Предисловие

Учебно-методический комплекс «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 класс. Углублённый уровень» авторов Е. В. Потоскуева, Л. И. Звавича, состоящий из учебника, задачника и настоящего методического пособия для 10 класса, предназначен для обучения геометрии (стереометрии) учащихся 10 классов с углублённым изучением математики. Речь идёт об учащихся тех 10 классов, в которых углубление начиналось с 8 класса, в результате чего эти учащиеся к 10 классу уже достаточно сильно продвинуты в изучении математики, в частности, планиметрии. Кроме того, к этой же категории можно отнести и учащихся тех 10 классов, в которых профильное обучение начиналось в 9 или даже в 10 классах.

При изучении геометрии в 8—9 классах стереометрические вопросы специально не рассматривают, хотя, разумеется, школьники в абсолютном большинстве уже представляют себе, что такое пространство и плоскость. Они уже знакомы с такими геометрическими фигурами, как параллелепипед (в частности, куб), пирамида (в частности, тетраэдр), призма, цилиндр, конус, шар, а также с некоторыми их свойствами.

При углублённом изучении планиметрии учащиеся достаточно хорошо овладевают векторами. Они умеют применять их к решению многих планиметрических задач и сравнительно легко смогут перейти к изучению векторов в пространстве. Если же изучение планиметрии проходило на общеобразовательном уровне, то учителю либо потребуется дополнительное время на изучение темы «Векторы», либо эту тему придётся изучать в уменьшенном объёме, а при решении задач уменьшить использование векторного метода хотя и нежелательно, но возможно. То же самое можно сказать относительно взаимосвязи изучения координатных методов на плоскости и в пространстве.

В процессе изучения планиметрии были рассмотрены геометрические преобразования на плоскости — движения и гомотетия. И хотя аналогичное изучение вопросов преобразований в пространстве предусматривается в курсе 11 класса, некоторые идеи преобразований могут быть вполне использованы при работе в 10 классе. Например, применение центральной симметрии при знакомстве с параллелепипедом и гомотетии — при изучении параллельных сечений пирамиды.

Следует иметь в виду, что на уроки геометрии в классах с углублённым изучением математики отводится 3 часа в неделю, что, с одной стороны, в полтора раза больше, чем в классах с изучением геометрии на базовом уровне, а с другой стороны, даёт дополнительно всего один час в неделю и 33—34 часа в год, что, конечно, очень мало. В связи с этим, по нашему мнению, главным отличием на занятиях по геометрии в классах с углублённым изучением математики является не только углубление и расширение теоретического материала, но и методически верная подборка решаемых задач, как в количественном, так и в качественном отношении.

Прежде всего, необходимо решить все простейшие опорные задачи курса. Этими задачами ни в коем случае не следует пренебрегать, какими бы простыми они ни казались. Кроме того, следует учитывать, что методика решения таких задач в классах с углублённым изучением математики, вообще говоря, отличается от методики их решения в общеобразовательных классах и классах гуманитарной направленности. Только после решения всех опорных задач стоит переходить к более сложным задачам. Разумеется, сам отбор этих задач не только непрост, но и неоднозначен. В нашем задачнике выделены значком «☺» те задачи, которые считаем основными (среди них, в частности, находятся и все опорные). Естественно, что такой выбор в определённом смысле является условным и, возможно, будет изменён учителем в процессе работы по учебнику и задачнику.

Значительной проблемой при преподавании геометрии является малое количество задач, которое учитель успевает рассмотреть за время урока. Но всё же, решая задачи на уроке и дома, учащийся за отведённое учебное время может при умении и желании «нарешать» около 700 задач, что не так уж и мало. В задачнике более чем 1000 задач, во многих из которых есть ещё и «подзадачи».

В своей работе в классах с углублённым изучением математики мы уже более 30 лет используем опыт летних заданий по математике. Задания эти предлагаются учащимся на добровольной основе. Они состоят из шести «порций» по 20—30 задач, половина из которых по геометрии, а половина — по алгебре и математическому анализу. Каждая «порция» рассчитана на декады 20—30 июня, 1—10 июля и т. д., так до 10—20 августа. Выполнив задание каждой декады, учащиеся отправляют решения по почте (или другим согласованным способом) своему преподавателю; таким образом, получается шесть писем. Каждый школьник, приславший решения более чем 80% задач каждой декады, получает в первом полугодии нового учебного года «плавающую пятёрку», которую он может попросить выставить в свою строку журнала на любом уроке (разумеется, только единожды). Как показывает опыт, более двух третей учащихся выполняют летнее домашнее задание и тем самым сохраняют «спортивную математическую форму». Задачник, безусловно, даст возможность отбора 60 задач для таких летних заданий.

В данном пособии есть тексты контрольных работ, но нет текстов самостоятельных работ. На это есть ряд причин. С одной стороны, урочного времени не так много, чтобы учитель «бездействовал» во время урока, а самостоятельной работой является любое домашнее задание. С другой стороны, учитель, благосклонный к самостоятельным работам, найдёт в задачнике обширный и благодатный материал для их составления.

Конечно, хотелось бы именно на уроках рассмотреть со школьниками большинство из предложенных в задачнике упражнений. Для этого стоит подробнее рассмотреть *способы интенсификации процесса решения задач* на уроке и причины, мешающие этой интенсификации.

• На методически недостаточно подготовленных занятиях учащиеся, не видя текст условия задачи, воспринимают это условие на слух, что может привести к его неверному, неоднозначному пониманию. В этой связи, желательно, чтобы на каждой парте находился задачник с условием этой задачи, и школьники владели навыками быстрого прочтения и уяснения текстов. В этой связи полезно иметь в кабинете в качестве раздаточного материала комплект из 20—25 задачников.

Для ускорения хода урока учитель может представить условие задачи в конструктивном виде. Приведём пример.

Учителем зачитывается условие задачи: «Прямая MD перпендикулярна плоскости квадрата $ABCD$. Найдите угол между прямыми MB и AC, если сторона квадрата в два раза больше отрезка MD». Но можно поступить иначе. Учитель вызывает ученика к доске и, не зачитывая условие задачи, говорит: «Нарисуйте изображение квадрата $ABCD$. К его плоскости проведите перпендикуляр MD. Соедините прямыми точки A и C, M и B. Теперь найдите угол между прямыми MB и AC, если $AD = 2MD$».

Разумеется, таким способом сообщать условие каждой задачи не следует, но в определённых ситуациях такая методика решения задач способствует ускорению хода урока в значительной мере.

• Учащиеся испытывают затруднения при изображении фигур по условию задачи, медленно и не всегда с первого раза верно выполняют рисунок. В этой связи целесообразно на первых уроках изучения стереометрии чертежи к некоторым задачам выполнять самому учителю или под непосредственным его руководством.

• Могут использоваться и готовые чертежи. В учебнике и задачнике около 800 чертежей и рисунков, которые можно использовать в качестве образца при решении и других задач. Например, для решения рассмотренной выше задачи можно использовать рисунок 51 задачника, хотя он дан к задаче с другим условием.

• Нередко «стереометрический» рисунок можно не делать. Особенно это относится к обучению в 11 классе. Например, задача: «Найдите высоту правильной четырёхугольной пирамиды, все рёбра которой равны a», может быть решена без использования рисунка. Задача: «Площадь полной поверхности куба равна 13. Найдите диагональ куба», разумеется, не требует рисунка. Не требует рисунка и задача такого типа: «У пирамиды 252 ребра. Сколько у неё граней и вершин?» Не требуют рисунка и многие другие «качественные» задачи 10 класса. Например: «Определите все возможные случаи взаимного расположения прямой и плоскости квадрата, если: а) прямая перпендикулярна двум прямым, содержащим стороны квадрата; б) прямая перпендикулярна двум прямым, содержащим стороны квадрата, но не параллельна никакой прямой, содержащей сторону данного квадрата; в) прямая перпендикулярна двум прямым, одна из которых содержит сторону квадрата, а другая — его диагональ.

• Ход урока может быть значительно ускорен применением в классе навесных досок с заранее нанесёнными на них (нестираемыми) изображениями куба, тетраэдра и т. п. Эти же изображения можно «подавать на доску» при помощи кодоскопа или компьютера со специальной приставкой так, чтобы учащемуся только и оставалось, что обвести их мелом. Полезно иметь на стенах кабинета хорошо выполненные чертежи (именно чертежи, а не цветные рисунки с тенями) многих геометрических тел. Это даёт возможность учащемуся достаточно быстро перерисовать их на доску.

Процесс урока часто замедляется из-за неумелого применения геометрических инструментов или завышенных требований по их использованию. Неплохо, если учащиеся научатся проводить прямые линии без линейки. Особенно это просто сделать в тетрадях в клетку.

• Во время практикума по решению задач работа может быть организована так, что большинство учащихся решают задачу, рассматриваемую на доске, а нескольким учащимся предлагаются для решения другие задачи с последующим разбором их решения перед учащимися класса. Например, учитель говорит: «Иванов пойдёт решать задачу № 73 на доске, Петров на месте готовит решение задачи № 76, а Сидоров — на месте решение задачи № 80». При этом задача № 73 выбирается достаточно лёгкой, чтобы её можно было решить без подготовки.

• Во время решения задач на доске можно так организовать работу класса, что с помощью одного чертежа будут заслушаны решения нескольких нарастающих по сложности задач, предложенных различным учащимся. В задачнике очень многие задачи содержат большое количество связанных друг с другом и «организованных» в таблицы «подзадач». Например, № 2.037, 2.047, 3.006, 3.097—3.100, 4.029 и др.

Такой приём качественно ускоряет работу класса и увеличивает количество рассмотренного задачного материала. У любого учителя могут быть и свои методы увеличения темпа урока.

Как уже было отмечено, очень многие «беды» учащихся на уроках стереометрии происходят от неумения сделать правильный и удобный (конструктивный для решения задачи) ричунок. Причём речь идёт вовсе не об аккуратности, а о смысловой нагрузке рисунка.

Рисунок в стереометрии резко отличается от рисунка в планиметрии. Последний, как правило, точно (по крайней мере, с точностью до подобия на плоскости) соответствует данным задачи. При этом, если прямые параллельны по условию, то они параллельны на рисунке; если прямые перпендикулярны по условию, то они перпендикулярны на рисунке. Если отрезки равны по условию, то они равны на рисунке. Если луч OM на чертеже расположен во внутренней области угла POK, то величина угла POK равна сумме величин углов POM и MOK. И так далее.

В стереометрии при изображении пространственных фигур на плоскости наблюдается совершенно иная картина. Об этом достаточно написано в первой главе учебника.

Отметим также важность и необходимость того, чтобы каждый изучающий стереометрию, «видел» динамику (и диалектику) построения изображения геометрической фигуры на рисунке (чертеже). (Мы умышленно называем изображения то рисунками, то чертежами.)

Как уже говорилось, желательно, чтобы на стенах кабинета висело достаточное количество различных стереометрических чертежей, которые полезно обсуждать как можно чаще. При этом, конечно, надо много рисовать и чертить и на доске, и в тетради, обсуждая при этом полученные чертежи и рисунки. Мы советуем чаще обсуждать чертежи на протяжении всего 10 класса.

В процессе изучения стереометрического материала можно провести ряд самостоятельных работ на выполнение десятиклассниками конструктивно верных рисунков по заданным геометрическим ситуациям. При этом не столь уж важно, пользуются они линейкой или нет, но весьма важны наглядность и простота изображения, употребление штриховых линий там, где они нужны. Кроме того, полезно выполнять рисунок в цвете, так как выполненный в двух или трёх цветах рисунок не только более эффектен, но и более эффективен.

В задачнике имеются три графические работы. Эти работы соответствуют темам: «Следствия из аксиом стереометрии», «Параллельность в пространстве», «Перпендикулярность в пространстве». Приведённые в этих работах задачи, с одной стороны, достаточно просты для учащихся математических классов, но, с другой стороны, они очень важны. Человек, разобравшийся в них и безукоризненно выполнивший для каждой из них рисунок, достигает необходимого уровня геометрической культуры, который позволит справиться в дальнейшем с решением стереометрических задач более высокого уровня сложности.

Используя идеи, заложенные в графических работах, учитель может составить и другие графические работы, например: «Углы в пространстве», «Сечения многогранников», «Векторы», «Координатный метод» и др.

«Вхождение» в курс стереометрии целесообразно начать с обзора всевозможных многогранников. На интуитивном (наглядном) уровне рассказать учащимся о кубе, параллелепипедах, призмах, пирамидах и, в особенности, о тетраэдрах. Можно показать и круглые тела (фигуры вращения). Следует научить учащихся изображать многогранники и фигуры вращения. (Удобно при этом использовать клетчатую тетрадную бумагу.) Необходимо ввести понятия: ребро, вершина, грань, диагональ, плоский угол многогранника.

В школьном курсе геометрии часто приходится жертвовать логической строгостью, прибегая к наглядности. При изучении стереометрии авторы считают возможным и необходимым пользоваться рисунками, так как рисунки помогают понять содержание того или иного факта, проиллюстрировать суть понятия, представить то, о чём идёт речь в аксиоме, теореме, задаче. В этой связи авторы придерживаются концепции изучать начальные и основополагающие вопросы стереометрии (темы: «Аксиомы стереометрии и следствия из них», «Параллельность, перпендикулярность, расстояния в пространстве», «Векторный метод в пространстве») в задачах, используя модели и изображения куба, правильного тетраэдра, призмы, пирамиды, параллелепипеда, так как такие задачи обладают конструктивностью и содержательностью, а рассуждения учащихся при их решении становятся доступными и естественными, что, в свою очередь, приводит к сознательному и эффективному формированию у ученика конструктивных пространственных представлений.

Особый разговор следует повести о построении сечений куба и других многогранников, а в 11 классе — и тел вращения. Строить сечения куба учащиеся могут уже при изучении первой главы. В задачнике приведены многочисленные блоки рисунков для построения сечений куба. Первый блок — № 1.065, затем уже на другом уровне знаний и умений — № 4.030, 4.031, 4.032. Для освоения методов построения более сложных сечений в задачнике имеется дополнение Д1 «Методы построения сечений многогранника», рисунки которого также полезно изучать во время урока. При этом важно, чтобы учащиеся видели динамику «рождения» чертежа. Пример такого «рождения» чертежей можно видеть как в учебнике, так и в задачнике (рис. 71, 75). На этих рисунках мы «сняли фильмы» о решениях данных задач. Такие «фильмы» можно «снимать» и по решению более сложных задач на построение сечений многогранников, при этом все построения удобно делать, например, простым карандашом и только отрезки, новые для данного «кадра», «строить» другим цветом.

Аналогичный приём двух и более цветов «развивающегося» чертежа удобно применять и при доказательствах теорем.

Не нужно путать технику графического построения чертежа с решением задач на построения в пространстве, которые носят чисто теоретический характер. Список важнейших задач, составленный в логической последовательности, дан в задачнике на с. 213. По этому списку возможно проведение зачётов на данную тему.

Особенности изучения теории, на наш взгляд, состоят в безусловном доказательстве на уроках всех рассматриваемых теорем (кроме особо оговорённых случаев), вынесении этих доказательств на устные зачёты и другие возможные устные испытания, в создании стройной системы этих доказательств. В частности, на наш взгляд, совершенно не обязательно в начале курса стереометрии приводить полную систему аксиом, учитывая все требования, предъявляемые к такой системе.

В учебнике нет строгого аксиоматического построения стереометрии. На основании нескольких аксиом последовательно доказываются теоремы стереометрии. При этом школьникам, естественно, можно и нужно сказать, что это не полная система аксиом, что мы изучаем школьный предмет «Геометрия», а не институтский курс «Основания геометрии». Основная цель изучения системы доказательств теорем стереометрии состоит в развитии личности учащегося — развитии логического мышления, логической памяти и т. п. Помимо этого, теоремы и их доказательства требуются при решении задач не только для обоснования того или иного утверждения, но и для поиска самого решения задачи, для устранения ложных или неоправданно сложных путей.

Изложение теории целесообразно вести лекционным методом, крупными тематическими блоками.

Отметим, что выбор учителем нашего учебника и задачника в качестве основных даёт большие возможности для подробного изучения стереометрии, но это вовсе не означает, что в процессе обучения не могут использоваться другие учебники, пособия и задачники. Так, например, наши учащиеся и в дальнейшем смогут заглядывать в целый ряд книг и использовать их.

Заметим, что наш комплекс также может быть использован в качестве дополнительных материалов при работе в классах с углублённым изучением математики и в общеобразовательных классах, и классах гуманитарной направленности.

В курсе стереометрии 10 класса доказывается довольно большое количество теорем, необходимых как для формирования теоретических знаний и логического аппарата учащихся, так и для дальнейшего осознанного и обоснованного решения задач.

В работе с учениками очень удобно создать *список изученных теорем* в порядке их прохождения. Причём в списке не должна присутствовать формулировка теоремы, там находится лишь её развёрнутое название. Например, «теорема о двух параллельных прямых, одна из которых пересекает данную плоскость». Наличие такого списка на руках у учащихся способствует:

- формированию представлений о логической структуре курса и порядке доказательств теорем (что из чего следует и в каком порядке излагается);
- лучшему усвоению и запоминанию ключевых моментов курса, способности лучше и быстрее ориентироваться в пройденном материале;
- возможности организовать на уроке быстрое повторение теории (учащимся предлагается найти в списке ту или иную теорему и по названию этой теоремы дать её полную формулировку);
- возможности сократить объяснение в контрольных и других письменных работах (наши ученики имеют право пользоваться данным списком на уроках, во время ответа у доски, на контрольных работах и даже на экзаменах; правда, на экзаменах данный список дублируется текстом билетов, но там теоремы даны достаточно хаотично);

• в определённой мере формированию умения учащихся пользоваться справочными материалами (мы используем на уроках геометрии книгу «Геометрия в таблицах», выпущенную в издательстве «Дрофа», — эта книга имеется у каждого из наших учащихся).

Заметим, что очень эффективным является умение учащихся сделать первоначальный чертёж к каждой из теорем списка и точно записать, что дано и что требуется доказать. Список может быть хорошей основой для проведения итоговой аттестации (итогового устного зачёта) за курс 10 класса.

Как в учебнике, так и в задачнике помещён список теорем курса (см. раздел «Приложение»). Мы советуем учащимся по мере изучения переносить блоки этого списка в свой компьютер и всегда иметь перед глазами распечатку пройденного.

На уроках, при решении домашних заданий, а может быть, и на контрольных работах учащиеся могут использовать помещённые в задачнике «Формулы планиметрии, стереометрии и тригонометрии»; они в определённой мере заменят справочный материал.

Следует обращать внимание на логику построения и точность письменной записи, сделанной учащимися как в контрольной работе, так и при решении задач на уроке и дома. Не стоит позволять придумывать свои обозначения или заменять смысл общепринятых обозначений другими. Например, запись «$a \cap b$» вовсе не означает, что прямые a и b пересекаются (эта запись обозначает множество всех общих точек прямых a и b, которое может быть и пустым).

В задачнике помещён список принятых условных обозначений. Эти обозначения, как правило, весьма удобны, хотя, разумеется, не стоит доводить до абсурда требования к их употреблению. Так, например, учащийся вполне может написать: «прямая AB лежит в плоскости ABC», не употребляя ни скобок, ни знака включения.

На протяжении начального изучения стереометрии весьма полезно предлагать учащимся для решения задачи стереометрического содержания, которые очень быстро, но своеобразно сводятся к планиметрическим. Приведём пример такой задачи с заложенной в ней подсказкой решения.

«Диагональ AC четырёхугольника $ABCD$ делит его на правильный треугольник ACD со стороной 10 и прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC и катетом AB, равным 5. Этот четырёхугольник перегнули по диагонали AC

так, что точка B не лежит в плоскости ACD. На прямой AC взяли такую точку M, что сумма длин отрезков BM и MD наименьшая. Найдите значение этой суммы». Ответ: $5\sqrt{7}$.

Как мы уже говорили, в самом условии этой задачи заложена подсказка разогнуть четырёхугольник и найти длину диагонали BD. Дадим формулировку той же задачи без подсказки:

«Точка B не лежит в плоскости правильного треугольника ACD со стороной 10. $AB = 5$ и угол ABC — прямой. Точка M принадлежит прямой AC. Найдите наименьшее значение длины ломаной BMD».

Программа изучения стереометрии в 10 классе достаточно насыщенна. Кроме пяти тем, связанных с вопросами о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей в пространстве, о вычислении расстояний между ними, а также о нахождении углов между прямыми и плоскостями, в курсе рассмотрены ещё две темы: «Векторный метод в пространстве» и «Координатный метод в пространстве».

