мы знаем, квадрат площади треугольника BA_1D равен сумме квадратов площадей трех других граней пирамиды ABA_1D (см. задачу 20 из § 1.7), а $\cos\alpha$ отношению площадей треугольников BAD и BA_1D. Исходя из этого, найдем последовательно все нужные величины. Радиус вписанного шара будет равен $\frac{xyz}{2\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}}$, где x, y, z выражаются через a, b, c по формулам, полученным при решении задачи 7.

4.7

1. Центры данных шаров и точки их касания служат вершинами правильной треугольной призмы (рис. 65) с высотой R и стороной основания $2R$. Центр четвертого шара и центры трех данных служат вершинами правильной треугольной пирамиды со стороной основания $2R$ и боковым ребром $R + x$. Высота этой пирамиды равна $\sqrt{(R+x)^2 - \frac{4}{3}R^2} = \sqrt{x^2 + 2Rx - \frac{1}{3}R^2}$.

Для определения x получаем уравнение

$$\sqrt{x^2 + 2Rx - \frac{1}{3}R^2} + x = R.$$

Из этого уравнения найдем $x = \frac{1}{3}R$.

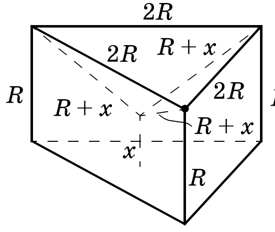


Рис. 65

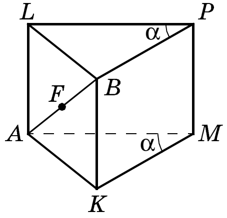


Рис. 66

2. Рассмотрим прямую треугольную призму $AMKLPB$ (рис. 66), где A и K — точки касания первого шара с гранями двугранного угла, L и B — точки касания другого шара, M и P — проекции центров шаров (и точек касания) на ребро данного двугранного угла. Если R — радиус каждого из шаров, то

$$AK = LB = 2R\cos\frac{\alpha}{2},\ KB = 2R,\ BA = 2R\sqrt{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Если шар, касающийся граней в точках A и K, вторично пересекает отрезок AB в точке F, то $BK^2 = BA \cdot BF$. Таким образом, $BF = \dfrac{BK^2}{BA} = \dfrac{2R}{\sqrt{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}}}$.

Искомая часть отрезка AB вне данных шаров равна

$$\frac{2BF - AB}{AB} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

3. Центры оснований конусов являются вершинами правильного треугольника со стороной a. Точка касания искомого шара совпадает с центром этого треугольника. Проведем плоскость через ось одного конуса и центр искомого шара (рис. 67). На рисунке изображена половина соответствующего сечения конуса, SO — ось конуса, SA — образующая, Q — центр искомого шара, P — точка его касания с плоскостью оснований конусов. Далее получаем: $PO = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$,

$PA = PO - \dfrac{a}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{6}a$, $r = QP = PA\operatorname{tg}60^\circ = \left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a.$

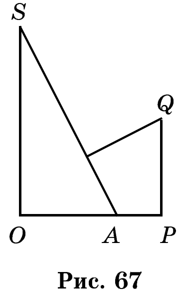


Рис. 67

4. Каждое из оснований цилиндра является окружностью, вписанной в правильный треугольник со стороной, равной диагонали грани куба, т. е. диаметр основания равен $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Ось цилиндра представляет собой часть диагонали куба, заключенную между двумя плоскостями этих правильных треугольников. Ось равна $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Площадь осевого сечения равна $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

5. Если x — радиус искомого шара, то расстояние между центром любого из данных шаров и центром искомого может равняться либо $x + r$, либо $|x - r|$. Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AB = 2\sqrt{2}$, D — середина гипотенузы (рис. 68). Пусть O — центр искомого шара, O_1 — его проекция на плоскость треугольника ABC. Возможны следующие случаи.

а) Расстояние до точки D равно $|x - r|$, а все расстояния до других центров равны $x + r$. Тогда точка D совпадает с O_1. Записав теорему Пифагора для треугольника ODB: $(x + r)^2 = 2 + (x - r)^2$, найдем $x = \frac{1}{2r}$. При всех значениях r, кроме $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, существует для этого случая два шара, при указанном r задача не имеет решений: полученный шар совпадает с шаром, имеющим центр в точке D.