Обе эти темы, безусловно, важные, но, в отличие от предыдущих, могут изучаться на различных уровнях углубления. Подробное изучение векторного метода даст возможность практического его применения. К примеру, некоторые теоремы первых пяти глав учебника доказываются с использованием векторного метода в шестой главе. В седьмой главе ряд геометрических мест точек в пространстве определяется координатным методом.

Мы поместили в учебнике 10 класса краткий обзор вопросов, которые будут изучены в 11 классе. Это сделано нами для того, чтобы сделать структуру преподавания курса стереометрии прозрачной и понятной для ученика. Ученик 10 класса вполне способен оценить на некотором этапе изучения как уже накопленные им знания, так и перспективу дальнейшего изучения материала.

В пособии предложены десять контрольных работ (от нулевой до девятой). Рассматривая эти контрольные работы, учитель сам решит, полностью ли они соответствуют тому уровню знаний, который он собирается задать при работе с данным классом. При этом возможна как разгрузка контрольных работ за счёт изменения текстов задач и введения значков необязательных заданий, так и усложнение текстов.

Каждая контрольная работа предваряется списком подготовительных задач. На своём опыте мы убедились, что предложение такого списка (его можно назвать подготовительным вариантом) помогает учащимся структурировать свои знания и конкретизировать подготовку по данной теме.

К списку подготовительных задач учитель может добавить список теоретических вопросов к каждой контрольной работе, что также бывает весьма плодотворным. Вопросы для такого списка можно взять либо из списка теорем, либо из вопросов, предложенных в пособии для проведения зачётов.

Если учитель посчитает, что контрольных работ слишком много, он может либо не проводить часть из них, либо соединить две контрольные работы в одну, убрав часть заданий, либо провести контрольную в виде самостоятельной работы на уроке или в виде домашней контрольной работы.

Особое место уделяется «нулевой» контрольной работе, предназначенной для определения уровня знания учениками планиметрии. В почасовом планировании 10 класса можно выделить определённое время для повторения планиметрии. Однако такое выделение времени является необходимым, на наш взгляд, только тогда, когда в силу различных причин учитель не представляет себе уровня знания планиметрии его учениками (например, учитель только начал работать с этим классом) или, наоборот, представляет себе этот уровень, и он кажется ему весьма и весьма недостаточным для дальнейшего изучения геометрии.

В разделе «Дополнения» задачника более чем на 40 страницах располагаются «Материалы для повторения и углубления планиметрии». Данных в этом разделе 256 задач вполне достаточно, чтобы поднять «планиметрическую культуру» учащихся. Поможет им и список формул планиметрии, помещённый в приложениях к задачнику.

Для тех учителей, которые сочтут нужным проводить зачёты по темам курса, в данной книге для учителя разработаны 4 *зачёта*.

Зачёт № 1 по темам: Введение в стереометрию. Аксиомы стереометрии. Взаимное расположение прямых в пространстве. (Повторение темы «Треугольники».)

Зачёт № 2 по темам: Взаимное расположение прямой и плоскости. Перпендикулярность прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью. (Повторение темы «Окружность».)

Зачёт № 3 по темам: Параллельное проектирование. Параллельные плоскости. Угол между двумя плоскостями.

Расстояния в пространстве. (Повторение темы «Четырёхугольники».)

Зачёт № 4 по темам: Векторы в пространстве. Координаты в пространстве. (Повторение темы «Векторы и координаты на плоскости».)

Зачёт состоит из 10 билетов, каждый из которых содержит два теоретических вопроса и две задачи, посвящённые как новым темам стереометрии, так и темам планиметрии, повторение которых обозначено в зачёте.

В большинстве школ с углублённым изучением математики в той или иной форме проводится итоговый годовой контроль. Мы предлагаем материалы для проведения устного экзамена (итогового устного испытания по курсу стереометрии), содержащего 19 билетов, которые включают 2 устных вопроса по стереометрии и 2 задачи, одна из которых — по планиметрии. В качестве элемента игры введён счастливый 13-й билет, и вытянувший его учащийся вправе сам определить билет, на который он будет отвечать.

В пособии имеется пример итогового теста. Для проведения письменного итогового испытания по стереометрии можно использовать материалы итоговой контрольной работы № 9.

Состав задачного материала не содержит трудных и олимпиадных задач. Однако в пособии основное внимание сосредоточено на том, как стоит решать те или иные помещённые в задачнике упражнения, дать наиболее оптимальные чертежи к ним. Это, разумеется, не означает, что предложенный способ является единственным или наилучшим. Как известно, в большинстве случаев такой способ вообще трудно определить.

Требования к результатам обучения изложены в соответствующем разделе рабочей программы комплекса, размещённой на сайте издательства «Дрофа» www.drofa.ru. Достигаемые предметные результаты при изучении материала параграфов учебника представлены в методических указаниях данного пособия к каждому параграфу.

Если пособие попадёт в руки учащегося, то он может изучать представленное решение, что будет большим подспорьем в развитии его умения работать с текстом задачи и решать её.

Авторы выражают искреннюю благодарность за неоценимую помощь в подготовке рукописи к печати учителю математики Тамаре Николаевне Потоскуевой.

Примерное тематическое планирование

(3 ч в неделю, всего 102 ч)

Введение в стереометрию (1—8)

Предмет стереометрии. Основные понятия стереометрии. Аксиомы стереометрии. Следствия из аксиом. О плоскости, проходящей: через прямую и не лежащую на ней точку; через две пересекающиеся прямые; через две параллельные прямые. Пересечение прямой и плоскости, двух плоскостей. Техника выполнения простейших стереометрических чертежей. Стереометрические фигуры: куб, параллелепипед, призма, пирамида, сфера и шар. Построение сечений куба и тетраэдра. Графическая работа № 1.

Контрольная работа № 1.

Взаимное расположение прямых в пространстве (9—16)

Пересекающиеся и параллельные прямые в пространстве. Скрещивающиеся прямые. Признаки скрещивающихся прямых. Теорема о двух параллельных прямых, одна из которых пересекает плоскость. Теорема о транзитивности параллельности прямых в пространстве. Направление в пространстве. Теорема о равенстве двух углов с сонаправленными сторонами. Определение угла между скрещивающимися прямыми. Решение простейших задач на построение в пространстве (проведение через точку: прямой, параллельной данной прямой; прямой, скрещивающейся с данной прямой). Число решений задачи на построение.

Контрольная работа № 2.

Взаимное расположение прямой и плоскости (17—25)

Параллельность прямой и плоскости. Признак параллельности прямой и плоскости. Теорема о линии пересечения двух плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную другой плоскости. Теорема о линии пересечения двух плоскостей, каждая из которых проходит через одну из параллельных прямых. О плоскости, проходящей через одну из скрещивающихся прямых параллельно другой прямой. Решение простейших задач на построение в пространстве (проведение через точку прямой, параллельной данной плоскости, и плоскости, параллельной данной прямой).

Перпендикулярность прямой и плоскости (26—34)

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная. Теоремы о длинах перпендикуляра, наклонных и проекций. Теоремы о трёх перпендикулярах (прямая и обратная). Теорема о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости. Теорема о двух прямых, перпендикулярных плоскости. Построение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой. Построение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной плоскости.

Контрольная работа № 3.

Угол между прямой и плоскостью (35—43)

Определение угла между наклонной и плоскостью. О величине угла между наклонной и плоскостью. Угол между прямой и плоскостью. Методы нахождения угла между наклонной и плоскостью.

Параллельное проектирование. Свойства параллельного проектирования. Ортогональное проектирование, его свойства.

Параллельные плоскости (44—51)

Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Параллельность плоскостей. Признаки параллельности двух плоскостей. Теорема о линиях пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью. Теорема о прямой, пересекающей одну из двух параллельных плоскостей. Теорема о плоскости, пересекающей одну из двух параллельных плоскостей. Теорема о проведении плоскости, параллельной данной плоскости, через точку, не лежащую на ней; единственность такой плоскости. Теорема о транзитивности параллельности плоскостей в пространстве. Теорема об отрезках параллельных прямых, заключённых между двумя параллельными плоскостями. Теорема о прямой, перпендикулярной одной из двух параллельных плоскостей.

Контрольная работа № 4.

Угол между двумя плоскостями (52—60)

Двугранный угол. Линейный угол двугранного угла. Теорема о линейном угле двугранного угла. Перпендикулярные плоскости. Признак перпендикулярности двух плоскостей. Теорема о прямой, перпендикулярной линии пересечения двух взаимно перпендикулярных плоскостей и лежащей в одной из них. Теорема о прямой, перпендикулярной одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и имеющей со второй плоскостью общую точку. Теорема о линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей. Угол между двумя плоскостями. Методы нахождения двугранных углов и углов между двумя плоскостями. Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых. Теорема о площади ортогональной проекции многоугольника.

Контрольная работа № 5.

Расстояния в пространстве (61—69)

Расстояние между двумя точками. Расстояние между точкой и фигурой. Расстояние между точкой и прямой. Расстояние между точкой и плоскостью. Расстояние между точкой и сферой. Расстояние между двумя фигурами. Расстояние между двумя параллельными прямыми. Расстояние между прямой и плоскостью. Расстояние между двумя плоскостями. Расстояние между скрещивающимися прямыми. Геометрические места точек пространства, связанные с расстояниями. Приёмы нахождения расстояний между фигурами в пространстве.

Контрольная работа № 6.

Уроки обобщения пройденного материала о параллельности, перпендикулярности, углах и расстояниях в пространстве (70—72)

Векторы в пространстве (73—81)

Вектор в пространстве. Коллинеарность двух векторов; компланарность трёх векторов. Угол между векторами. Линейные операции над векторами (сложение, вычитание, умножение вектора на скаляр) и их свойства. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам, компланарным данному вектору. О трёх некомпланарных векторах в пространстве: векторный базис пространства; разложение вектора и его координаты в данном базисе. Условие коллинеарности двух векторов и компланарности трёх векторов. Скалярное произведение векторов и его свойства. Формулы, связанные со скалярным произведением. Условие ортогональности двух векторов. Решение геометрических задач векторным методом.

Контрольная работа № 7.

Координаты в пространстве (82—92)

Ортонормированный базис в пространстве. Прямоугольная декартовая система координат в пространстве. Координаты вектора, действия над векторами в координатах. Проекция вектора на ось в координатах. Условия коллинеарности и ортогональности двух векторов в координатах. Координаты точки. Формулы нахождения: расстояния между двумя точками в координатах; координат середины отрезка и точки, делящей отрезок в данном отношении. Уравнение и неравенства, задающие множества точек в пространстве. Уравнение сферы и неравенство шара.

Уравнение плоскости в пространстве. Уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно данному вектору. Общее уравнение плоскости и его исследование. Уравнение плоскости в отрезках и другие виды уравнений плоскости. Угол между двумя плоскостями в координатах, условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Прямая в координатах. Угол между двумя прямыми в координатах, условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости в координатах. Угол между прямой и плоскостью в координатах, условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Формула расстояния от точки до плоскости. Решение геометрических задач координатным методом.

Контрольная работа № 8.

Повторение (92—102)

Теория, практикум по решению задач по планиметрии и стереометрии. Устный зачёт.

Итоговая контрольная работа № 9.

Методические указания

В данном разделе предлагаются краткие методические рекомендации по изучению курса стереометрии в соответствии с главами учебника, решения и указания к решениям ряда задач из задачника.

Заметим, что система задач к каждому разделу стереометрии, реализованная по принципу «от простого — к сложному», позволяет, с одной стороны, учителю дифференцированно и целенаправленно рекомендовать каждому ученику задачи определённой сложности, с другой стороны, каждому ученику самостоятельно, «по вкусу» выбрать для решения ту или иную задачу. Вместе с тем учащийся, прежде чем приступить к решению сложной задачи, должен решить простейшие задачи к данному разделу стереометрии: эти задачи являются опорными (базисными, ключевыми).

Любая задача может быть решена не единственным методом, и приведённые ниже решения не претендуют на единственно возможные. Наоборот, авторы предполагают поиск, нахождение и учителями, и учениками других, более рациональных решений задач. Более того, мы не пытались дать какие-то «сверхрациональные» или «сверхоригинальные» решения; наши решения в основном рабочие и достаточно стандартные.

Следует особо отметить, что эти решения ни в коем случае нельзя принимать за образцы оформления решения той или иной задачи ввиду, например, отсутствия в них полных аргументированных обоснований того или иного утверждения, что обусловлено невозможностью подробного разбора огромного количества всех задач в небольшой по объёму книге.

Глава 1. Введение в стереометрию

При строгом аксиоматическом методе построения (обосновании) евклидовой геометрии доказательство того или иного геометрического утверждения должно основываться лишь на логических умозаключениях. В школьном же курсе геометрии часто приходится жертвовать логической строгостью, прибегая к наглядности. Поэтому при изучении стереометрии авторы считают возможным и необходимым пользоваться рисунками, так как они помогают понять содержание того или иного факта, проиллюстрировать суть понятия, представить то, о чём идёт речь в аксиоме, теореме, задаче.

В этой связи начальные и основополагающие вопросы стереометрии предлагаются изучать с помощью изображений куба, правильного тетраэдра, паралеллепипеда, призмы, пирамиды и соответствующих последующих построений на этих изображениях.

Учитывая, что интуитивное, живое пространственное воображение в сочетании со строгой логикой мышления — ключ к изучению стереометрии, желательно выработать у ученика умение наглядно представить, вообразить, нарисовать фигуры, о которых идёт речь в аксиоме, теореме, задаче.

И хотя при изучении геометрии рисунок, вообще говоря, не имеет доказательной силы, даже если он выполнен безупречно, тем не менее верно, наглядно и хорошо выполненный рисунок к задаче — это надёжный помощник при её решении.

§ 1—3. Предмет стереометрии. Основные понятия. Аксиомы стереометрии

Не исключено, что основные понятия и аксиомы стереометрии будут сообщены ученикам учителем в форме лекции-беседы. При этом заслуживают внимания комментарии относительно аксиомы расстояния.

Смысл этой аксиомы состоит в следующем. По аксиоме R_1 в любой плоскости выполняются аксиомы планиметрии. Следовательно, на любой плоскости любым двум точкам A и B ставится в соответствие положительное число — расстояние между ними на этой плоскости. Хотя через точки A и B проходят одновременно различные плоскости, аксиома R_7 утверждает, что расстояние между точками A и B будет одно и то же на каждой из этих плоскостей. Но если точки A и B принадлежат фигуре, не являющейся плоскостью (например, точки A и B принадлежат различным граням куба, тетраэдра или сфере), то достаточно «увидеть и построить» плоскость, содержащую эти точки, и в этой плоскости найти расстояние между ними.

Заметим, что расстояние — одно из фундаментальных понятий геометрии, поэтому в задачнике содержится большое число задач на нахождение различного вида расстояний, а вопросу о нахождении расстояний будет уделено пристальное внимание в задачах каждого изучаемого раздела стереометрии.

При построении (рисовании) сечений тетраэдра и куба плоскостями (задачи **1.033—1.040**) полезно пояснить учащимся, какие грани данного многогранника пересекает заданная плоскость, построив при этом отрезки получающихся пересечений. При этом строить точки пересечения прямой и плоскости, проводить прямые пересечения двух плоскостей, отрезки пересечения грани и плоскости следует после логического обоснования их существования и единственности на основании соответствующих аксиом и теорем.

При изучении § 1—3 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

- понимать и объяснять содержание введённых аксиом стереометрии;
- задавать плоскость в пространстве тремя точками, не лежащими на одной прямой; прямой и не принадлежащей ей точкой; двумя пересекающимися прямыми;
- строить изображения куба, параллелепипеда, призмы, пирамиды;
- на моделях и изображениях многогранников определять (изображать) точки, прямые, плоскости; производить символические обозначения, записи; выполнять дополнительные построения на этих изображениях;
- формулировать и иллюстрировать аксиомы стереометрии с использованием изображений и моделей куба, параллелепипеда, призмы, пирамиды;
- строить точки пересечения прямой и плоскости, проводить прямые пересечения двух плоскостей;
- вырабатывать навык начинать решение стереометрической задачи с изображения фигур, о которых идёт речь в этой задаче, сопровождая аргументированными объяснениями возникающие утверждения;
- решать задачи на доказательство, построение и вычисление, используя аксиомы стереометрии.

1.026. Дана плоскость α и три прямые AB, BC и AC, пересекающие её соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Доказать, что точки A_1, B_1 и C_1 принадлежат одной прямой.

Решение. По условию точки $A = AB \cap AC$, $B = AB \cap BC$ и $C = BC \cap AC$ не лежат на одной прямой, значит, по аксиоме R_2 через них можно провести единственную плоскость. Обозначим её β (рис. 1). В этой плоскости по аксиоме R_4 лежат прямые AB, BC и AC. Так как прямая AB лежит в плоскости β и пересекает плоскость α в точке A_1, то по аксиоме R_5 плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой m, проходящей через A_1. Вследствие того, что $BC \subset \beta$, $AC \subset \beta$, точки $B_1 = BC \cap \alpha$ и $C_1 = AC \cap \alpha$ также принадлежат прямой m.

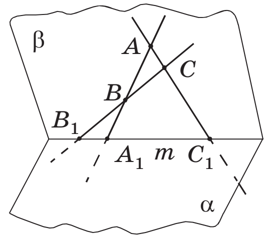


Рис. 1

1.040. Дан правильный тетраэдр $EFGS$, у которого $EF = 12$. Точки L и N лежат на рёбрах SG и SE соответственно, причём $SL = 3$, $SN = 3$. Точка T — середина ребра SF. 1) Построить: а) точку Y_1 пересечения прямой TL и плоскости EFG; б) точку Y_2 пересечения прямой TN и плоскости EFG; в) точку пересечения прямой TN и плоскости ELF; г) прямую пересечения плоскостей LY_1Y_2 и NFE. 2) Найти: а) длину отрезка Y_1Y_2; б) отношение, в котором плоскость LY_1Y_2 делит отрезок SE, считая от точки S.

Решение. 1. а) Так как прямые TL и GF лежат в одной плоскости FGS (рис. 2) и не параллельны, то точка их пересечения является точкой пересечения TL и плоскости EGF, т. е. $Y_1 = TL \cap GF = TL \cap (EGF)$.

1. б) Аналогично $Y_2 = TN \cap EF = TN \cap (EGF)$.

1. в) Точкой пересечения прямой TN и плоскости EFL является точка Y_2 пересечения прямых TN и EF, лежащих в одной плоскости EFS.

1. г) Плоскость LY_1Y_2 совпадает с плоскостью NTL, а плоскость NFE — с плоскостью SEF, поэтому $(LY_1Y_2) \cap (NEF) = NY_2$.

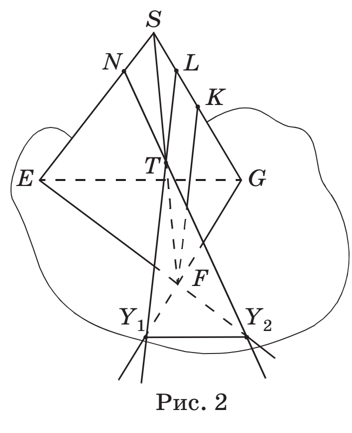


Рис. 2

2. а) Если K — середина стороны GS правильного $\triangle FGS$, то L — середина SK, значит, $LT \parallel KF$. Тогда $Y_1F : FG = LK : KG = 1 : 2$,

откуда $Y_1F = 0{,}5FG = 6$. Аналогично $Y_2F = 0{,}5FE = 6$. А так как $\triangle FGE$ — правильный, то $\angle Y_1FY_2 = 60°$, поэтому $Y_1Y_2 = 6$.

2. б) $(LY_1Y_2) \cap SE = N$, значит, плоскость LY_1Y_2 делит отрезок SE в отношении $SN : NE = 1 : 3$.

§ 4. Следствия из аксиом. Способы задания плоскости

Прежде всего следует заметить, что рассматриваемые в этом параграфе учебника простейшие следствия из аксиом доказываются нами методом «от противного» (от противоположного), который применяется и при решении задач.

Применяя аксиомы стереометрии и первые следствия из них, учащиеся решают стереометрические задачи, в которых исследуются некоторые свойства геометрических фигур, расположенных в пространстве. К стереометрическим относятся, например, задачи на построение сечений многогранников плоскостями, при этом каждый этап построения должен быть логически обоснован и сопровождаться вопросом: *«Из чего это следует?»*

Важно пояснить учащимся, что на основании аксиомы R_5 плоскость не может пересечь грань многогранника по ломаной, а может иметь с ней либо общий отрезок, либо общую точку (вершину многогранника), либо не имеет с ней общих точек. А так как сечением многогранника плоскостью является многоугольник, то число сторон многоугольника-сечения не может превышать числа граней многогранника. Причём если пересечением плоскости и многогранника является лишь одна точка (вершина многогранника) или лишь один отрезок (ребро многогранника), то эту плоскость мы не будем называть секущей.

Прорешав достаточное число задач этого параграфа на логически-наглядном уровне, учащиеся «привыкают» к тому, что плоскость в пространстве можно задать:

а) тремя точками, не лежащими на одной прямой;

б) прямой и не принадлежащей ей точкой;

в) двумя пересекающимися прямыми;

г) двумя параллельными прямыми.

В дальнейшем они узнают, что задать плоскость в пространстве можно и другими определяющими её элементами.

При изучении § 4 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

- понимать и объяснять сущность метода «от противного» при доказательстве теорем;
- задавать плоскость в пространстве тремя точками, не лежащими на одной прямой; прямой и не принадлежащей ей точкой; двумя пересекающимися прямыми; двумя параллельными прямыми;
- доказывать первые следствия из аксиом, корректно обосновывая возникающие утверждения;
- видеть на моделях и изображениях многогранников параллельные прямые;
- изображать плоскость в пространстве, задавая её: тремя точками, не лежащими на одной прямой; прямой и не принадлежащей ей точкой; двумя пересекающимися прямыми; двумя параллельными прямыми;
- строить плоские сечения многогранников на основании системы аксиом, аргументированно объясняя каждый шаг построения;
- решать задачи на применение аксиом стереометрии и их следствий с использованием моделей и изображений куба, параллелепипеда, пирамиды, сопровождая при этом аргументированными объяснениями возникающие утверждения;
- формулировать и иллюстрировать аксиомы стереометрии с использованием изображений и моделей куба, параллелепипеда, призмы, пирамиды, доказывать изученные теоремы;
- решать задачи на доказательство, вычисление и построение с использованием изображений куба, правильного тетраэдра, призмы, пирамиды, аргументируя утверждения и шаги построения.

1.052. Вершина A ромба $ABCD$ со стороной a лежит в плоскости α, а остальные его вершины лежат в одном полупространстве относительно плоскости α. Известно, что прямая BD пересекает плоскость α в точке K. а) Построить точки P и Q пересечения плоскости α с прямыми BC и CD. б) Найти отношение $PA : AQ$, если $BD : DK = 3 : 1$.

Решение. Пусть плоскость β, в которой лежит данный ромб, пересекает плоскость α по прямой m, проходящей че-

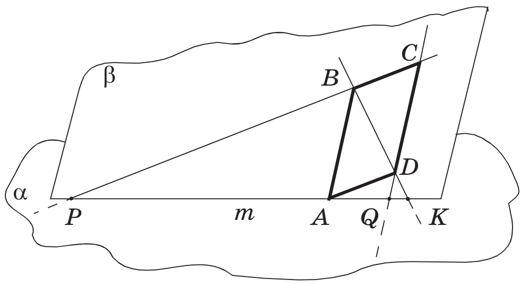


Рис. 3

рез A и K. Тогда $P = BC \cap \alpha = BC \cap m$, $Q = CD \cap \alpha = CD \cap m$ (рис. 3).

По теореме Фалеса (в плоскости) имеем:

$$BA \parallel CD \Rightarrow \frac{BD}{DK} = \frac{AQ}{QK} = 3;\ BC \parallel AD \Rightarrow \frac{BD}{DK} = \frac{PA}{AK} = 3.$$

Тогда:

$$\frac{PA}{AK} = \frac{AQ}{QK} \Rightarrow \frac{PA}{AQ} = \frac{AK}{QK} = \frac{AQ + QK}{QK} = \frac{AQ}{QK} + 1 =$$

$$= 3 + 1 = 4 \Rightarrow PA : AQ = 4 : 1.$$

1.055. Диагональ AC четырёхугольника $ABCD$ делит его на правильный треугольник ACD со стороной 10 и прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC и катетом AB, равным 5. Этот четырёхугольник перегнули по диагонали AC так, что точка B не лежит в плоскости ACD. На прямой AC взяли точку M так, что сумма длин отрезков BM и MD — наименьшая. Найти значение этой суммы.

Решение. Рассмотрим исходный четырёхугольник $ABCD$ (рис. 4, *а*). В $\triangle ABC$ ($\angle B = 90°$) имеем: $AB = 5 = 0{,}5AC \Rightarrow \angle ACB =$

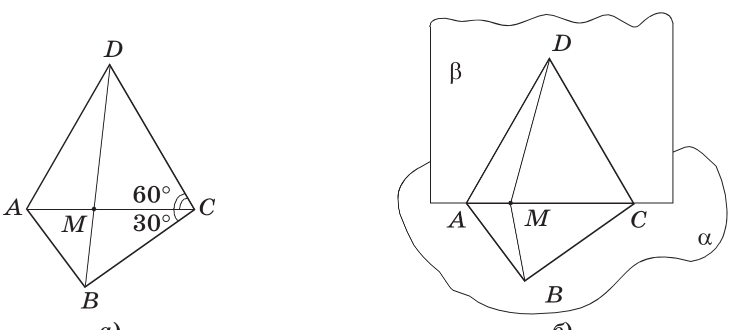


Рис. 4

$= 30°$. Значит, $\angle BCD = 90°$. Тогда $BD = \sqrt{2AC^2 - AB^2} = 5\sqrt{7}$.

Так как самый короткий путь от B до D — отрезок BD, то искомая точка M есть точка пересечения диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$. При перегибании четырёхугольника $ABCD$ по диагонали AC (рис. 4, *б*) сумма $BM + DM$ остаётся неизменной, равной $5\sqrt{7}$, и является наименьшей.

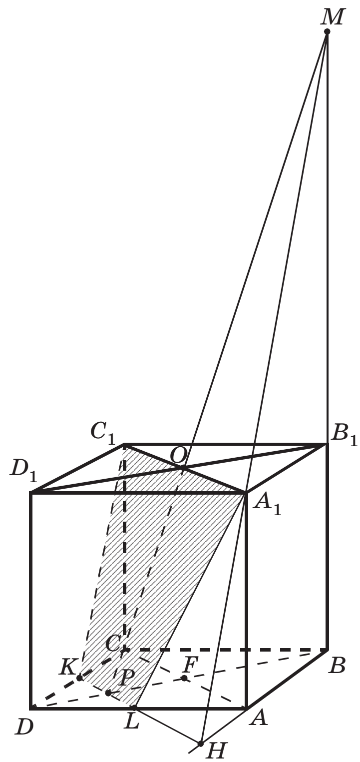


Рис. 5

1.060. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром a. O — точка пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$; точка K — середина DC; точка M лежит на луче BB_1, $B_1M = 2a$. Построить сечение куба плоскостью OKM и определить его вид.

Решение. Строим (рис. 5) точки: 1) $P = MO \cap BD$, причём $B_1D_1 \parallel BD \Rightarrow MB_1 : MB = B_1O : BP = 2 : 3$, откуда $PF : FB = 1 : 2$, где $F = AC \cap BD$. Это означает, что $KP \parallel AC$; 2) $L = KP \cap AD$, причём $DL = LA$; 3) $H = KP \cap AB$, причём $AH : AB = 1 : 2$; 4) $A_1 = HM \cap A_1B_1$; 5) $C_1 = A_1O \cap CC_1$. При этом плоскость OKM пересекает плоскость грани ABB_1A_1 по прямой MH. Так как $MB_1 : MB = A_1B_1 : BH$ и $A_1B_1 \parallel BH$, то прямая MH проходит через A_1. Тогда пересечением плоскости OKM и грани $A_1B_1C_1D_1$ является отрезок A_1C_1, следовательно, искомым сечением куба является трапеция KLA_1C_1.

1.063. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины 4 точка M принадлежит ребру AA_1 и $AM = 3$, точка P принадлежит ребру CC_1 и $PC_1 = 1$, точка K делит ребро DD_1 в отношении $1 : 3$, считая от D. Найти расстояние от вершины B до прямой пересечения плоскостей KMP и ADC.

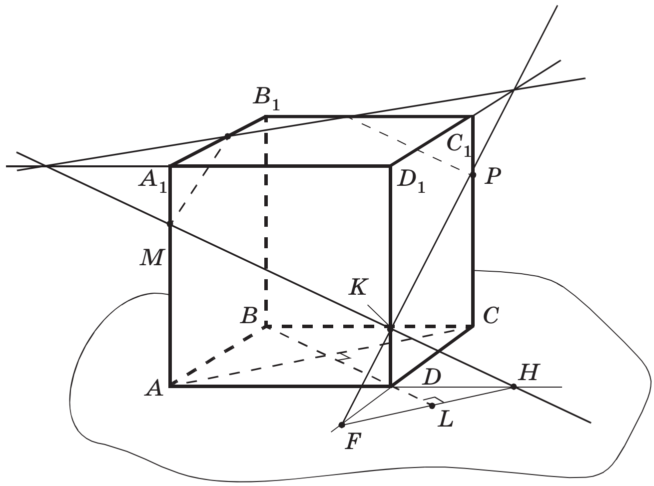


Рис. 6

Решение. Построив точки $F = PK \cap CD$ и $H = MK \cap AD$, получаем прямую $FH = (MPK) \cap (ADC)$ (рис. 6).

Имеем: $KD : PC = 1 : 3$, $KD \parallel PC \Rightarrow DF : FC = 1 : 3$, откуда $FD = 2$. Аналогично находим $HD = 2$. Значит, равнобедренный прямоугольный $\triangle FDH$ гомотетичен треугольнику CDA, поэтому $FH \parallel AC$, и перпендикуляр BL из точки B на прямую FH содержит диагональ BD квадрата $ABCD$, при этом $BL = BD + 0{,}25BD = 5\sqrt{2}$.

Задачи к главе 1

1.071. $MABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида. O — точка пересечения диагоналей основания $ABCD$. $MO = AB = a$. Точка O — середина отрезка MP; точка K — середина MD; точка T принадлежит лучу BC, причём $CT = \dfrac{a}{3}$ и C лежит между B и T. Построить сечение пирамиды плоскостью PKT, определить его вид и найти длину стороны сечения, лежащую на основании пирамиды.

Решение. Пусть Q — точка пересечения медиан PK и DO равнобедренного треугольника MDP (рис. 7). Тогда $BO : OQ = BC : CT = 3 : 1$. Это означает, что $TQ \parallel AC$. Если при этом $H = TQ \cap AD$, $L = TQ \cap DC$, то отрезок HL — искомая сторо-

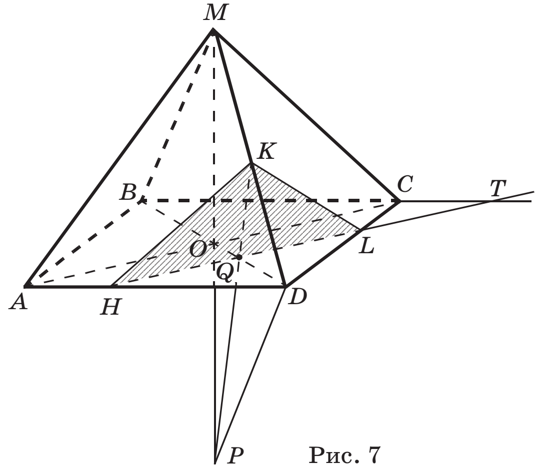


Рис. 7

на сечения HKL данной пирамиды, причём $\triangle HKL$ — равнобедренный и $HL = \frac{2}{3}AC = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Глава 2. Прямые в пространстве

§ 6. Классификация взаимного расположения двух прямых в пространстве

Не всякие две прямые пространства лежат в одной плоскости, иначе говоря, не через любые две прямые пространства можно провести плоскость: наряду с пересекающимися и параллельными прямыми, в пространстве существуют скрещивающиеся прямые. Учащимся следует пояснить, что через две параллельные или две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость, в то время как **через две скрещивающиеся прямые плоскость провести невозможно.**

Прежде чем приступить к решению задач, учащиеся должны уяснить, что при взаимном расположении двух прямых в пространстве возможен один и только один из трёх случаев: либо они пересекаются, либо параллельны, либо скрещиваются. При этом параллельные прямые в пространстве обладают рядом свойств, напоминающих свойства параллельных прямых на плоскости, в частности, через точку пространства, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну.

При решении стереометрических задач учащиеся *должны знать*, что:

• если одна из двух параллельных прямых лежит в данной плоскости, то другая, параллельная ей прямая, не может эту плоскость пересекать;

• через точку пространства, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну;

• из двух пересекающихся прямых только одна может быть параллельна некоторой данной прямой;

• если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны;

• из двух скрещивающихся прямых только одна может быть параллельна некоторой прямой;

• если прямая a в точке M пересекает плоскость α, то эта прямая скрещивается с любой прямой плоскости α, не проходящей через точку M;

• если четыре точки A, B, C и E не лежат в одной плоскости, то прямые AB и CE, AC и BE, AE и BC попарно скрещиваются.

На моделях, изображениях тетраэдра, куба и других многогранников учащиеся наглядно могут увидеть различные пары прямых, определяя их взаимное расположение с помощью признаков, но не определений.

Типичной ошибкой учащихся являются их попытки доказать, что две прямые скрещиваются, пользуясь определением скрещивающихся прямых: невозможно найти плоскость, в которой лежат две данные скрещивающиеся прямые, так же как невозможно найти общую точку двух параллельных прямых в евклидовом пространстве.

Учащимся следует пояснить, что на плоском чертеже две скрещивающиеся прямые изображаются либо пересекающимися, либо параллельными прямыми, либо прямой и точкой, не принадлежащей этой прямой.

При изучении § 6 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

• понимать и объяснять, что для взаимного расположения двух прямых в пространстве возможен один и только один из трёх случаев; либо они пересекаются, либо параллельны, либо скрещиваются;

• понимать и объяснять, что если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещиваются (признак скрещивающихся прямых);

• доказывать, что данные прямые скрещиваются, на основании не определения, а признака скрещивающихся прямых;

• понимать и объяснять, что через точку пространства, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну;

• понимать и объяснять, что если одна из двух параллельных прямых лежит в данной плоскости, то другая, параллельная ей прямая, не может эту плоскость пересекать;

• понимать и объяснять, что из двух пересекающихся прямых только одна может быть параллельна данной прямой;

• понимать и объяснять, что если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны;

• понимать и объяснять, что из двух скрещивающихся прямых только одна может быть параллельна данной прямой;

• если прямая a в точке M пересекает плоскость α, то эта прямая скрещивается с любой прямой плоскости α, не проходящей через точку M;

• понимать и показывать, что на плоском чертеже две скрещивающиеся прямые изображаются либо пересекающимися, либо параллельными прямыми, либо прямой и точкой, не принадлежащей этой прямой;

• видеть на моделях, изображениях тетраэдра, куба и других многогранников интуитивно различные пары прямых, изображать их и с помощью признаков определять их взаимное расположение;

• строить на изображениях тетраэдра, куба и других многогранников (изображать) перпендикуляр из данной точки на данную прямую и находить его длину, аргументированно обосновывая каждый шаг построения и вычисления;

• формулировать определения параллельных, скрещивающихся прямых; формулировать и доказывать признак скрещивающихся прямых;

• решать задачи о взаимном расположении прямых в пространстве на доказательство, построение и вычисление, используя изображения и модели куба, правильного тетраэдра, призмы, пирамиды;

• доказывать, что: через точку пространства, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну; если одна из двух параллельных прямых лежит в данной плоскости, то другая, параллельная ей прямая не может эту плоскость пересекать; из двух пересекающихся прямых только одна может быть параллельна данной прямой; если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны; из двух скрещивающихся прямых только одна может быть параллельна данной прямой;

• изображать на построенных изображениях куба, правильного тетраэдра, правильной пирамиды и призмы, прямоугольного параллелепипеда различные случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве.

2.016. Прямая AB пересекает плоскость α. Через концы отрезка AB и его середину C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1 и C_1. Рассмотреть случаи: 1) отрезок AB не пересекает плоскость α; 2) отрезок AB пересекает α. В каждом случае найти: а) длину отрезка CC_1, если: $AA_1 = 7$, $BB_1 = 5$; б) длину отрезка AA_1, если $BB_1 = 7$, $CC_1 = 11$.

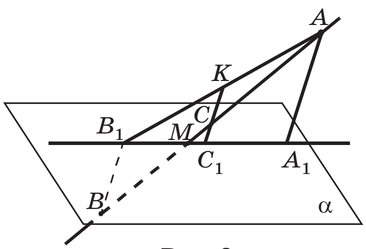


Рис. 8

Решение. 2. а) Пусть $K = CC_1 \cap AB_1$ (рис. 8). Тогда $CC_1 = C_1K - CK$. Так как CK и C_1K — средние линии треугольников соответственно ABB_1 и AA_1B_1, то $CK = 0{,}5BB_1 = 2{,}5$, $C_1K = 0{,}5AA_1 = 3{,}5$. Значит, $CC_1 = 1$.

2. б) Используя средние линии CK и C_1K треугольников соответственно ABB_1 и AA_1B_1, имеем: $AA_1 = 2C_1K = 2CK + 2CC_1 = 7 + 2 \cdot 11 = 29$.

2.019. Через вершины A, B, C и D параллелограмма $ABCD$, расположенного в одном полупространстве относительно плоскости α, точку O пересечения его диагоналей и центроид M треугольника BCD проведены параллельные прямые, которые пересекают данную плоскость α соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1, O_1, M_1. Найти MM_1, OO_1 и DD_1, если $AA_1 = 17$, $CC_1 = 5$, $BB_1 = 15$.

Решение. В трапеции AA_1C_1C (рис. 9) отрезок OO_1 — средняя линия, поэтому $OO_1 = \dfrac{AA_1 + CC_1}{2} = 11$. Тогда в трапеции BB_1D_1D со средней линией OO_1 находим $DD_1 = 2\,OO_1 - BB_1 = 2 \cdot 11 - 15 = 7$.

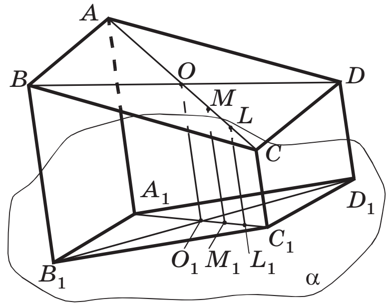


Рис. 9

Если $OM = ML = LC$, $MM_1 \parallel OO_1 \parallel LL_1$ и $MM_1 = x$, $LL_1 = y$, то в трапеции CC_1M_1M имеем $MM_1 = 2LL_1 - CC_1$ или $x = 2y - 5$, а в трапеции OO_1L_1L — $LL_1 = 2MM_1 - OO_1$ или $y = 2x - 11$. Тогда из $y = 2(2y - 5) - 11$ находим $y = 7$, значит, $x = MM_1 = 9$.

2.029. Пусть точка D не лежит в плоскости ABC; K — середина AB; P — середина CD; M — центроид треугольника ABC. а) Доказать, что фигура $ADPB$ не может быть трапецией. б) Доказать, что прямые DM и KP пересекаются. в) В каком отношении (считая от D) прямая KP делит отрезок DM? г) Определить взаимное положение прямых MP и AD. Ответы обосновать.

Решение. а) Трапеция — плоская фигура, а точки A, B, P и D не лежат в одной плоскости, так как прямые AB и DC скрещиваются.

б) Точки D, M, K и P (рис. 10) лежат в одной плоскости DKC ($P \in DC$), причём точки K и P разделены прямой DM, поэтому прямые KP и DM пересекаются в некоторой точке O.

в) Если H — центроид $\triangle ABD$, то $KH : KD = KM : KC = 1 : 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow HM \parallel CD$ и $HM : CD = 1 : 3$. Так как в трапеции середины оснований, точка пересечения боковых сторон и точка пересечения диагоналей лежат на одной прямой, то диагонали CH и DM трапеции $CDHM$ пересекаются в точке O. Тогда $DO : OM = CD : HM = 3 : 1$.

г) Прямые AD и PM скрещиваются по признаку скрещивающихся прямых.

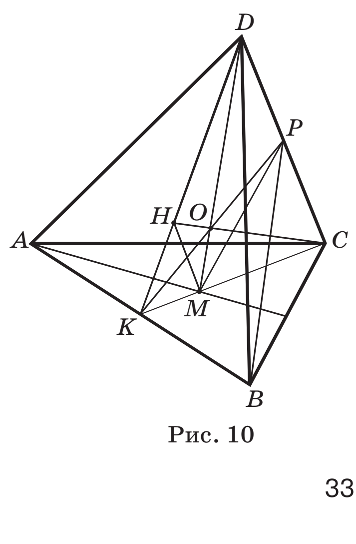


Рис. 10

§ 7. Угол между лучами. Угол между прямыми в пространстве. Перпендикулярные прямые

Во многих учебниках геометрии изучение этого вопроса отнесено на более позднее время. Мы считаем, что такой принцип тормозит как процесс решения задач, так и дальнейшее изучение теоретического материала.