б) Расстояния от O до точек C и D равны $|x - r|$, а до двух других $x + r$. В этом случае точка O_1 совпадает с серединой CD, треугольник BOD такой же, как и в случае A, такой же будет и радиус $\left(x = \frac{1}{2r}\right)$, но при этом возникает ограничение: надо, чтобы существовал треугольник COD (возможно, вырожденный), т. е. $2CO \geqslant CD$. Это приводит к неравенству $\left|\frac{1}{2r} - r\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

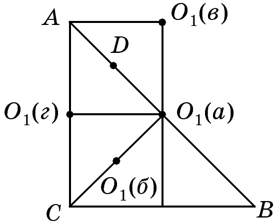


Рис. 68

После возведения в квадрат и очевидных преобразований получаем биквадратное неравенство, из которого находим, что задача имеет решение при $r \leqslant \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$ или $r \geqslant \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}$. В случае равенства — решение одно, в других случаях — решений два.

в) Расстояния от O до точек A и D равны $|x - r|$, а до двух других $x + r$. В этом случае точка O_1 является точкой пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AD и BC (рис. 68). $O_1D = 1$, M — середина AD. Рассматривая два прямоугольных треугольника AOM и BOM, получаем, по теореме Пифагора, равенство $(x - r)^2 - \frac{1}{2} = (x + r)^2 - \frac{9}{2}$. Из этого уравнения получаем $x = \frac{1}{r}$. При этом должны выполняться два ограничения: $AO \geqslant AO_1$ и $BO \geqslant BO_1$ (нетрудно понять, что эти неравенства должны быть эквивалентными) или $\left|r - \frac{1}{r}\right| \geqslant 1$, $r + \frac{1}{r} \geqslant \sqrt{5}$. Полученная система неравенств выполняется при $r \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $r \geqslant \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Вновь в случае равенства одно решение, в случае неравенства два решения.

К этому же пункту следует отнести и случай, когда расстояния до B и D равны $|x - r|$, а два других $x + r$.

г) Расстояние от O до B равно $x + r$, а три оставшиеся равны $|x - r|$. В этом случае точка O_1 совпадает с серединой AC. Из теоремы Пифагора для треугольника OBC получаем $(x + r)^2 - (x - r)^2 = 4$, откуда $x = \frac{1}{r}$. Из неравенства $r + \frac{1}{r} \geqslant \sqrt{5}$ $\left(\text{или } \left|r - \frac{1}{r}\right| \geqslant 1\right)$ получаем те же ограничения, что и в пункте в.

К этому же случаю относится и вариант, когда расстояние от O до A равно $x + r$, а до остальных центров $|x - r|$.

Суммируя результаты всех пунктов, получаем *ответ*.

При $0 < r < \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$ и $r > \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ существует всего восемь шаров, касающихся данных, с радиусами $\frac{1}{r}$ и $\frac{1}{2r}$ (по четыре).

При $r = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$ будет четыре шара радиуса $\frac{1}{r}$ и три — радиуса $\frac{1}{2r}$.

При $r = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ будет два шара радиуса $\frac{1}{r}$ и четыре — радиуса $\frac{1}{2r}$.

При $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4} < r < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ будет четыре шара радиуса $\frac{1}{r}$ и два — радиуса $\frac{1}{2r}$.

При $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ по два шара радиуса $\frac{1}{r}$ и $\frac{1}{2r}$.

При $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4} < r < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ — четыре шара радиуса $\frac{1}{2r}$.

При $r = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}$ — три шара радиуса $\frac{1}{2r}$.

При $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < r < \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}} < r < \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}$ — два шара радиуса $\frac{1}{2r}$.

При $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ задача не имеет решения.