Из планиметрии известно, что за величину угла между пересекающимися прямыми принимается величина наименьшего из углов, образованных этими прямыми.

Величину угла между скрещивающимися прямыми a и b определяют следующим образом. Через произвольную точку M пространства проводят прямые $a_1 \parallel a$ и $b_1 \parallel b$ и находят величину угла между пересекающимися прямыми a_1 и b_1. Эту величину и принимают за угол между скрещивающимися прямыми a и b. При этом величина угла между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки M.

Величина угла φ между прямыми в пространстве принадлежит промежутку $[0°; 90°]$; если $\varphi = 90°$, то прямые перпендикулярны; если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна некоторой прямой, то и вторая прямая перпендикулярна этой прямой.

Учащимся следует пояснить, что под углом между скрещивающимися прямыми понимают не аналог угла между пересекающимися прямыми, не геометрическую фигуру, а некоторую величину.

При решении задач для нахождения величины угла между двумя скрещивающимися прямыми a и b можно взять на одной из них, например на прямой a, любую точку M и в плоскости, определяемой прямой b и точкой M, провести через точку M прямую $b_1 \parallel b$. Угол между прямыми a и b_1 равен углу между скрещивающимися прямыми a и b. При этом выбирать следует ту из двух данных скрещивающихся прямых и такую точку на другой из них, чтобы полученное изображение угла было наглядным, а его построение наиболее простым; величина искомого угла не зависит от выбора точки M.

При изучении § 7 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

- понимать под углом между скрещивающимися прямыми не аналог угла между пересекающимися прямыми, не геометрическую фигуру, а некоторую величину;

• понимать и доказывать теорему о равенстве двух углов с сонаправленными сторонами;

• на моделях, изображениях куба, правильного тетраэдра, параллелепипеда, правильных пирамиды и призмы: изображать, определять и вычислять углы между пересекающимися и скрещивающимися прямыми, содержащими рёбра, диагонали многогранника, диагонали его граней, сопровождая каждый шаг построения и вычисления корректной аргументацией; изображать перпендикуляр из данной точки на данную прямую, находить его длину, аргументированно обосновывая каждый шаг построения и вычисления;

• строить сечения многогранников и находить их площади, периметры.

2.034. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали AC и BD грани $ABCD$ пересекаются в точке O. Найти угол между прямыми: а) AD_1 и A_1C_1; б) AB и DC_1; в) AB и C_1D_1; г) AD_1 и OD_1; д) AA_1 и OD_1.

Решение. Пусть ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 11) равно a. Тогда:

а) $\angle(AD_1,\ A_1C_1) = \angle(AD_1,\ AC) = \varphi$. В прямоугольном $\triangle AOD_1$ $AO = \frac{1}{2}AD_1$, поэтому $\varphi = 60°$.

б) $\angle(AB,\ DC_1) = \angle(AB,\ AB_1) = \alpha$. $\triangle ABB_1$ — равнобедренный прямоугольный, поэтому $\alpha = 45°$.

в) $AB \parallel C_1D_1 \Rightarrow \angle(AB, C_1D_1) = 0°$.

г) $\angle(AD_1,\ OD_1) = \psi$. В прямоугольном $\triangle AOD_1$ $AO = \frac{1}{2}AD_1$, поэтому $\psi = 30°$.

д) $\angle(AA_1,\ OD_1) = \angle(DD_1,\ OD_1) = \angle OD_1D = \beta$. В прямоугольном $\triangle ODD_1$ находим $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{OD}{DD_1} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

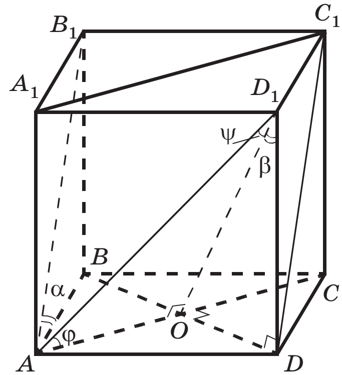


Рис. 11

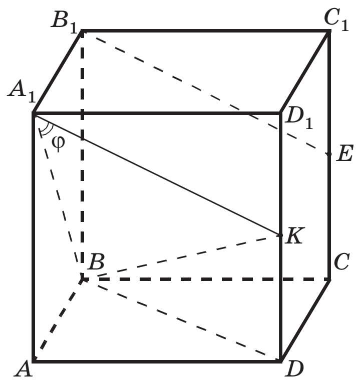


Рис. 12

2.035. Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построить угол между прямыми A_1B и B_1E и найти его величину, если длина ребра куба равна a.

Решение. Если K — середина ребра DD_1, то $A_1K \parallel B_1E$, поэтому $\angle(B_1E,\ A_1B) = \angle(A_1K,\ A_1B) = \angle BA_1K = \varphi$ (рис. 12).

В $\triangle A_1BK$:

$$\cos\varphi = \frac{A_1K^2 + A_1B^2 - BK^2}{2A_1K \cdot A_1B}.$$

Находим: $A_1K^2 = A_1D_1^2 + D_1K^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}a^2$; $A_1B^2 = 2a^2$; $BK^2 = BD^2 + DK^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{9}{4}a^2$. Тогда $\cos\varphi = $

$$= \frac{\frac{5}{4}a^2 + 2a^2 - \frac{9}{4}a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$ откуда $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

2.037. $EFGHE_1F_1G_1H_1$ — куб. Точки L, N и T — середины рёбер F_1G_1, G_1H_1 и H_1H соответственно; K — точка пересечения диагоналей грани EE_1F_1F.

Заполните таблицу расположения прямых и величин углов между ними.

№	Прямые	Расположение	Величина угла между прямыми
1	LN и EG		
2	F_1T и FH		
3	F_1N и KT		
4	TN и EG		
5	F_1T и KN		
6	KH_1 и LN		

Решение. Пусть ребро куба $EFGHE_1F_1G_1H_1$ (рис. 13) равно a.

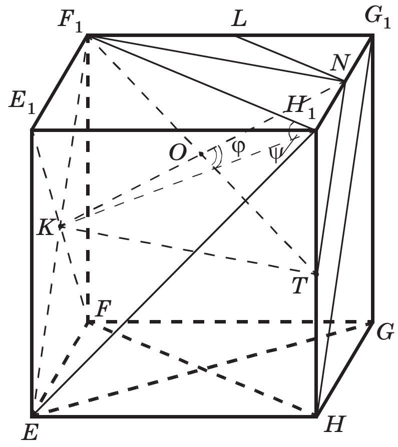


Рис. 13

1) Прямые LN и EG скрещиваются, при этом $LN \parallel FH$, поэтому $\angle(LN,\ EG) = \angle(FH,\ EG) = 90°$.

2) Прямые F_1T и FH лежат в одной плоскости и не параллельны: они пересекаются под углом $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

3) Отрезки F_1K и NT равны и параллельны $\Rightarrow F_1KTN$ — параллелограмм $\Rightarrow F_1N \parallel KN \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle(F_1N, KT) = 0°$.

4) $NT \subset (HGG_1)$, $EG \cap (HGG_1) = G \notin TN \Rightarrow TN$ и EG скрещиваются. $TN \parallel EF_1 \Rightarrow \angle(TN, EG) = \angle(EF_1, EG) = 60°$.

5) $F_1T \cap KN = O \Rightarrow \angle(F_1T, KN) = \angle TON = \varphi$. В $\triangle TON$ имеем $\cos\varphi = \dfrac{ON^2 + OT^2 - NT^2}{2ON \cdot OT}$.

Находим $NT^2 = 0{,}5a^2$; в $\triangle F_1G_1N$: $F_1N^2 = F_1G_1^2 + G_1N^2 = 1{,}25a^2$; в $\triangle F_1H_1T$: $F_1T^2 = F_1H_1^2 + H_1T^2 = 2{,}25a^2$. Тогда в параллелограмме F_1NTK получаем: $KN^2 = 2(F_1N^2 + NT^2) - F_1T^2 = 2 \cdot (1{,}25a^2 + 0{,}5a^2) - 2{,}25a^2 = 1{,}25a^2 \Rightarrow ON^2 = \dfrac{1}{4}KN^2 = 0{,}3125a^2$. Далее, $OT^2 = \dfrac{1}{4}F_1T^2 = 0{,}5625a^2$. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{0{,}3125a^2 + 0{,}5625a^2 - 0{,}5a^2}{2 \cdot \dfrac{a\sqrt{5}}{4} \cdot 0{,}75a} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

откуда $\varphi = \arccos\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

6) $LN \parallel F_1H_1 \Rightarrow \angle(LN, KH_1) = \angle(F_1H_1, KH_1) = \angle F_1H_1K = \psi$.

Так как $F_1H_1^2 = 2a^2$, $F_1K^2 = \dfrac{a^2}{2}$, $H_1K^2 = E_1K^2 + E_1H_1^2 = \dfrac{3}{2}a^2$, то треугольник F_1H_1K прямоугольный с прямым углом F_1KH_1, в котором $F_1K = \dfrac{1}{2}F_1H_1$, значит, $\psi = 30°$. (Учитывая, что H_1K — медиана правильного треугольника F_1EH_1, немедленно получаем: $\psi = 30°$.)

2.046. Точки A, B, C и D не принадлежат одной плоскости. Точки K, M, L и N принадлежат соответственно отрезкам BD, AD, AC и BC так, что $DK : KB = DM : MA = CL : LA = CN : NB = 1 : 4$. Определить периметр четырёхугольника $KMLN$, если $AB = 25$, $CD = 30$.

Решение. Из условия задачи следует, что $NK \parallel CD \parallel LM$ и $LN \parallel AB \parallel MK$ (рис. 14), причём $MK = LN = \frac{1}{5}AB = 5$, $NK = ML = \frac{4}{5}CD = 24$. Значит, периметр параллелограмма $MKNL$ равен $2 \cdot (5 + 24) = 58$.

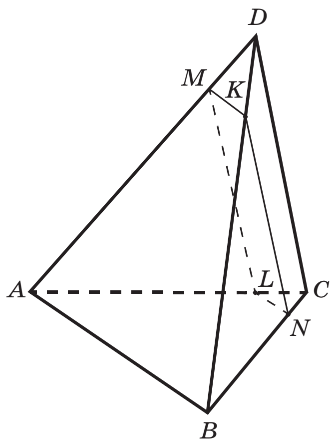


Рис. 14

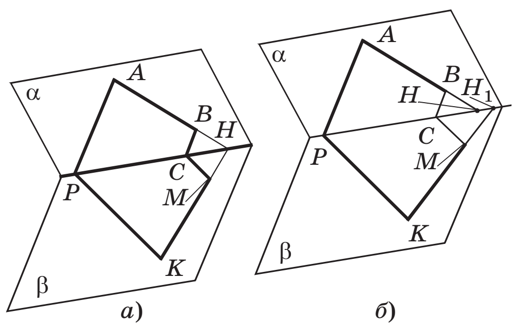


Рис. 15

2.053. Равнобедренные трапеции $ABCP$ и $PCMK$ имеют общую боковую сторону и лежат в разных плоскостях, причём $BC = 3$, $AP = 12$, $PK = 24$. Определить взаимное расположение прямых AB и MK при каждом из следующих значений длины отрезка MC: а) 5; б) 6; в) 7; г) 8.

Решение. Пусть $AB \cap CP = H$, $MK \cap CP = H_1$ (рис. 15). Тогда $BC : AP = BH : AH = CH : PH$ и $MC : KP = MH_1 : KH_1 = CH_1 : PH_1$. Если $MC = 6$ (случай б)), то $BC : AP = 3 : 12 = 6 : 24 = MC : KP$, откуда $CH : PH = CH_1 : PH_1$, т. е. точки H и H_1 совпадают. Это означает, что прямая AB пересекает плоскость, в которой расположена трапеция $PCMK$, в точке H, принадлежащей прямой KM, поэтому прямые AB и

MK пересекаются (рис. 15, *а*). В остальных случаях получим $BC : AP \neq MC : KP$, т. е. $CH : PH \neq CH_1 : PH_1$. Это означает, что прямые AB и MK скрещиваются (рис. 15, *б*).

2.054. $ABCD$ — правильный тетраэдр с длиной ребра 7. Точки M и K — середины рёбер BD и AC соответственно. Точка P делит ребро AC в отношении 5 : 2, считая от точки C. Найти длину заключённого внутри тетраэдра отрезка прямой, проходящей через точку P параллельно прямой KM.

Решение. Из условия задачи следует, что $AP = 2$, $AK = 3{,}5$ (рис. 16). Тогда $AP = \frac{4}{7}AK = 2$. Из $PH \parallel KM$ следует $HP : KM = AP : AK = 4 : 7$.

В прямоугольном $\triangle BMK$ находим

$$MK = \sqrt{BK^2 - BM^2} = \\ = \sqrt{\left(\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда $PH = \frac{4}{7}KM = \frac{4}{7} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

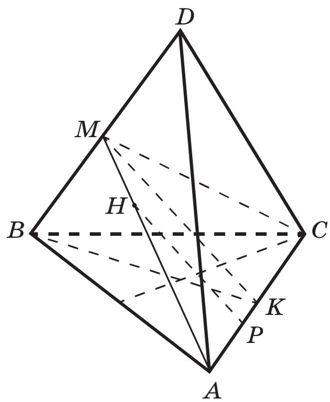


Рис. 16

2.055. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма, все рёбра которой равны 1. Найти величину угла между прямыми: а) AC и E_1D; б) A_1B и C_1D; в) A_1B и B_1D; г) A_1B и C_1F; д) A_1B и B_1F.

Указание. Для решения метрических задач применительно к правильной шестиугольной призме полезно на отдельном (выносном) рисунке изобразить её нижнее (или верхнее) основание — правильный шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 17), сторона которого равна 1.

Взаимное расположение диагоналей и сторон этого шестиугольника, их длины и величины углов между ними известны из планиметрии.

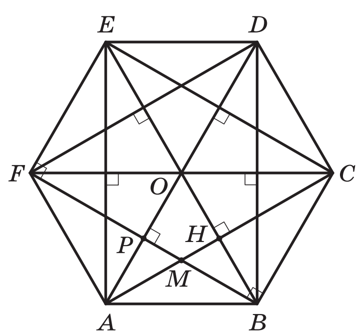


Рис. 17

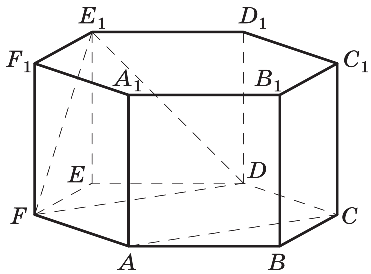


Рис. 18

Сочетая изображения правильного шестиугольника и правильной шестиугольной призмы, будем решать задачу.

Решение. а) Прямая AC лежит в плоскости ABC, прямая E_1D пересекает эту плоскость в точке D, не принадлежащей прямой AC (рис. 18). Значит, прямые AC и E_1D скрещиваются (по признаку скрещивающихся прямых).

Обозначим: $\alpha = \angle(AC, E_1D)$. Так как в правильном шестиугольнике $ABCDEF$ диагонали AC и FD параллельны, то $\alpha = \angle(AC, E_1D) = \angle(FD, E_1D) = \angle E_1DF$.

В $\triangle E_1DF$ по теореме косинусов имеем:

$$\cos\alpha = \frac{E_1D^2 + FD^2 - E_1F^2}{2E_1D \cdot FD} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

б) Обозначим: $\beta = \angle(A_1B, C_1D)$. Прямые A_1B и C_1D (рис. 19) скрещиваются (почему?). Найдём угол между ними. Диагонали A_1F и C_1D параллельных граней A_1F_1FA и C_1D_1DC правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ параллельны, поэтому $\angle(A_1B, C_1D) = \angle(A_1B, A_1F) = \angle BA_1F = \beta$.

В $\triangle BA_1F$ имеем: $A_1F = A_1B = \sqrt{2}$, $BF = \sqrt{3}$.

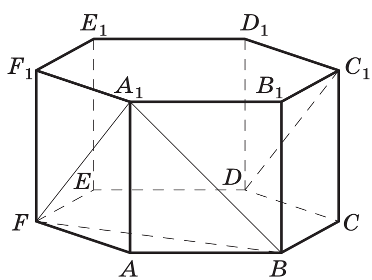


Рис. 19

Тогда по теореме косинусов получаем:

$$\cos\beta = \frac{A_1F^2 + A_1B^2 - BF^2}{2A_1F \cdot A_1B} =$$

$$\frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = \arccos\frac{1}{4}.$$

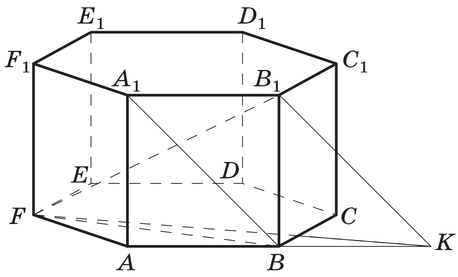


Рис. 20

д) По признаку скрещивающихся прямых прямые A_1B и B_1F скрещиваются (рис. 20).

Обозначим: $\varphi = \angle (A_1B, B_1F)$ и через вершину B_1 проведём прямую, параллельную A_1B. Эта прямая пересекает (почему?) прямую AB в некоторой точке K. Тогда: $B_1K \parallel A_1B$, $B_1K = A_1B$, поэтому $\angle (A_1B, B_1F) = \angle(B_1K, B_1F) = \angle FB_1K = \varphi$.

В $\triangle FB_1B$ по теореме косинусов имеем:

$$\cos\varphi = \frac{B_1F^2 + B_1K^2 - FK^2}{2 \cdot B_1F \cdot B_1K}.$$

Находим: $B_1K = A_1B = \sqrt{2}$;
в прямоугольном $\triangle FB_1B$:

$$B_1F^2 = BF^2 + B_1B^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4;$$

в $\triangle FAK$:

$$FK^2 = AF^2 + AK^2 - 2 \cdot AF \cdot AK \cdot \cos 120° =$$
$$= 1 + 4 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-0{,}5) = 7.$$

Тогда получаем: $\cos\varphi = \dfrac{4+2-7}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{8} \Rightarrow \varphi = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ (угол между прямыми — острый).

Глава 3. Прямая и плоскость в пространстве

§ 8. Параллельность прямой и плоскости

Учащимся следует пояснить, что при решении стереометрических задач обоснование параллельности прямой и плоскости с помощью только одного определения их параллельности затруднительно и не приводит к желаемому результату. В таких случаях пользуются признаками параллельности прямой и плоскости, которые учащиеся должны твёрдо усвоить и знать. При построении сечений многогранников плоскостями, проходящими через прямую, параллельную какой-либо грани многогранника, важную роль играют теоремы 10, 11 и 12. В частности, при решении задач **3.018 и 3.025** учащиеся на основании теорем 10 и 11 могут доказать, что в сечении пирамиды получается трапеция.

К сожалению, приходится констатировать, что некоторые учителя избегают подобных доказательств под предлогом очевидности того или иного факта. А жаль! Именно на начальном этапе изучения стереометрии закладываются основы стереометрической культуры, геометрической грамотности учащихся. С другой стороны, обоснованные доказательства очевидных фактов отнимают много времени, в результате может быть решено мало задач. Но, проявляя чувство меры, нужно всё-таки стараться рассмотреть за урок (45 мин) не менее 6 задач. Для этого есть много путей. Например:

- во время решения задач можно так организовать работу на уроке, чтобы по одному рисунку были решены последовательно несколько нарастающих по сложности задач, опросив при этом нескольких учащихся;
- можно только один раз доказать, что в сечении правильной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону её основания, получится трапеция, и пользоваться этим фактом далее при решении аналогичных задач;
- у учащихся полезно выработать понимание того, что означает «рабочее решение задачи» и «полное решение задачи» и в каких случаях каждое из них применяется;
- иногда в текст условия задачи на уроке можно вставить слова «докажите самостоятельно», «несмотря на очевидность, нуждается в доказательстве» и т. п.

Из теоремы 9, в частности, вытекает факт существования и способ построения прямой, параллельной данной плоскости и проходящей через данную точку, не лежащую в этой плоскости. А из теоремы 10 следует, что если прямая a параллельна плоскости α, то в плоскости α существуют прямые, параллельные прямой a. Эти факты применяются в тех случаях, когда для решения задачи требуется произвести некоторые дополнительные построения.

Решения учащимися задач данного и следующего параграфов будут способствовать выработке у них навыков осуществлять необходимые в будущем построения на изображениях многогранников.

Задачи данного параграфа подобраны таким образом: сначала предлагаются несложные задачи на доказательство, построение, а также задачи развивающего характера, в которых ставятся вопросы «Параллельны ли ...?», «Каким может быть взаимное расположение ...?», «Справедливо ли утверждение ...?», «Возможно ли ...?». Далее следуют задачи, более сложные по содержанию, в которых требуется не только строить сечения многогранников, но и определять форму сечений, вычислять их площади, периметры. Одним словом, решаются стереометрические задачи вычислительного характера, проводится подготовка к решению содержательных задач в 11 классе.

При изучении § 8 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

- понимать и объяснять определение параллельности прямой и плоскости;
- понимать и объяснять, что при решении стереометрических задач обоснование параллельности прямой и плоскости с помощью определения их параллельности не приводит к желаемому результату, поэтому следует пользоваться признаками параллельности прямой и плоскости;
- понимать и объяснять, что если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то эти прямая и плоскость параллельны;
- понимать и объяснять, что плоскость и не лежащая в ней прямая, параллельные некоторой плоскости, параллельны;
- понимать и объяснять, что плоскость и не лежащая в ней прямая, параллельные некоторой прямой, параллельны;
- понимать и объяснять, что если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая пересечения этих плоскостей параллельна данной прямой;
- понимать и объяснять, что если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, причём эти плоскости пересекаются, то прямая их пересечения параллельна каждой из данных прямых;
- понимать и объяснять, что если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна их линии пересечения;

- понимать и объяснять, что для любых двух скрещивающихся прямых существует единственная пара параллельных плоскостей, проходящих соответственно через эти прямые;
- понимать и объяснять, что в сечении правильной четырёхугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону её основания, получается трапеция, и пользоваться этим фактом далее при решении аналогичных задач;
- формулировать определение и признак параллельности прямой и плоскости;
- доказывать теоремы о том, что: если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то эти прямая и плоскость параллельны; плоскость и не лежащая в ней прямая, параллельные некоторой плоскости, параллельны; плоскость и не лежащая в ней прямая, параллельные некоторой прямой, параллельны;
- используя изображения многогранников, строить изображения: прямой, проходящей через данную точку параллельно данной плоскости; плоскости, проходящей через данную точку параллельно данной прямой;
- строить прямую пересечения двух плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную другой плоскости;
- строить сечение многогранника плоскостью, проходящей через прямую, параллельную какой-либо грани этого многогранника;
- строить сечения многогранников, определять форму сечений, вычислять их площади, периметры;
- используя изображения многогранников, решать задачи на доказательство и вычисление, применяя свойства параллельности прямых и плоскостей; аргументированно обосновывать каждое утверждение логического, конструктивного, вычислительного характера.

3.018. Основанием правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является квадрат $ABCD$. Построить сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через AB и точку K — середину ребра PC. Найти площадь этого сечения, если все рёбра пирамиды равны 8.

Решение. $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (PCD) \Rightarrow KM \parallel AB$, где $KM = (ABK) \cap (PCD)$, значит, $ABKM$ — равнобедренная трапеция (рис. 21) с основаниями $AB = 8$, $KM = 4$ и высотой FL (F и H — середины соответственно AB и CD, $L = KM \cap PH$).

В $\triangle PHF$ находим медиану

$$FL = \sqrt{\frac{2PF^2 + 2FH^2 - PH^2}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2FH^2 + PF^2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2 \cdot 64 + (4\sqrt{3})^2}}{2} = 2\sqrt{11}.$$

Тогда

$$S_{ABMK} = \frac{AB + MK}{2} \cdot FL =$$

$$= \frac{8 + 4}{2} \cdot 2\sqrt{11} = 12\sqrt{11}.$$

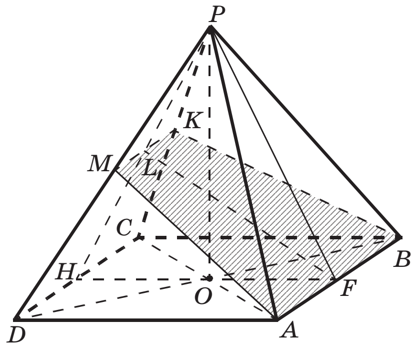


Рис. 21

3.023. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, P и Q — внутренние точки граней соответственно $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки P и Q и параллельной прямой CC_1.

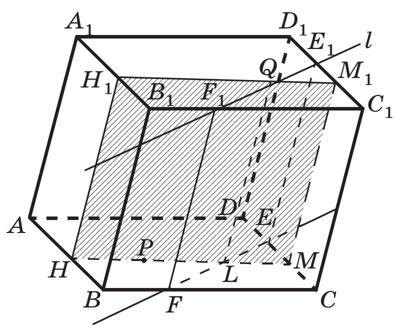


Рис. 22

Решение. Через точку Q проведём в грани $A_1B_1C_1D_1$ любую прямую l, пересекающую B_1C_1 и C_1D_1 соответственно в точках F_1 и E_1 (рис. 22), затем проведём прямые $F_1F \parallel CC_1$ и $E_1E \parallel CC_1$ ($F \in BC, E \in DC$). В плоскости EFF_1 проводим прямую $QL \parallel CC_1$ ($L \in EF$). Далее в грани $ABCD$ проводим прямую PL, получаем точки $H = PL \cap AB$ и $M = PL \cap CD$, через которые проводим $HH_1 \parallel CC_1$ и $MM_1 \parallel CC_1$. HMM_1H_1 — искомое сечение.

3.024. Через вершину P правильного тетраэдра $PMBH$ с ребром, равным 8, провести сечение, параллельное ребру MB. Сколько таких сечений тетраэдра можно провести? Какие фигуры при этом получаются в сечениях? Найти площадь сечения, проходящего через середину K ребра BH.

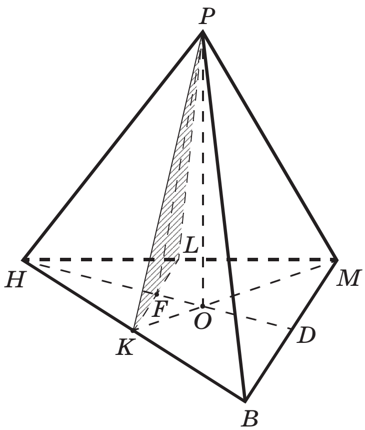


Рис. 23

Решение. Пусть O — центр основания BMH данного тетраэдра. Любое сечение этого тетраэдра — равнобедренный треугольник. Таких сечений можно провести бесконечно много. Если L — середина MH, то $\triangle PLK$ — сечение данного тетраэдра, проходящее через K (рис. 23) и $S_{\triangle PKL} = \frac{1}{2} KL \cdot PF$, где $F = KL \cap HD$. Находим:

$$KL = 4,\; PF = \sqrt{PK^2 - KF^2} =$$
$$= \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{11}.$$

Тогда $S_{\triangle PKL} = 4\sqrt{11}$.

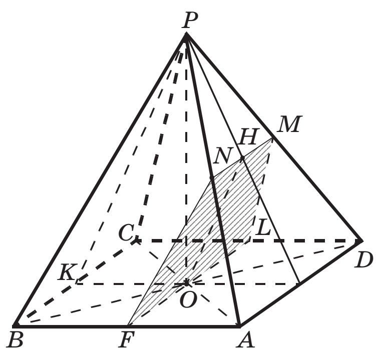


Рис. 24

3.025. В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ с вершиной P все рёбра равны 4. Построить сечение этой пирамиды, проходящее через центр O её основания параллельно ребру BC и медиане PK грани BCP. Установить форму полученного сечения; найти его периметр и площадь.

Решение. В сечении получается равнобедренная трапеция $FNML$ с боковыми сторонами $FN = ML = 2$, основаниями $MN = 2$ и $FL = 4$, а её высотой является отрезок $OH = \frac{1}{2} PK = \sqrt{3}$ (рис. 24). Поэтому периметр этой трапеции равен 10, а её площадь — $3\sqrt{3}$.

3.026. Дан правильный тетраэдр $PABC$ с ребром 6. Через центр O основания ABC тетраэдра проведена плоскость α, параллельная BC и пересекающая ребро AP в некоторой точке K. Построить сечение тетраэдра плоскостью α. Указать границы изменения периметра и площади этого сечения при всевозможных положениях точки K на ребре AP.

Решение. Пусть $O \in DL$, $DL \parallel BC$ (рис. 25). В сечении тетраэдра всякий раз будет получаться равнобедренный треугольник с основанием $DL = \frac{2}{3}BC = 4$. Наименьшие периметр и площадь имеет треугольник DLK, плоскость которого перпендикулярна AP. Найдём его периметр $P_{\triangle DLK}$ и площадь $S_{\triangle DLK}$.

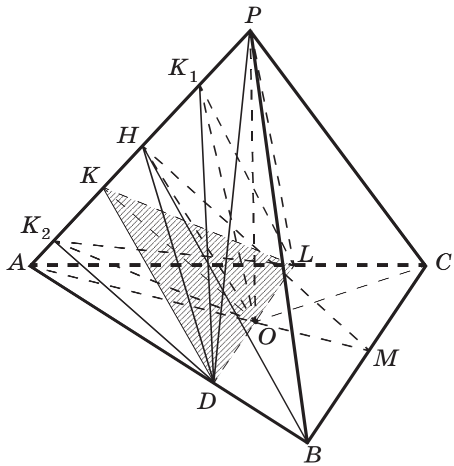


Рис. 25

Пусть M и H — середины противоположных рёбер AP и BC данного тетраэдра. Так как $OK \perp AP$, $MH \perp AP$ и $OA = \frac{2}{3}AM$, то $OK = \frac{2}{3}HM = \frac{2}{3}\sqrt{AM^2 - AH^2} = \frac{2}{3}\sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2} = 2\sqrt{2}$; так как $BH \parallel DK$, то $DK = \frac{2}{3}BH = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Тогда $P_{\triangle DLK} = 2DK + DL = 4 \cdot (\sqrt{3} + 1)$; $S_{\triangle DLK} = \frac{1}{2}DL \cdot OK = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

Высота KO треугольника DLK — сечения тетраэдра — является высотой прямоугольного треугольника AOP, проведённой из вершины O его прямого угла AOP. Вычисления показывают, что $OA = 2\sqrt{3}$, $OP = 2\sqrt{6}$, т. е. $OK < OA < OP$. Это означает, что $\triangle DLP$ имеет наибольший периметр и наибольшую площадь. Найдём их:

$$P_{\triangle DPL} = 2PD + DL = 2\sqrt{OD^2 + OP^2} + 4 =$$
$$= 2\sqrt{2^2 + (2\sqrt{6})^2} + 4 = 4 \cdot (\sqrt{7} + 1).$$
$$S_{\triangle DPL} = \frac{1}{2} DL \cdot OP = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}.$$

Таким образом, $4 \cdot (\sqrt{3} + 1) \leqslant P_{\triangle DLK} \leqslant 4 \cdot (\sqrt{7} + 1)$; $4\sqrt{2} \leqslant S_{\triangle DLK} \leqslant 4\sqrt{6}$.

§ 9, 10. Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Теорема о трёх перпендикулярах

Мы советуем изложить материал этих параграфов в форме лекции-беседы. При этом как в лекции, так и на практических занятиях следует уделить особое внимание вопросам существования и единственности прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной плоскости (плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой). Именно после изучения этого материала становится возможным решать задачи на нахождение расстояний от точки до прямой и до плоскости, между параллельными прямыми в пространстве, между параллельными прямой и плоскостью.

Необходимо пояснить учащимся, что при решении стереометрических задач затруднительно обосновывать перпендикулярность прямой и плоскости при помощи только одного определения, и помощником в таком обосновании становится признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Целесообразно обращать внимание учащихся на определённую аналогию утверждений о перпендикуляре, наклонной и её проекции на плоскость с соответствующими утверждениями в планиметрии относительно перпендикуляра, наклонной и её проекции на прямую.

Необходимо подчеркнуть особую роль теорем о трёх перпендикулярах при решении ряда задач, в которых определяются перпендикулярности прямых и плоскостей, а также находятся расстояния в пространстве.

Задачи данного параграфа (как и всех других) подобраны по принципу: от простого к сложному. Сначала предлагаются несложные задачи на доказательство, на вычисление расстояний, затем — задачи на построение перпендикуляров на изображениях куба и правильного тетраэдра. Очень важными являются вопросы, связанные с аргументацией построений перпендикулярных отрезков, прямых и плоскостей.

Таким образом, в данном параграфе опять решаются стереометрические задачи вычислительного и конструктивного характера. Иначе говоря, проводится пропедевтика к решению содержательных задач на вычисление площадей поверхностей и объёмов многогранников и фигур вращения в 11 классе.

При изучении § 9, 10 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

- понимать и объяснять определение прямой, перпендикулярной данной плоскости;
- понимать и объяснять признак перпендикулярности прямой и плоскости;
- понимать и доказывать теоремы (прямую и обратную) о трёх перпендикулярах;
- понимать и доказывать теоремы о длинах перпендикуляра, наклонных и проекций этих наклонных;
- понимать и объяснять, что диагональ куба перпендикулярна плоскости, проходящей через концы трёх рёбер, исходящих из той же вершины, что и диагональ;
- понимать и объяснять, что скрещивающиеся рёбра правильного тетраэдра попарно взаимно перпендикулярны;
- понимать и объяснять, что отрезки, соединяющие середины пар скрещивающихся рёбер правильного тетраэдра, являются их общими серединными перпендикулярами;
- формулировать: определение прямой, перпендикулярной плоскости; признак перпендикулярности прямой и плоскости;
- строить изображение: прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной плоскости; плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой;
- формулировать и доказывать признак перпендикулярности прямой и плоскости, теоремы о свойствах прямых,

перпендикулярных плоскости; иллюстрировать эти теоремы на изображениях многогранников;

• на изображениях куба, правильного тетраэдра, прямоугольного параллелепипеда проводить прямые, перпендикулярные данной плоскости, и изображать плоскости, перпендикулярные данной прямой, логически обосновывая каждое построение;

• решать задачи на доказательство и вычисление на перпендикулярность прямой и плоскости, используя модели и изображения многогранников;

• формулировать и доказывать прямую и обратную теоремы о трёх перпендикулярах;

• на изображениях и моделях куба, правильного тетраэдра, прямоугольного параллелепипеда: иллюстрировать теорему о трёх перпендикулярах; решать задачи на доказательство, построение и вычисления, используя теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости, о трёх перпендикулярах, корректно аргументируя соответствующие шаги логического, вычислительного и конструктивного характера;

• строить сечения куба, правильного тетраэдра, правильной пирамиды; находить площади этих сечений.

3.034. Точка P удалена от каждой стороны правильного треугольника на 30 см. Найти расстояние от точки P до плоскости треугольника, если площадь вписанного в этот треугольник круга равна 576π см^2.

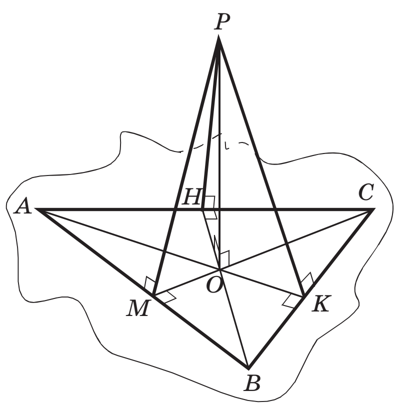


Рис. 26

Решение. Пусть $PO \perp (ABC)$, $PM \perp AB$, $PK \perp BC$, $PH \perp AC$ и $PM = PK = PH = 30$ (рис. 26). Тогда $OM = OK = OH$ и по теореме о трёх перпендикулярах $OM \perp AB$, $OK \perp BC$, $OH \perp AC$.

Это означает, что O — центр круга, вписанного в $\triangle ABC$, а отрезок OK равен радиусу r этого круга.

Так как $576\pi = \pi r^2$, то $r = 24$. Тогда в прямоугольном $\triangle POK$ имеем: $OP = \sqrt{PK^2 - OK^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18$.

3.035. Точка M удалена от плоскости прямоугольного треугольника на расстояние, равное $5\sqrt{3}$, и равноудалена от каждой его стороны. Найти расстояние от точки M до каждой из сторон этого треугольника, если его гипотенуза и один из катетов равны соответственно 25 и 15.

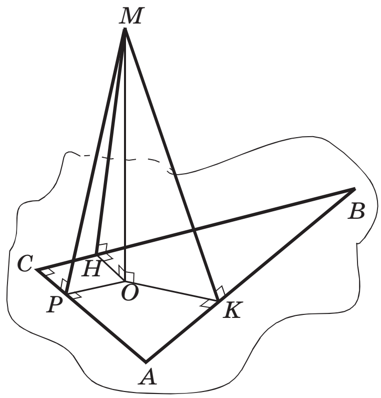


Рис. 27

Решение. Пусть $\triangle ABC$ — данный прямоугольный треугольник, $MO \perp (ABC)$ (рис. 27). Если $MK \perp AB$, $MH \perp BC$, $MP \perp AC$ и $MP = MK = MH$, то $OP = OK = OH$ и по теореме о трёх перпендикулярах $OK \perp AB$, $OH \perp BC$, $OP \perp AC$, т. е. точка M проектируется в центр O окружности, вписанной в треугольник ABC.

Для нахождения расстояний от M до AB, BC и AC (они равны между собой) достаточно найти радиус r этой окружности. Так как второй катет треугольника ABC равен 20, а его периметр P и площадь S равны соответственно 60 и 150, то $r = \dfrac{2S}{P} = \dfrac{2 \cdot 150}{60} = 5$. Тогда $MK = \sqrt{OM^2 + OK^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 5^2} = 10$.

3.052. Через точку M высоты AH равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) проведён к его плоскости перпендикуляр MP. Доказать, что $BC \perp LH$, где L — любая точка прямой AP.

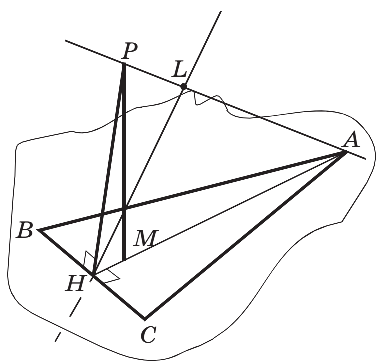


Рис. 28

Решение. Так как $PM \perp (ABC)$, то $PM \perp BC$. Тогда $PM \perp AH$, $PM \perp BC \Rightarrow BC \perp (APH)$ (рис. 28), поэтому BC перпендикулярна любой прямой плоскости APH. А так как $LH \subset (APH)$, то $BC \perp LH$.

3.053. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, F и M — середины рёбер соответственно A_1B_1, B_1C_1 и BB_1. Доказать, что прямая B_1D перпендикулярна плоскости EFM.

Решение. Прямая B_1D_1, являющаяся проекцией прямой B_1D на плоскость грани $A_1B_1C_1D_1$, перпендикулярна прямой A_1C_1 (рис. 29). Значит, $B_1D \perp A_1C_1$, а так как $EF \parallel A_1C_1$, то $B_1D \perp EF$.

Аналогично доказывается, что $B_1D \perp MF$. Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $B_1D \perp (MEF)$.

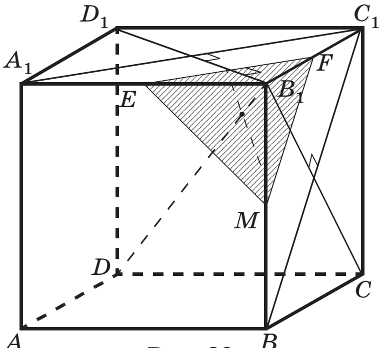


Рис. 29

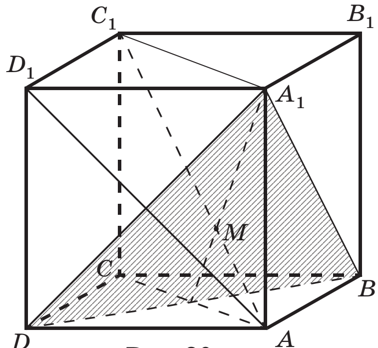


Рис. 30

3.062. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доказать, что: а) $BD \perp (AA_1C)$; б) $BD \perp AC_1$; в) $DA_1 \perp AC_1$; г) $AC_1 \perp (A_1BD)$.

Решение. а) Так как $BD \perp AC$ и $BD \perp AA_1$, то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $BD \perp (AA_1C)$ (рис. 30).

б) AC — проекция AC_1 на (ABC) — перпендикулярна $BD \subset (ABC)$, значит, $AC_1 \perp BD$.

в) Проекцией прямой AC_1 на плоскость грани AA_1D_1D является прямая $AD_1 \perp DA_1$, значит, $AC_1 \perp DA_1$.

г) В п. б) и в) доказано, что $AC_1 \perp BD$ и $AC_1 \perp DA_1$, поэтому $AC_1 \perp (A_1BD)$.