6. Возможны два случая. Искомые шары касаются данной сферы внутренним или внешним образом. При этом во всех случаях точки касания искомых шаров с плоскостью служат вершинами правильного треугольника со стороной $2x$, где x — радиус искомого шара. Центр данного шара является также и центром указанного правильного треугольника. Если O — центр данного шара, A — центр одного из искомых, B — точка его касания с проведенной плоскостью, то треугольник OAB — прямоугольный с гипотенузой $OA = R \pm x$, $AB = x$, $OB = \frac{2}{\sqrt{3}}x$. Записав теорему Пифагора, получим квадратное уравнение — на самом деле два квадратных уравнения для x, из которых найдем (отбрасывая лишние корни) *ответ:* $\frac{\sqrt{21} \pm 3}{4}R$.

7. Пусть радиусы шаров равны R и r. Их центры служат вершинами треугольной пирамиды (тетраэдра). Два противоположных ребра равны соответственно $2R$ и $2r$, а все остальные ребра $R + r$. Расстояния от двух указанных ребер до плоскости, которой касаются шары (они параллельны этой плоскости), равны соответственно R и r. Расстояние между этими ребрами легко вычисляется через R и r. Оно равно $\sqrt{(R + r)^2 - R^2 - r^2} = \sqrt{2Rr}$. Получаем соотношение $R - r = \sqrt{2Rr}$, из которого находим $\sqrt{\frac{R}{r}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$. Значит, отношение равно $2 + \sqrt{3}$.

8. Всего таких шаров может быть 7 : 6 с той же стороны от плоскости, что и данный шар, и один — по другую (он симметричен данному шару относительно плоскости).

9. Рассмотрим треугольную пирамиду $OABC$, основанием которой является равнобедренный ($OA = OB$) прямоугольный треугольник, ребро CO перпендикулярно плоскости OAB и точка O проектируется в центр вписанной в ABC окружности (рис. 69). Рассмотрим конус, вершиной которого является точка O, а основанием вписанная в ABC окружность. Если мы

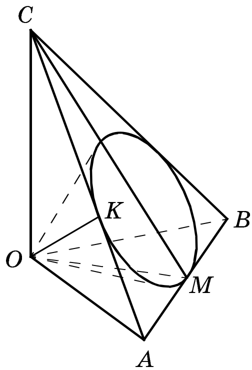


Рис. 69

теперь рассмотрим четыре таких же пирамиды, основания которых имеют общую вершину O, а боковые стороны расположены на прямых OA и OB, то конусы, вписанные в эти пирамиды, указанным образом образуют искомую четверку конусов. Пусть M — середина AB, K — точка касания вписанной в ABC окружности со стороной AC. Для простоты можно считать, что длина образующей конуса равна 1. Это значит, что $OM = OK = AM = 1$. (Здесь мы использовали также, что по условию AOB — равнобедренный прямоугольный треугольник.) Таким образом, треугольники OAM и OAK равны. Значит, $\angle OAK = \angle OAM = 45°$, $OC = OA = \sqrt{2}$, но $\angle OMC = 90° - \frac{\varphi}{2}$, где φ — угол при вершине осевого сечения конуса. Таким образом, $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда $\cos\varphi = \frac{1}{3}$, $\varphi = \arccos\frac{1}{3}$.

10. Можно. Например, следующим образом: рассмотрим куб $3 \times 3 \times 3$, составленный из 27 единичных кубиков. Возьмем центральный единичный куб и построим шар, касающийся всех его ребер. Такие же шары построим для каждого из 12 единичных кубов, имеющих общее ребро с центральным кубом.

Дополнительные задачи

1. Образующая конуса равна 1, угол между образующей и основанием равен α. Найдите радиус вписанного шара. При каком α этот радиус будет наибольшим? $\left(\textit{Ответ: } \frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1+\cos\alpha},\ \alpha = 60°.\right)$

2. В правильной а) треугольной, б) четырехугольной пирамиде двугранные углы между соседними боковыми гранями в два раза больше двугранных углов при основании. Найдите эти углы.