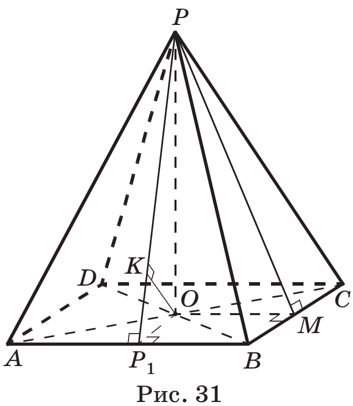


Рис. 31

3.066. O — точка пересечения диагоналей квадрата $ADCD$. PO — перпендикуляр к плоскости ABC; точка M —середина стороны BC. Докажите, что: а) прямая PM является проекцией наклонной OM на плоскость PBC; б) перпендикуляр, опущенный из точки O на плоскость ABP, пересечёт медиану PP_1 треугольника ABP.

Решение. а) $OP \perp (ABC) \Rightarrow$ $\Rightarrow OP \perp BC$; $OB = OC \Rightarrow BP = CP$; M — середина $BC \Rightarrow BC \perp PM$ (рис. 31). Тогда $BC \perp (OMP)$, значит, $(OMP) \perp (BPC)$, поэтому PM — проекция OM на (BPC).

б) $AB \perp OP_1$, $AB \perp OP$ $(OP \perp (ABC))$ $\Rightarrow$ $AB \perp (OPP_1)$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow (OPP_1) \perp (ABP)$. Это означает, что любая прямая, проходящая через точку O перпендикулярно (ABP), лежит в (OPP_1). А так как $(OPP_1) \cap (ABP) = PP_1$, то перпендикуляр OK из точки O на (ABP) пересекает PP_1.

3.074. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см, а основание 12 см. Точка M удалена от каждой его стороны на 15 см. Найти: а) расстояние от точки M до плоскости треугольника; б) площадь круга, вписанного в треугольник.

Решение. Пусть точка O — основание перпендикуляра из точки M на $(ABC) = \alpha$, $MH \perp AB$, $MK \perp BC$, $MP \perp AC$ (рис. 32). Тогда $OH \perp AB$, $OK \perp BC$, $OP \perp AC$. Так как $MH = MK = MP$, то $OH = OK = OP = r$, где r — радиус окружности, вписанной в $\triangle ABC$.

Так как $r = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{P_{\triangle ABC}} = \dfrac{2\sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4}}{32} = 3$, то: а) $\rho(M;\ \alpha) = MO = \sqrt{MK^2 - OK^2} = \sqrt{15^2 - 3^2} = 6\sqrt{6}$ (см); б) $S_{\text{кр}} = 9\pi$ (см^2).

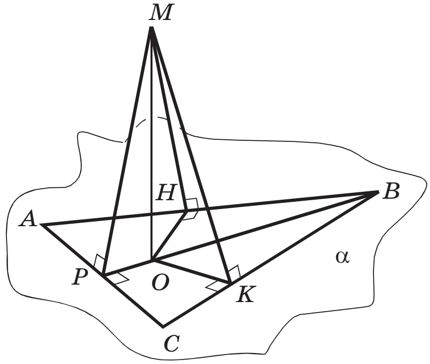


Рис. 32

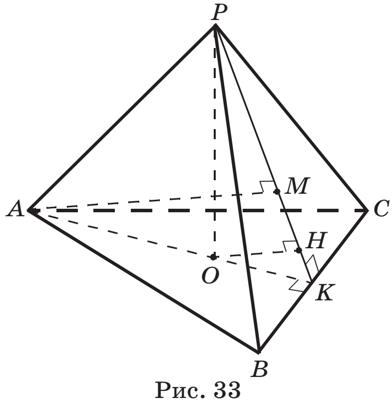


Рис. 33

3.080. В правильном тетраэдре $PABC$ с ребром, равным 2, точка O — центр основания ABC. Найти расстояние от точки O до плоскости грани PBC.

Решение. Так как $AP = BP = CP$ и точка O — центр основания ABC правильного тетраэдра $PABC$, то $OP \perp (ABC)$ и $OK = \dfrac{1}{3}AK$ (рис. 33), где точка K — середина BC.

Аналогично, если точка M — центр правильного $\triangle PBC$, то $AM \perp (PBC)$, $M \subset PK$.

Пусть $OH \perp (PBC)$. Так как $(APK) \perp (PBC)$, то $OH \subset (APK)$ и $H \in PK$. Это означает, что $OH \parallel AM$ и $OH = \frac{1}{3}AM =$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{AP^2 - \left(\frac{2}{3}PK\right)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{9AP^2 - 4PK^2}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{9 \cdot 4 - 4 \cdot 3}}{3} =$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{9}.$$

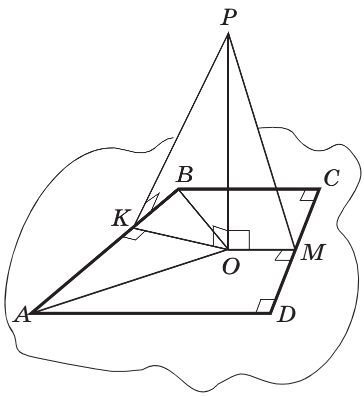


Рис. 34

3.081. Точка P равноудалена от всех сторон прямоугольной трапеции с острым углом в $60°$ и большей боковой стороной, равной $8\sqrt{3}$. Найти расстояния от точки P до сторон трапеции, если известно, что расстояние от этой точки до плоскости трапеции равно 8.

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (рис. 34), у которой $AB = 8\sqrt{3}$, $\angle BAD = 60°$, $\angle C = \angle D = 90°$. Основание O перпендикуляра PO к плоскости трапеции является центром окружности, вписанной в эту трапецию, причём $\triangle AOB$ — прямоугольный и $OA = AB \cdot \cos 30° = 12$.

Перпендикуляры, проведённые из точки P к сторонам трапеции, проектируются на радиусы окружности, вписанной в данную трапецию. Если OK — радиус этой окружности, то $OK = OA \cdot \sin 30° = 6$.

Тогда в прямоугольном $\triangle KOP$ имеем: $PK = \sqrt{OK^2 + OP^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

§ 11. Угол между прямой и плоскостью

Задачи этого параграфа (как и любого другого) предназначены для дальнейшего развития пространственных представлений учащихся, главным образом связанных с вопросами метрического характера — нахождением углов и расстояний между геометрическими фигурами и их элементами.

При решении задач на нахождение угла между прямой и плоскостью полезно пользоваться следующим фактом. Если расстояние от точки A до плоскости α равно h, а точка O лежит в плоскости α, то синус угла φ между прямой OA и плоскостью α равен $\frac{h}{OA}$: $\sin\varphi = \frac{h}{OA}$.

При изучении § 11 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

- понимать и объяснять определение угла между прямой и плоскостью;
- формулировать определение угла между прямой и плоскостью;
- на моделях и изображениях многогранников интуитивно видеть угол между прямой и плоскостью и логически обосновывать его изображение;
- правильно и наглядно строить угол между прямой и плоскостью на изображениях куба, правильного тетраэдра, правильной пирамиды;
- решать задачи на построение и вычисление угла между прямой и плоскостью с использованием изображений куба, прямоугольного параллелепипеда, правильного тетраэдра, правильной пирамиды, корректно аргументируя конструктивные и логические утверждения.

3.085. Катет AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC лежит в плоскости α, а катет BC образует с этой плоскостью угол в 45°. Доказать, что гипотенуза этого треугольника образует с плоскостью α угол в 30°.

Решение. Пусть $AC = BC = a$, тогда $AB = a\sqrt{2}$. Если $BB_1 \perp \alpha$ (рис. 35), то $BB_1 = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Тогда в прямоугольном $\triangle BB_1A$ получаем: $\sin A = \frac{B_1B}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, откуда $\angle A = 30°$.

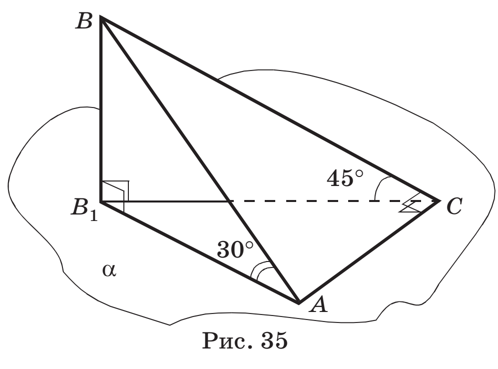


Рис. 35

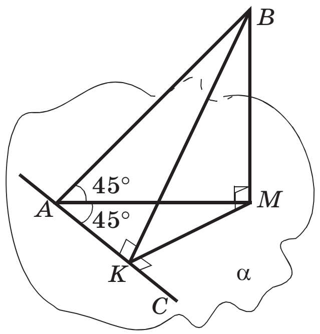


Рис. 36

3.086. Наклонная AB образует с плоскостью α угол в $45°$. В этой плоскости через основание A наклонной под углом $45°$ к её проекции проведена прямая AC. Найти угол между прямой AC и наклонной AB.

Решение. Пусть $AB = a$, $BM \perp \alpha$, $BK \perp AC$ $(K \in AC)$ (рис. 36). Тогда в прямоугольных треугольниках ABM, AMK, ABK получаем соответственно: $AM = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $AK = \dfrac{AM}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{2}$, $\cos A = \dfrac{AK}{AB} = \dfrac{a}{2 \cdot a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \angle A = 60°$.

3.087. Прямоугольник $ABCD$ и прямоугольный треугольник DCP лежат в различных плоскостях. Вершина P проектируется в точку B; $BP = 4$ см, $AB = 4\sqrt{2}$ см, $AD = 4$ см. Найти угол между прямыми: а) DP и AB; б) PC и AD.

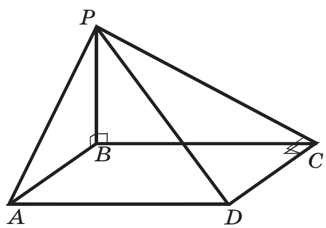


Рис. 37

Решение. а) $AB \parallel CD \Rightarrow \angle(AB, DP) = \angle(CD,\ DP) = \angle CDP$. В прямоугольном $\triangle BCP$ (рис. 37) имеем: $CP = \sqrt{BP^2 + BC^2} = 4\sqrt{2}$. Тогда $\triangle DCP$ — равнобедренный прямоугольный, откуда $\angle CDP = 45°$.

б) $AD \parallel BC \Rightarrow \angle(PC, AD) = \angle(PC,\ BC) = \angle BCP = 45°$, так как $\triangle BCP$ — равнобедренный прямоугольный.

3.095. Катет AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC лежит в плоскости α, гипотенуза AB равна 4, а вершина B удалена от плоскости α на расстояние 2. Определить величину угла между плоскостью α и прямой: а) AB; б) BC; в) прямой, содержащей медиану CC_1; г) прямой, содержащей медиану BB_1; д) прямой, содержащей медиану AA_1.

Решение. Пусть $BH \perp \alpha$, $BH = 2$; $C_1K \perp \alpha$ $(K \in AH)$; $A_1M \perp \alpha$ $(M \in CH)$ (рис. 38). В $\triangle ABC$ имеем: $AC = BC = 2\sqrt{2}$.

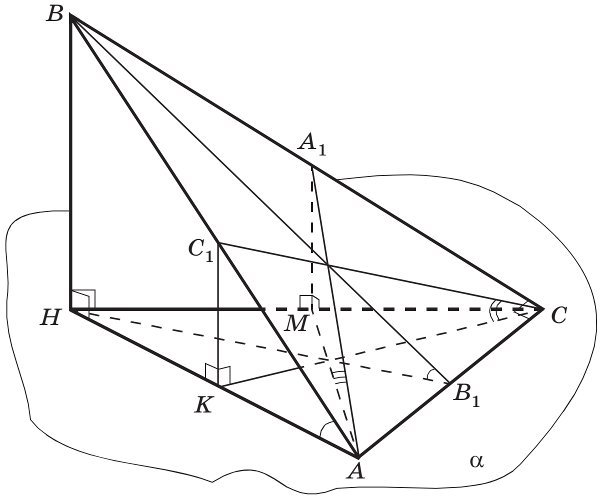


Рис. 38

а) В прямоугольном $\triangle ABH$ катет BH равен половине гипотенузы AB, значит, $\angle BAH = \angle(AB, \alpha) = 30°$.

б) В прямоугольном $\triangle BCH$ катеты BH и CH равны, поэтому $\angle BCH = \angle(BC, \alpha) = 45°$.

в) В $\triangle ABC$: $C_1C = \dfrac{\sqrt{2AC^2 + 2BC^2 - AB^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{4 \cdot 8 - 16}}{2} = 2$. Учитывая, что $C_1K = 1$, приходим к выводу: $\angle C_1CK = 30°$.

г) $B_1B = \sqrt{BC^2 + B_1C^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{10}$. Тогда $\sin \angle BB_1H = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$, значит, $\angle BB_1H = \angle(BB_1, \alpha) = \arcsin \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

д) В прямоугольном $\triangle AA_1C$ находим $AA_1 = \sqrt{AC^2 + A_1C^2}$. А так как $A_1M = 1$, то $\angle A_1AM = \angle(AA_1, \alpha) = \arcsin \dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

3.096. O — точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$. Сторона ромба равна 8, $\angle ABC = 120°$. Длина перпендикуляра OK к плоскости ABC равна 6. Точка O удалена от плоскости ABK на 3. Найти величину угла, который образует с плоскостью ABK прямая: а) OK; б) AO; в) BD; г) KC; д) KD; е) CD.

Решение. В ромбе $ABCD$ имеем: $OB = \dfrac{1}{2}AB = 4$, $OA = AB \cdot \cos 30° = 4\sqrt{3}$. Обозначим $(ABK) = \alpha$.

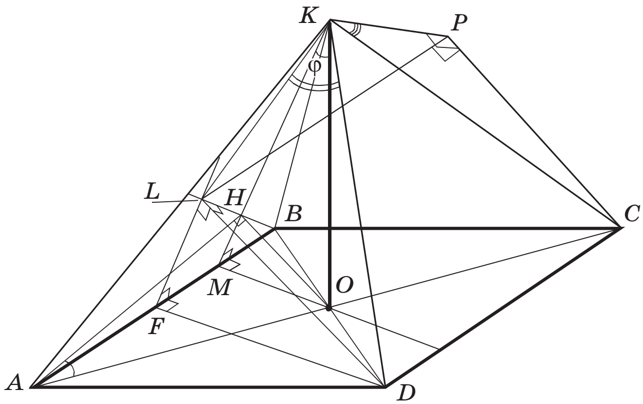


Рис. 39

а) Пусть $OM \perp AB$, тогда $KM \perp AB$ (рис. 39). Если $OH \perp (ABK)$, то $H \in MK$ и $\angle(OK, \alpha) = \angle OKH$. Так как в прямоугольном $\triangle OHK \perp OH = \frac{1}{2}OK$, то $\angle OKH = 30°$.

б) $OH \perp (ABK) \Rightarrow \angle(OA, \alpha) = \angle OAH$. Так как в прямоугольном $\triangle OAH$ $OH = 3$, $OA = 4\sqrt{3}$, то $\angle OAH = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$.

в) Пусть $DF \perp AB$, тогда $FL \perp AB$ ($FL \parallel MK$). Если $DL \perp \alpha$, то $L \in BH$ и BL — проекция BD на α. Поэтому $\angle(BD, \alpha) = \angle DBL = \psi$. Так как $BD = 2OB$, то $DL = 2OH = 6$. Тогда $\sin\psi = \frac{DL}{BD} = \frac{3}{4} \Rightarrow \psi = \arcsin\frac{3}{4}$.

г) Пусть $CP \perp \alpha$, $P \in \alpha$. Так как $CD \parallel \alpha$, то $CP \parallel DL$ и $CP = DL = 6$. Находим $CK = \sqrt{OK^2 + OC^2} = \sqrt{6^2 + (4\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{21}$. Если $\angle(CK, \alpha) = \angle CKP = \beta$, то получаем $\sin\beta = \frac{CP}{CK} = \frac{6}{2\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \beta = \arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$.

д) Так как $DL \perp \alpha$, то $\angle(DK, \alpha) = \angle DKL = \gamma$. Находим $\sin\gamma = \frac{DL}{KD} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ ($KD = \sqrt{OK^2 + OD^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$), откуда $\gamma = \arcsin\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

е) $CD \parallel \alpha \Rightarrow \angle(CD, \alpha) = 0°$.

3.098. Прямая BK перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника ABC. $BK = AB$; точка M — середина AC. Заполнить таблицу.

№	Прямая и плоскость	Измеряемый плоский угол	Величина угла
1	KA и ABC		
2	KM и ABC		
3	CA и MBK		
4	BA и BMK		
5	AC и KBA		
6	BM и KBA		
7	AK и BKM		
8	BK и ACK		
9	MB и ACK		
10	AK и BCK		

Решение. 2) Пусть $AB = a$. Так как M — середина AC, то BM — проекция KM на (ABC) (рис. 40). Поэтому $\angle(KM, (ABC)) = \angle BMK$. Значит,

$$\operatorname{tg}\angle BMK = \frac{BK}{BM} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ откуда } \angle BMK = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

5) $\angle(AC, (KBA)) = \angle CAB = 60°$.

7) $AC \perp (BKM) \Rightarrow$ $\Rightarrow (ACK) \perp (BKM) \Rightarrow KM$ — проекция AK на $(BKM) \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle(AK, (BKM)) = \angle(AK, KM) =$ $= \angle AKM$.

Так как $\sin\angle AKM = \dfrac{\frac{a}{2}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$,

то $\angle AKM = \arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

8) $(ACK) \perp (BKM) \Rightarrow KM$ — проекция BK на $(ACK) \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle(BK, (ACK)) = \angle(BK, KM) =$ $= \angle BKM$.

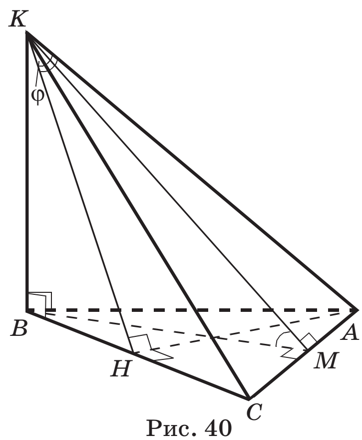


Рис. 40

Так как $\operatorname{tg}\angle BKM = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $\angle BKM = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

9) Из $(ACK) \perp (BKM)$ следует, что $\angle(BM, (ACK)) = \angle(BM, KM) = \angle BMK$.

Так как $\operatorname{tg}\angle BMK = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, то $\angle BMK = \operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

10) Пусть H — середина BC. Тогда $AH \perp BC$. Кроме того, $BK \perp (ABC) \Rightarrow BK \perp AH$. Это означает, что $AH \perp (BCK)$, откуда $(AKH) \perp (BCK)$. Поэтому $\angle(AK, (BCK)) = \angle AKH = \varphi$.

Так как $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{AH}{KH} = \dfrac{AH}{\sqrt{BK^2 + BH^2}} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$, то

$\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

3.099. O — точка пересечения медиан правильного треугольника ABC. MO — перпендикуляр к плоскости ABC; $MA = AB = a$; точка K — середина стороны BC; P — точка пересечения медиан треугольника MBC. Заполнить таблицу.

№	**Прямая и плоскость**	**Измеряемый плоский угол**	**Величина угла**
1	MC и ABC		
2	MK и ABC		
3	CB и AMK		
4	CA и AMK		
5	OC и AMK		
6	CM и AMK		
7	PB и AMK		
8	AP и MBC		
9	OM и MBC		
10	AK и MBC		
11	MB и ACP		
12	BC и ACP		

Решение. Так как $OA = OB = OC$, то $MA = MB = MC = AB = a$ (рис. 41). Причём

$OA = OB = OC = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

$OK = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

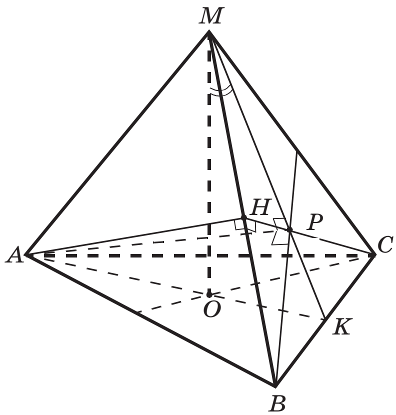


Рис. 41

1) $\angle(MC, (ABC)) = \angle MCO$;

$$\cos\angle MCO = \frac{OC}{MC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle MCO = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2) $\angle(MK, (ABC)) = \angle MKO$;

$$\cos\angle MKO = \frac{OK}{MK} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \angle MKO = \arccos\frac{1}{3}.$$

6) Из $(AMK) \perp (BCM)$ следует, что $\angle(CM, (AMK)) = \angle(CM, KM) = \angle CMK = 30°$.