$\left(\textit{Ответ:}\ \text{а) } \arccos\sqrt{\frac{3}{7}};\ 2\arccos\sqrt{\frac{3}{7}};\ \text{б) } \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}.\right)$

3. Рассмотрим всевозможные сферы, проходящие через две данные точки и касающиеся данной плоскости. Найдите: а) геометрическое место точек касания этих сфер с плоскостью; б) геометрическое место центров этих сфер. (*Ответ:* а) если прямая, проходящая через эти точки, пересекает плоскость, то искомое геометрическое место точек — окружность, в противном случае — прямая; б) искомое геометрическое место точек — линия пересечения цилиндра и плоскости.)

4. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины A и B и середину ребра CC_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и касающейся плоскости $A_1B_1C_1D_1$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{3}{4} \text{ или } \frac{27}{4}.\right)$

5. В правильной шестиугольной пирамиде двугранные углы при основании α. Найдите углы между всевозможными парами плоскостей, содержащих боковые грани этой пирамиды.

$\left(\textit{Ответ:}\ 2\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right),\ 2\arccos\left(\frac{1}{2}\sin\alpha\right),\ \pi - 2\alpha.\right)$

6. Площадь сечения конуса, проходящего через его вершину под углом 30° к его оси, равна площади осевого сечения. Найдите угол при вершине осевого сечения. $\left(\textit{Ответ:}\ 2\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}} = \arccos\left(-\frac{1}{7}\right).\right)$

7. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса, если известно, что на его поверхности можно провести три попарно перпендикулярные образующие. $\left(\textit{Ответ:}\ \arccos\left(-\frac{1}{3}\right).\right)$

8. В правильной пирамиде $PABC$ сторона основания равна a, а боковое ребро равно $2a$. Точки P, B и C лежат на боковой поверхности конуса, имеющего вершину в точке A. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса. $\left(\textit{Ответ: } 2\arcsin \frac{3}{2\sqrt{5}}.\right)$

9. Через диагональ единичного куба проведена плоскость, параллельная диагонали одной из граней куба. Найдите площадь полученного сечения. $\left(\textit{Ответ: } \frac{\sqrt{6}}{2}.\right)$

10. Найдите расстояние между серединами непараллельных сторон разных оснований правильной треугольной призмы, все ребра которой равны 2. (*Ответ:* $\sqrt{5}$.)

11. В пирамиде $ABCD$ даны ребра $AB = 7$, $BC = 8$, $CD = 4$. Найдите ребро DA, если известно, что ребра AC и BD перпендикулярны. (*Ответ:* 1.)

12. Основание пирамиды — треугольник со сторонами 10, 13, 13. Площади боковых граней соответственно равны 150, 195, 195. Найдите высоту пирамиды. $\left(\textit{Ответ: } \frac{40\sqrt{5}}{3}.\right)$

13. Длины ребер правильной треугольной пирамиды принимают два значения: 2 и 4. Найдите длину хорды описанной около этой пирамиды сферы, проходящей через середины двух ее противоположных ребер. $\left(\textit{Ответ: } \sqrt{\frac{21}{5}}.\right)$

14. Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите угол между противоположными боковыми гранями. (*Ответ:* 90°.)

15. Высота правильной треугольной пирамиды вдвое больше стороны основания. Найдите угол между боковыми гранями. $\left(\textit{Ответ: } \arccos \frac{13}{49}.\right)$

16. Высота правильной четырехугольной пирамиды вдвое больше стороны основания. Найдите угол между соседними боковыми гранями. $\left(\textit{Ответ:}\ \arccos\left(-\frac{1}{17}\right).\right)$

17. Три шара с радиусами 1, 2 и 5 расположены так, что каждый из них касается двух других шаров и двух данных плоскостей. Найдите расстояние между точками касания меньшего шара с этими плоскостями. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{31}{4}}.\right)$

18. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром $a\sqrt{2}$. Сфера проходит через точку A и касается ребер SB и SC в их серединах. Найдите радиус этой сферы. $\left(\textit{Ответ:}\ \frac{a}{4}\sqrt{\frac{23}{5}}.\right)$

19. Докажите, что если в треугольной пирамиде $ABCD$ площадь грани ABC равна площади грани ABD, а площадь грани CDA равна площади грани CDB, то треугольник ABC равен треугольнику ABD, а треугольник CDA равен треугольнику CDB.