9) Из $(AMK) \perp (BCM)$ следует, что $\angle(OM, (BMC)) = \angle(OM, KM) = \angle OMK$.

Так как $\sin\angle OMK = \frac{OK}{MK} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \angle OMK = \arcsin\frac{1}{3}$.

11) Так как $CP \perp MB$ и $CP \cap MB = H$, то $CH \perp MB$, $AH \perp MB$, откуда $MB \perp (ACP)$. Значит, $\angle(BM, (ACP)) = 90°$.

12) $MB \perp (ACP) \Rightarrow CH$ — проекция BC на (ACP). Тогда $\angle(BC, (ACP)) = \angle BCH = 30°$.

§ 12. Параллельное проектирование и его свойства. Ортогональное проектирование

Учителю математики 10—11 классов известны трудности, которые возникают у начинающих изучать стереометрию. Причиной возникновения этих трудностей является неумение учащихся правильно, наглядно и удобно сделать рисунок, изобразить фигуру, расположенную в пространстве. Ещё большую трудность вызывают дополнительные построения.

Уже в начале учебника (§ 5) идёт речь о специфике выполнения стереометрических рисунков. В настоящем параграфе рассматриваются основные свойства параллельного проектирования, а более подробное изложение вопроса об изображениях в параллельной проекции плоских и пространственных фигур на плоскости можно прочесть в дополнительном материале «Изображение фигур в параллельной проекции» учебника. Вопрос о построении сечений многогранников в школьной геометрии изложен в дополнительном материале «Методы построения сечений многогранников» задачника.

В отличие от планиметрии, где, например, равные, параллельные и перпендикулярные отрезки изображаются соответственно равными, параллельными и перпендикулярными отрезками, в стереометрии наблюдается совершенно иная картина — правильный треугольник можно изображать треугольником любой формы, квадрат и прямоугольник — любым параллелограммом. Куб и правильный тетраэдр обычно изображают, придерживаясь определённых правил, которые, в свою очередь, основаны на свойствах параллельного проектирования. В стереометрии параллельные отрезки изображаются также параллельными или совпадающими отрезками.

Для достижения наглядности при изучении стереометрии такие её разделы, как «Аксиомы стереометрии и следствия из них», «Параллельность, перпендикулярность, расстояния в пространстве», излагаются в учебнике с помощью моделей и изображений куба, параллелепипеда, призмы, пирамиды. Зная, как изображаются в параллельной проекции плоские многоугольники, учащиеся с самого начала вырабатывают навыки правильно аргументированного изображения многогранников.

Учащиеся должны уяснить, как изображается, например, средняя линия, медиана, биссектриса и высота треугольника, а также помнить, что отношение длин отрезков, лежащих на параллельных прямых или на одной прямой, сохраняется при параллельном проектировании.

Более того, учащиеся должны понимать, что при построении сечения многогранника на рисунке фактически строится изображение сечения многогранника на его изображении в параллельной проекции.

Для решения задачи **3.112** можно учащимся порекомендовать прочесть в дополнительном материале учебника начало заметки «Изображение фигур в параллельной проекции».

При изучении § 12 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

• понимать и объяснять основные свойства (инварианты) параллельного проектирования;

- понимать и объяснять, что при параллельном проектировании инвариантными являются: отношение длин отрезков, лежащих на параллельных прямых или на одной прямой; понятия средней линии и медианы треугольника; понятие центроида треугольника;
- изображать при параллельном проектировании: любой треугольник — треугольником любой формы; параллелограмм, прямоугольник, ромб — параллелограммом; трапецию — трапецией; окружность — эллипсом;
- понимать и объяснять свойства ромба (прямоугольника, квадрата, трапеции), инвариантные при параллельном проектировании;
- понимать и объяснять, что вершина правильной пирамиды на её изображении ортогонально проектируется в центр основания пирамиды;
- при построении сечения многогранника на рисунке фактически строить изображение сечения многогранника на его изображении в параллельной проекции;
- формулировать и доказывать свойства параллельного проектирования;
- формулировать и доказывать свойства ромба, прямоугольника, квадрата, трапеции, инвариантные при параллельном проектировании;
- строить в параллельной проекции изображения любого треугольника, параллелограмма, прямоугольника, ромба, трапеции, окружности;
- изображать в параллельной проекции равнобедренную трапецию и её ось симметрии, логически обосновывая каждый шаг построения;
- изображать в параллельной проекции ромб, имеющий угол в $60°$, и строить изображение высоты этого ромба, проведённой из: вершины острого угла; вершины тупого угла, логически обосновывая каждый шаг построения;
- строить изображение центра окружности, описанной около правильного треугольника-оригинала, логически обосновывая каждый шаг построения;
- верно и наглядно строить изображение правильной четырёхугольной пирамиды, правильной треугольной пирамиды, правильного тетраэдра, логически обосновывая каждый шаг построения;
- верно строить изображение правильного шестиугольника и правильной шестиугольной пирамиды в параллельной проекции, логически обосновывая каждый шаг построения;
- правильно и наглядно строить угол между прямой и плоскостью на изображениях куба, правильного тетраэдра,

правильной пирамиды, логически обосновывая каждый шаг построения;

- находить площадь ортогональной проекции многоугольника;
- решать задачи на доказательство, построение, вычисление с использованием изображений куба, правильного тетраэдра, параллелепипеда, правильной шестиугольной призмы, логически обосновывая каждое утверждение.

3.113. Ортогональной проекцией ромба $ABCD$ на плоскость, проходящую через вершину A ромба и параллельную его диагонали BD, является квадрат $AB_1C_1D_1$ со стороной a. Найти периметр ромба, если его диагональ AC равна m.

Решение. Так как $BD \parallel B_1D_1$ (рис. 42), то $OB = O_1B_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Тогда $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{a^2}{2}} = \frac{\sqrt{2a^2 + m^2}}{2}$. Значит, периметр ромба равен $4 \cdot \frac{\sqrt{2a^2 + m^2}}{2} = 2\sqrt{2a^2 + m^2}$.

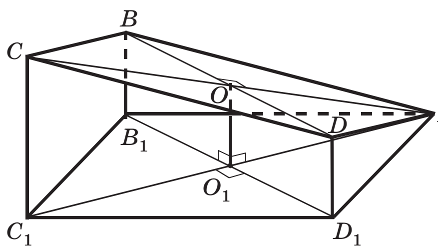


Рис. 42

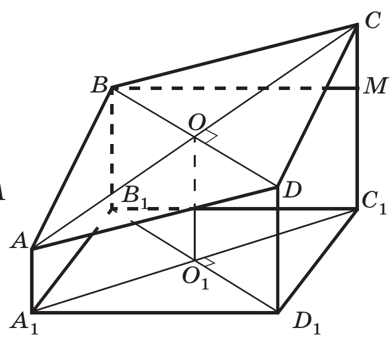


Рис. 43

3.114. Ортогональной проекцией плоского четырёхугольника $ABCD$ является квадрат $A_1B_1C_1D_1$ со стороной 4; $AA_1 = 3$, $BB_1 = 6$, $CC_1 = 9$. Найти длину DD_1, вид, периметр и площадь четырёхугольника $ABCD$. Точки A, B, C и D расположены по одну сторону от плоскости проектирования.

Решение. Пусть $O = AC \cap BD$, $O_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$ (рис. 43). Так как O_1 — середина A_1C_1, то O — середина AC, поэтому $OO_1 = \frac{AA_1 + CC_1}{2} = \frac{3 + 9}{2} = 6$. Тогда из $BD \parallel B_1D_1$ следует, что $DD_1 = 6$.

Так как $ABCD$ — плоский четырёхугольник, а $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат, то на основании свойств параллельного проектирования имеем: $AB \parallel CD$, $AB = CD$, т. е. $ABCD$ — параллелограмм. Учитывая, кроме того, что $A_1C_1 \perp B_1D_1$, по теореме о трёх перпендикулярах приходим к выводу: $AC \perp B_1D_1$. А так как $BD \parallel B_1D_1$, то $AC \perp BD$. Это означает, что $ABCD$ — ромб (но не квадрат, так как AC пересекает плоскость квадрата $A_1B_1C_1D_1$).

Пусть точка M на отрезке CC_1 такова, что $C_1M = B_1B = 6$. Тогда в прямоугольном $\triangle BCM$ находим $BC = \sqrt{BM^2 + CM^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, значит, периметр ромба $ABCD$ равен 20.

В прямоугольном $\triangle BOC$ находим

$$OC = \sqrt{BC^2 - OB^2} = \sqrt{25 - 8} = \sqrt{17},$$

значит, площадь ромба $ABCD$ равна

$$\frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{17} \cdot 4\sqrt{2} = 4\sqrt{34}.$$

Задачи к главе 3

3.123. В прямоугольнике $ABCD$ сторона $AB = \frac{16}{3}$, $AD = 14$. Две равные равнобедренные трапеции $APFD$ и $BCKL$ ($AD \parallel PF$ и $BC \parallel KL$) имеют общую точку O, $AP = 10$, $PF = 2$. Трапеция лежит вне плоскости прямоугольника. Найти длину общего отрезка MR данных трапеций и площадь треугольника PFK, если точка O — середина отрезков AP и BL.

Решение. Общий отрезок MR ($O = M$) данных трапеций является средней линией каждой из них (рис. 44), поэтому $MR = \frac{AD + PF}{2} = \frac{14 + 2}{2} = 8$.

Так как M — середина AP и BL, то $AB \parallel PL$ и $AB = PL = \frac{16}{3}$. Аналогично $FK \parallel CD$ и $FK = CD = \frac{16}{3}$.

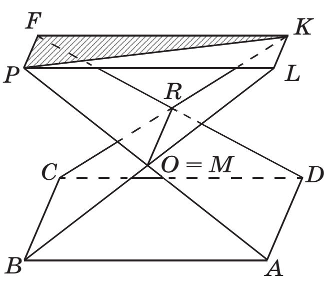


Рис. 44

Учитывая, что отрезки PF и KL равны между собой и параллельны соответственно AD и BC, заключаем, что $PFKL$ — прямоугольник со сторонами $\frac{16}{3}$ и 2, значит, $S_{\triangle PKF} = \frac{1}{2} S_{PFKL} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} \cdot 2 = \frac{16}{3}$.

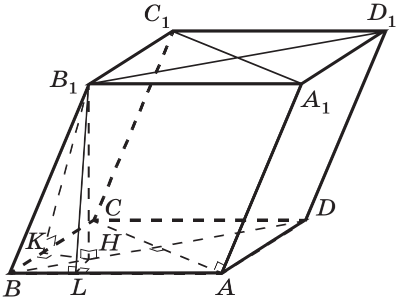


Рис. 45

3.125. Основанием параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ромб. В вершине B сходятся равные углы трёх его граней. Доказать, что ACC_1A_1 — прямоугольник.

Решение. Пусть B_1H — высота данного параллелепипеда (рис. 45). Докажем, что $H \in BD$.

Так как грани AA_1B_1B и BB_1C_1C — равные параллелограммы с общей вершиной, то их высоты B_1L и B_1K равны и, являясь наклонными к плоскости ABC, имеют равные проекции соответственно LH и KH на эту плоскость. Причём по теореме о трёх перпендикулярах $LH \perp AB$ и $KH \perp BC$. Это означает, что точка H равноудалена от сторон угла ABC, т. е. H принадлежит диагонали BD этого угла ($ABCD$ — ромб). Тогда B_1H лежит в плоскости BB_1D_1D.

Получаем: $AC \perp B_1H$, $AC \perp BD \Rightarrow AC \perp (BB_1D_1D) \Rightarrow$ $\Rightarrow AC \perp BB_1$. А так как $BB_1 \parallel AA_1$, то $AC \perp AA_1 \Rightarrow AA_1C_1C$ — прямоугольник.

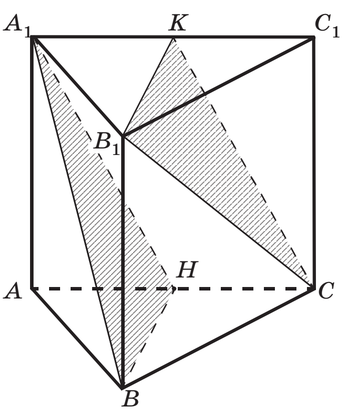


Рис. 46

3.127. Через каждую из двух скрещивающихся диагоналей боковых граней правильной треугольной призмы проводятся два сечения так, что они параллельны другой из этих диагоналей. Доказать, что эти сечения равны.

Решение. Пусть H и K — середины рёбер соответственно AC и A_1C_1 правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 46). Тогда $BH =$ $= B_1K$ и $BH \parallel B_1K$, $A_1H = KC$ и $A_1H \parallel KC$. Значит, $(A_1BH) \parallel (B_1KC)$ и $S_{\triangle A_1BH} = S_{\triangle B_1KC}$.

3.135. Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построить и найти угол между прямыми A_1B и B_1E, если ребро куба a.

Решение. Пусть K — середина ребра D_1D. Тогда $A_1K \parallel B_1E$ и $\angle(A_1B,\ B_1E) = \angle(A_1B,\ A_1K) = \angle BA_1K = \varphi$ (рис. 47).

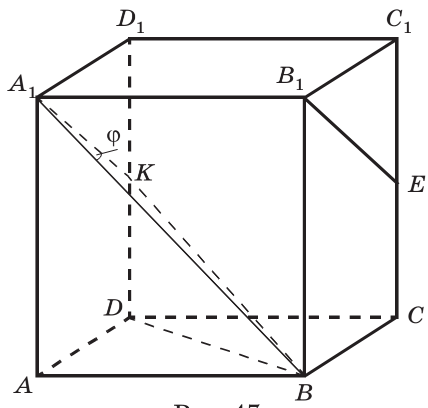


Рис. 47

Находим:

$$A_1K = \sqrt{A_1D_1^2 + D_1K^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2};$$

$$A_1B = a\sqrt{2};$$

$$BK = \sqrt{BD^2 + DK^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3}{2}a.$$

Тогда в $\triangle A_1BK$:

$$\cos\varphi = \frac{A_1B^2 + A_1K^2 - BK^2}{2 \cdot A_1B \cdot A_1K} = \frac{2a^2 + \frac{5}{4}a^2 - \frac{9}{4}a^2}{2 \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

откуда $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

3.136. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AP, перпендикулярная плоскости прямоугольника. Известно, что $PD = 6$ см, $BP = 7$ см, $PC = 9$ см. Найти расстояние между прямыми: а) AP и BC; б) AP и CD; в) BP и CD; г) PD и BC.

Решение. По теореме о трёх перпендикулярах $BP \perp BC$ и $PD \perp DC$ (рис. 48). Тогда

$$\text{в } \triangle PDC\text{: } DC = \sqrt{CP^2 - DP^2} = 3\sqrt{5} = AB;$$

$$\text{в } \triangle BCP\text{: } BC = \sqrt{CP^2 - BP^2} = 4\sqrt{2} = AD.$$

а) Так как AB — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AP и BC, то $\rho(AP;\ BC) = AB = 3\sqrt{5}$.

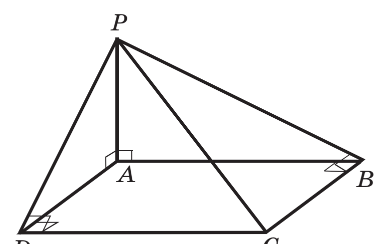


Рис. 48

б) Так как AD — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AP и DC, то $\rho(AP;\ DC) = AD = 4\sqrt{2}$.

в) Так как BC — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых BP и DC, то $\rho(BP;\, DC) = BC = 4\sqrt{2}$.

г) Так как DC — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых PD и BC, то $\rho(PD;\, BC) = DC = 3\sqrt{5}$.

Замечание. Задачу **3.136** целесообразно решать после прохождения материала об общем перпендикуляре двух скрещивающихся прямых.

3.140. Сторона BC треугольника ABC ($AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$) лежит в плоскости α; расстояние от точки A до плоскости α равно 6. Найти расстояния от точек B_1 и C_1 до плоскости α, где BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC.

Решение. Пусть $\triangle BCK$ — ортогональная проекция $\triangle BCA$ на плоскость α;

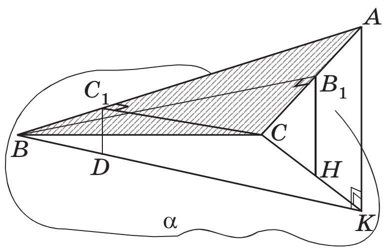


Рис. 49

$AK \perp \alpha$, $B_1H \perp \alpha$, $C_1D \perp \alpha$, $H \in CK$, $D \in BK$ (рис. 49).

Тогда $\rho(A;\, \alpha) = AK$, $\rho(B_1;\, \alpha) = B_1H$, $\rho(C_1;\, \alpha) = C_1D$.

Имеем:

$$\frac{B_1H}{AK} = \frac{B_1C}{AC} \Rightarrow B_1H = \frac{B_1C \cdot AK}{AC}.$$

Аналогично $C_1D = \dfrac{BC_1 \cdot AK}{AB}$.

Для решения задачи достаточно найти B_1C и BC_1, для чего, в свою очередь, достаточно найти катеты BB_1 и CC_1 прямоугольных треугольников BB_1C и BCC_1.

Находим:

$$CC_1 = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB} = \frac{2\sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}}{13} = \frac{2 \cdot 84}{13};$$

$$BB_1 = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB} = \frac{2 \cdot 84}{15}.$$

Тогда

в $\triangle BB_1C$: $B_1C = \sqrt{BC^2 - B_1B^2} = \sqrt{14^2 - \left(\dfrac{2 \cdot 84}{15}\right)^2} = \dfrac{42}{5}$;

в $\triangle BC_1C$: $BC_1 = \sqrt{BC^2 - C_1C^2} = \sqrt{14^2 - \left(\dfrac{2 \cdot 84}{13}\right)^2} = \dfrac{70}{13}$.

Таким образом,

$$\rho(B_1;\, \alpha) = B_1H = \frac{\frac{42}{5} \cdot 6}{15} = \frac{84}{25};\ \rho(C_1;\, \alpha) = C_1D = \frac{\frac{70}{13} \cdot 6}{13} = \frac{420}{169}.$$

3.141. $ABCD$ — параллелограмм со сторонами $AB = 6$, $BC = 14$. Сторона AD лежит в плоскости β, расстояние от B до плоскости β равно 3, M — точка пересечения биссектрис углов A и D параллелограмма. Найти расстояние от точки M до плоскости β.

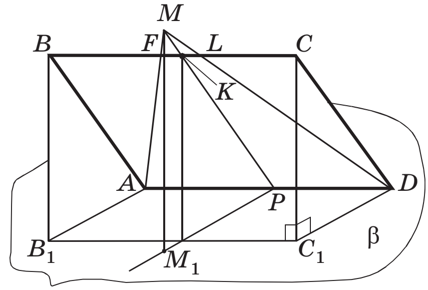


Рис. 50

Решение. Обозначим $F = AM \cap BC$, $L = DM \cap BC$ и проведём $MP \parallel AB$; $K = MP \cap BC$ (рис. 50).

Так как $AB = BF = CL = DC = 6$ ($\triangle ABF$ и $\triangle CDL$ — равнобедренные), то $BF + LC = 12$. Значит, точка M лежит вне данного параллелограмма и $FL = 14 - 12 = 2$. При этом равнобедренными являются $\triangle FMK$ ($FK = KM$) и $\triangle MKL$ ($MK = KL$). Следовательно, $FK = MK = KL = 1$, поэтому $MP = MK + KP = 1 + 6 = 7$. Тогда $\dfrac{\rho(M;\beta)}{\rho(K;\beta)} = \dfrac{MP}{KP} \Rightarrow \rho(M;\beta) = \dfrac{MP \cdot \rho(K;\beta)}{KP} = \dfrac{7 \cdot 3}{6} = 3{,}5$.

3.144. В правильном тетраэдре $PABC$ точка O — центр его основания ABC, точка K — середина ребра PC. Провести перпендикуляры: а) из точки K на (ABC); б) из точки K на (ABP); в) из точки O на (BCP); г) из точки O на (ACP). Найти длины этих перпендикуляров, если ребро тетраэдра равно 2.