20. Имеется тетраэдр, у которого произведения противоположных ребер равны. Докажите, что: а) прямая, проходящая через центры двух окружностей, вписанных в две грани этого тетраэдра, пересекает продолжение какого-то ребра тетраэдра (или параллельна одному из ребер); б) сфера, проходящая через три вершины этого тетраэдра, пересекает три ребра, выходящие из четвертой вершины (или их продолжения), в трех точках, являющихся вершинами правильного треугольника.

Итоговая контрольная работа за 10 класс

1. Основание конуса совпадает с одним из оснований цилиндра, а вершина конуса с центром другого основания цилиндра. Во сколько раз площадь осевого сечения цилиндра больше площади осевого сечения конуса?
2. Все ребра треугольной пирамиды равны 1. Рассмотрите сечение этой пирамиды плоскостью, параллельной двум противоположным (скрещивающимся) ребрам пирамиды. Как называется многоугольник, получившийся в сечении? Чему равен его периметр? В каких пределах меняется его площадь?
3. Найдите радиус шара, касающегося трех граней единичного куба и вписанного в этот куб шара.
4. Отрезок, длина которого равна 1, образует угол в 45° с одной гранью прямого двугранного угла, и он же образует угол 30° с другой гранью этого же двугранного угла. Найдите длину проекции этого отрезка на ребро двугранного угла.
5. Высота пирамиды равна 1, все двугранные углы при основании равны 45°, периметр многоугольника, расположенного в основании, равен $2p$. Найдите площадь этого многоугольника. При каких p такая пирамида возможна?
6. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC. Найдите его сторону, если известно, что все боковые грани этой пирамиды равновелики и $BD = CD = 1$, $AD = 2$.

Ответы к контрольным работам

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Скрещивающиеся, 65°. **2**. 1) $\frac{MQ}{AB} = \frac{2}{5}$; 2) $\frac{KP}{AB} = \frac{1}{4}$; 3) $\frac{KP}{MQ} = \frac{5}{8}$.

Вариант 2

1. Скрещивающиеся, 65°. **2**. 1) $\frac{FK}{AB} = 3$; 2) $\frac{MT}{AB} = \frac{4}{7}$; 3) $\frac{FK}{TM} = \frac{7}{12}$.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Одна, четыре или бесконечно много. **2**. $\frac{9}{4}$. **3**. 36°. **4**. Из учебника. **5**. $4\sqrt{6}$.

Вариант 2

1. Одна, две или бесконечно много. **2**. $\frac{3}{5}$. **3**. 72°. **4**. Из учебника. **5**. 9 или $\sqrt{111}$.

Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. 25 см. **2**. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **3**. $ph \operatorname{ctg} \alpha$. **4**. $\frac{3}{2}S$. **5**. 5 граней, призма, площадь сечения $\sqrt{7}$.

Вариант 2

1. $\sqrt{6}$. **2.** $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$. **3.** $\frac{2S}{p}\operatorname{tg}\beta$. **4.** $6q$ **5.** 5 граней, призма, площадь сечения $\frac{3\sqrt{46}}{4}$.

Контрольная работа № 4

Вариант 1

1. 7π см^2. **2.** $60°$. **3.** $\frac{1+3\cos^2\alpha}{2\cos\alpha(1-\cos\alpha)}$. **4.** $\frac{13}{2}$. **5.** $\frac{17-\sqrt{33}}{16}$.

Вариант 2

1. $\frac{5\sqrt{6}}{3}$. **2.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **3.** $\frac{1+3\cos^2\alpha}{6\cos\alpha(1-\cos\alpha)}$. **4.** 2. **5.** $\frac{\sqrt{6}-1}{10}$.

Итоговая контрольная работа

1. В 2 раза. **2.** Прямоугольник, периметр 2, площадь от 0 до $\frac{1}{4}$ см^2. **3.** $2-\sqrt{3}$. **4.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** Площадь p, при $p > \pi$. **6.** $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Тематическое планирование материала предложено в книге «Геометрия. 11 кл. Методическое пособие к учебнику И. Ф. Шарыгина «Геометрия. 10—11».

Содержание