Решение. а) Так как $OP \perp (ABC)$, то в плоскости COP проводим $KD \parallel OP$, $D \in OC$ (рис. 51); получили $KD \perp (ABC)$. Находим

$$KD = \frac{1}{2}OP = \frac{1}{2}\sqrt{CP^2 - OC^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2^2 - \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

б) Пусть E — центр грани ABP, тогда $CE \perp (ABP)$, значит, отрезок $KH \parallel CE$ (где $H \in PE$) перпендикулярен (ABP). Аналогично находим $KH = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

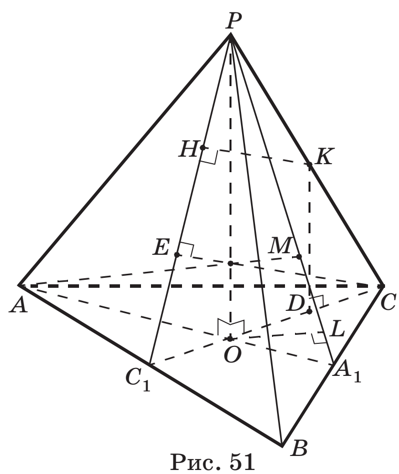


Рис. 51

в) Если M — центр грани BCP, то $AM \perp (BCP)$, значит, отрезок $OL \parallel AM$ (где $L \in PA_1$, A_1 — середина BC) перпендикулярен (BCP). Из $OA_1 = \frac{1}{3}AA_1$ и $OL \parallel AM$ следует, что $OL = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{9}$.

г) Решение аналогично предыдущему.

3.145. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точка E — середина ребра BB_1, точка K — середина ребра CC_1, точка M — середина ребра A_1B_1. Провести перпендикуляры: а) из точки A на плоскость BB_1D; б) из точки B на (ACB_1); в) из точки A_1 на (AB_1D_1); г) из точки B на (A_1C_1D); д) из точки E на (ADD_1); е) из точки K на (BB_1D); ж) из точки M на (AB_1D_1). Найти длину каждого из этих перпендикуляров, если ребро куба равно a.

Решение. Пусть $O = AC \cap BD$, $O_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$ (рис. 52).

а) $AO \perp (BB_1D)$, $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

б) Проекциями диагонали BD_1 на плоскости ABC и BCC_1 являются соответственно прямые BD и BC_1, перпендикулярные соответственно прямым AC и B_1C. Тогда прямая BD_1 перпендикулярна каждой из прямых AC и B_1C, а значит,

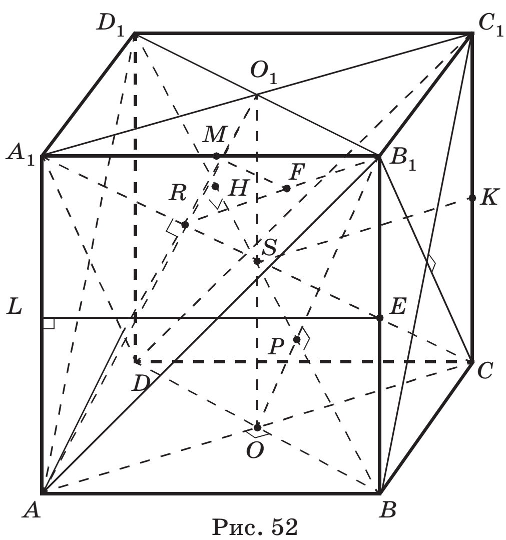


Рис. 52

и плоскости AB_1C, пересекая её в точке $P = BD_1 \cap OB_1$. Так как диагональ BD_1 делится параллельными плоскостями AB_1C и A_1C_1D на три равные части, то длина перпендикуляра BP из точки B на (AB_1C) равна $\frac{1}{3}BD_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

в) Рассуждая аналогично случаю б), получим: $A_1R \perp (AB_1D_1)$, где $R = A_1C \cap AO_1$, причём $A_1R = \frac{1}{3}CA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

г) $(A_1C_1D) \parallel (AB_1C)$ и $BD_1 \perp (AB_1C) \Rightarrow BD_1 \perp (A_1C_1D)$. Учитывая, что $BD_1 \cap (A_1C_1D) = H = BD_1 \cap DO_1$ и $BH = \frac{2}{3}BD_1$, получаем: $BH \perp (A_1C_1D)$ и $BH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

д) $EL \perp (ADD_1)$ и $EL = a$.

е) $KS \perp (BDD_1)$ и $KS = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, где S — середина диагонали BD_1.

ж) Имеем $A_1R \perp (AB_1D_1)$ и $A_1R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (случай в)). Проведём $MF \parallel A_1R$, где $F \in RB_1$. Тогда $MF \perp (AB_1D_1)$ и $MF = \frac{1}{2}A_1R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

3.151. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a найти расстояние от центра грани CDD_1C_1 до плоскости AB_1C.

Решение. Пусть M — центр грани CDD_1C_1 (рис. 53) и $K = BD_1 \cap (AB_1C)$ (см. **3.145**). Проводим $MH \parallel BD_1$, $H \in CK$. Тогда MH — искомый перпендикуляр; его длина равна половине длины KD_1, т. е. $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}a\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

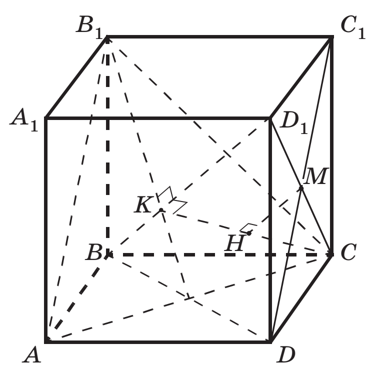


Рис. 53

3.153. Боковая сторона AD трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α, а расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до плоскости α равно 12; $AB = 3CD$. Найти расстояния от точек B и C до плоскости α.

Решение. Пусть $O = AC \cap BD$, $O_1 = AC_1 \cap B_1D$; $CC_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$ (рис. 54). Так как $OD : OB = OC : OA = CD : AB = 1 : 3$, то $BD = 4OD$, $CA = \frac{4}{3}OA$. Это означает, что $\rho(B; \alpha) = 4\rho(O; \alpha) = 4 \cdot 12 = 48$ и $\rho(C; \alpha) = \frac{4}{3}\rho(O; \alpha) = \frac{4}{3} \cdot 12 = 16$.

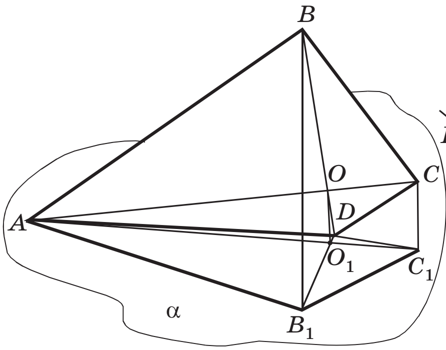


Рис. 54

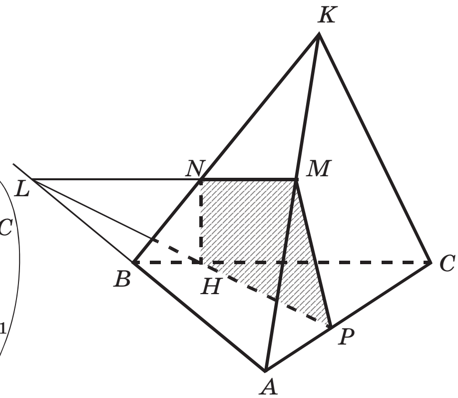


Рис. 55

3.156. В треугольной пирамиде $KABC$ на рёбрах KA, KB и AC взяты соответственно точки M $(KM : MA = 3 : 5)$, N $(KN : NB = 7 : 5)$ и P $(AP : PC = 2 : 3)$. Найти отношение, в котором плоскость MNP делит ребро BC, считая от точки B.

Решение. Построим точки $L = MN \cap AB$, $H = BC \cap LP$ и сечение $MNHP$ данного тетраэдра плоскостью MNP (рис. 55).

Воспользуемся теоремой Менелая для $\triangle ABK$ и прямой MN. Имеем: $\frac{KN}{NB} \cdot \frac{BL}{LA} \cdot \frac{AM}{MK} = 1$ или $\frac{7}{5} \cdot \frac{BL}{LA} \cdot \frac{5}{3} = 1$, откуда $\frac{BL}{LA} = \frac{3}{7}$. Далее, по теореме Менелая для $\triangle ABC$ и прямой PL: $\frac{AP}{PC} \cdot \frac{CH}{HB} \cdot \frac{BL}{LA} = 1$ или $\frac{2}{3} \cdot \frac{CH}{HB} \cdot \frac{3}{7} = 1$, откуда $\frac{BH}{HC} = \frac{2}{7}$.

3.161. Точка K лежит на окружности радиуса 1 с центром A. Прямая BK перпендикулярна плоскости окружности и $BK = 1$. Точка P лежит на окружности. Составить функцию, выражающую зависимость величины угла между прямой BP и плоскостью окружности от величины x угла PAK $(0 < x \leqslant \pi)$.

Решение. Пусть φ — величина угла между прямой BP и плоскостью окружности (рис. 56). Если H — середина хорды KP окружности, то $KH = \sin 0{,}5x$, значит, $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{1}{2\sin 0{,}5x}$, откуда $\varphi = $
$= \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2\sin 0{,}5x}$.

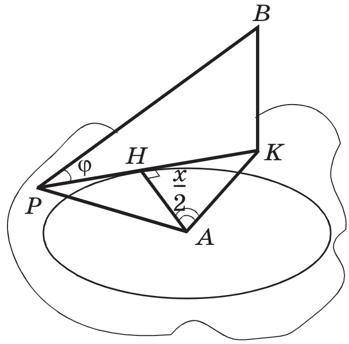


Рис. 56

3.162. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма, все рёбра которой равны 1. Найти синус угла между: а) прямой B_1E и плоскостью BC_1C; б) прямой AB и плоскостью BF_1C; в) прямой BD_1 и плоскостью BF_1C; г) прямой A_1B и плоскостью BB_1C; д) прямой C_1F и плоскостью BF_1C.

Решение. Для решения метрических задач применительно к правильной шестиугольной призме полезно на отдельном (выносном) рисунке изобразить её нижнее (или верхнее) основание — правильный шестиугольник $ABCDEF$, сторона которого равна 1 (см. рис. 17 и указание к задаче **2.055**).

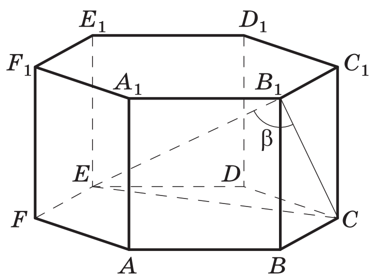


Рис. 57

а) Обозначим: $\angle (B_1E, ((BC_1C)) = \beta$.

Имеем: $CE \perp BC$ (см. рис. 17); $C_1C \perp (ABC)$, $CE \subset (ABC)$ (рис. 57) $\Rightarrow C_1C \perp EC$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Получаем: $CE \perp BC$, $CE \perp C_1C \Rightarrow$ $\Rightarrow CE \perp (BC_1C)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости) $\Rightarrow EC \perp B_1C$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости).

Это означает, что B_1C — ортогональная проекция прямой B_1E на (BC_1C), при этом $\angle CB_1E = \angle (B_1E, ((BC_1C) = \beta$, $\angle B_1CE = 90°$.

Тогда в прямоугольном $\triangle B_1CE$ с катетами $CE = \sqrt{3}$ и $B_1C = \sqrt{2}$ находим:

$$\sin\beta = \frac{EC}{B_1E} = \frac{EC}{\sqrt{EC^2 + B_1C^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2}} = 0{,}2\sqrt{15}\,.$$

б) Обозначим: $\angle(AB, (BF_1C)) = \alpha$. На рисунке 58 построено сечение $BCNE_1F_1M$ данной призмы плоскостью BF_1C, при этом $K = AF \cap BC$, $\triangle ABK$ — правильный, так как $\angle ABK = \angle KAB = 60°$ (как смежные с внутренними углами правильного шестиугольника); стороны $\triangle ABK$ равны по 1.

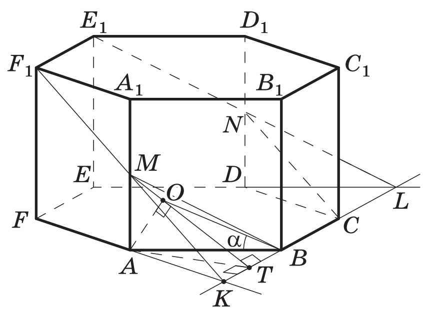


Рис. 58

Пусть точка T — середина отрезка BK. Тогда: $AT \perp BK$ (как медиана правильного $\triangle ABK$) $\Rightarrow MT \perp BK$ (по теореме о трёх перпендикулярах) $\Rightarrow BK \perp (AMT)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости) $\Rightarrow (MBK) \perp (AMT)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей). Это означает, что перпендикуляр AO, проведённый из точки A на (MBK) ($O \in (MBK)$), расположен в (AMT). А так как $(MBK) \cap (AMT) = MT$, то $O \in MT$ (см. рис. 58). Поэтому AO — высота прямоугольного $\triangle AMT$ с катетами $AT = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $AM = 0{,}5\ F_1F = 0{,}5$ (как средняя линия $\triangle F_1FK$). Значит,

$$AO = \frac{AM \cdot AT}{\sqrt{AM^2 + AT^2}} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5\sqrt{3}}{\sqrt{0{,}25 + 0{,}75}} = 0{,}25\sqrt{3}\,.$$

Имеем: $AO \perp (BF_1C)$, $O \in (BF_1C)$; $B \in (BF_1C) \Rightarrow OB$ — ортогональная проекция AB на (BF_1C). Тогда

$$\angle(AB, (BF_1C)) = \angle(AB, BO) = \angle ABO = \alpha.$$

Так как $AO \perp (BF_1C)$, $OB \subset (BF_1C)$, то $AO \perp OB$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости) $\Rightarrow$ $\triangle ABO$ — прямоугольный, с катетом $OA = 0{,}25\sqrt{3}$ и гипотенузой $AB = 1$. Это означает: $\sin \alpha = 0{,}25\sqrt{3}$.

Глава 4. Плоскости в пространстве

§ 13. Параллельность плоскостей

Накопленный и хорошо усвоенный учащимися материал о взаимном расположении прямых, прямой и плоскости способствует более осознанному изучению вопросов взаимного расположения плоскостей в пространстве.

Учащиеся должны понимать, что как при выяснении вопроса о параллельности, перпендикулярности, скрещиваемости двух прямых, параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости, так и при выяснении вопроса о том, параллельны ли две плоскости, используются признаки их параллельности (теоремы 18, 19). Кроме того, полезным при решении задач является утверждение: две плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

Не менее важными при решении задач являются теоремы 20—25, при внимательном анализе которых учащиеся могут обнаружить определённую аналогию между свойствами параллельных плоскостей в пространстве и свойствами параллельных прямых на плоскости. Кроме того, полезным при решении задач стереометрии является пространственный аналог теоремы Фалеса.

Авторы и в этом параграфе продолжают придерживаться своей концепции изучать свойства взаимного расположения плоскостей в задачах, используя модели и изображения куба, правильного тетраэдра, призмы, пирамиды, параллелепипеда, так как такие задачи обладают конструктивностью и содержательностью, а рассуждения учащихся при их решении становятся доступными и естественными, что, в свою очередь, приводит к сознательному и эффективному формированию у ученика конструктивных пространственных представлений. Однако некоторые задачи можно решать и без помощи рисунка (например, **4.001, 4.002, 4.008, 4.017**).

Задачи, предлагаемые в графической работе № 2, с одной стороны, достаточно просты, но, с другой стороны, они очень важны. Разобравшись в их решениях и безошибочно выполнив нужный для каждой из них рисунок, ученик достигает того необходимого уровня геометрической культуры, который позволит ему в дальнейшем справиться со стереометрическими задачами более высокой сложности.

При изучении § 13 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

- понимать и объяснять, что при выяснении вопроса о том, параллельны ли две плоскости, необходимо использовать признаки их параллельности;
- понимать и объяснять, что если каждая из двух пересекающихся прямых одной плоскости параллельна другой плоскости, то данные плоскости параллельны;
- понимать и объяснять, что если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны;
- понимать и объяснять, что прямые, по которым две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, параллельны;
- понимать и объяснять, что если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую;
- понимать и объяснять, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую плоскость;
- понимать и объяснять, что две плоскости, параллельные третьей, параллельны;
- понимать и объяснять, что при построении сечений многогранников можно (и нужно) пользоваться признаками и свойствами параллельных плоскостей: если секущая плоскость пересекает каждую из двух параллельных граней многогранника, то отрезки, по которым секущая плоскость пересекает эти грани, являются параллельными сторонами многоугольника-сечения;
- понимать и объяснять, что отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны;
- формулировать определение параллельных плоскостей;
- формулировать и доказывать теоремы:

— о признаках параллельности плоскостей;

— о свойствах параллельных плоскостей;

— о единственности плоскости, проходящей через данную точку параллельно данной плоскости;

— о транзитивности отношения параллельности плоскостей в пространстве;

— о свойствах отрезков, заключённых между двумя параллельными плоскостями;

— о свойстве прямой, перпендикулярной к одной из двух параллельных плоскостей;

• интуитивно видеть параллельные плоскости на моделях и изображениях многогранников, после чего логически обосновывать их параллельность;

• используя изображения многогранников, корректно аргументируя возникающие утверждения и повторяя при этом свойства параллельного проектирования, параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей, решать задачи:

— на признак параллельности двух плоскостей;

— на построение сечений многогранников и вычисление их периметров, площадей;

— на вычисление расстояний между точками, прямыми и плоскостями;

— на вычисление углов между прямыми и плоскостями.

4.016. Построить сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и противолежащую сторону верхнего основания. Найти площадь этого сечения, если боковые грани призмы — квадраты со стороной 4 см.

Решение. Строим точки (рис. 59): $R = AB \cap EF$; $T = AB \cap CD$; $P = RE_1 \cap FF_1$; $Q = TD_1 \cap CC_1$. Шестиугольник $ABQD_1E_1P$ — искомое сечение.

Так как P и Q — середины рёбер FF_1 и CC_1, то площадь шестиугольника $ABQD_1E_1P$ равна удвоенной площади тра-

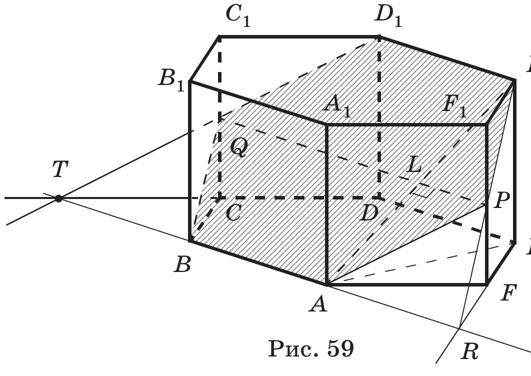


Рис. 59

пеции $ABQP$, высота AL которой равна $\frac{1}{2}AE_1$, где $AE_1 =$ $= \sqrt{AE^2 + E_1E^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = 8$. Значит, $S_{ABQD_1E_1P} =$ $= 2 \cdot \frac{AB + PQ}{2} \cdot AL = (4 + 8) \cdot 4 = 48$ (см^2).

4.018. Прямая DF пересекает параллельные плоскости α, β и γ соответственно в точках D, E и F, при этом $DF = 3$, $EF = 9$. Прямая EG пересекает плоскости α и γ соответственно в точках G и H, при этом $EG = 12$. Найти длину отрезка GH.

Решение. Если плоскость γ лежит между плоскостями α и β (рис. 60, *а*), то $GH = 3$; если плоскость α лежит между плоскостями β и γ (рис. 60, *б*), то $GH = 6$.

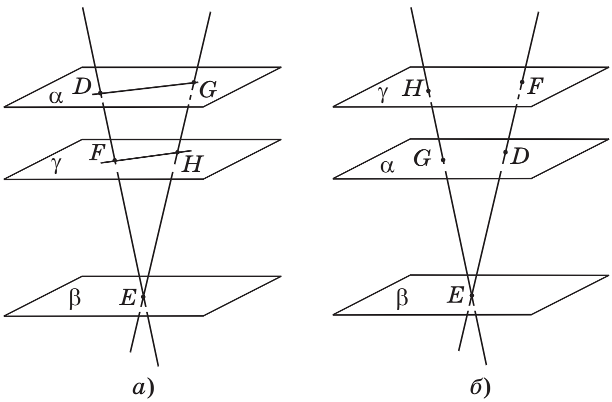


Рис. 60

4.022. Точка O — центр основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$. Построить сечение этой пирамиды плоскостью α, проходящей: а) через O параллельно грани PAB; б) через середину отрезка OB параллельно диагонали AC основания и ребру PD; в) через середину отрезка PO параллельно основанию пирамиды. В каждом случае определить вид фигуры-сечения и найти её площадь, если $BC = 12$, $PB = 10$.

Решение. а) Так как $\alpha \parallel (ABP)$, то прямые $MK = \alpha \cap (ABC)$, $MH = \alpha \cap (APD)$, $KL = \alpha \cap (CPB)$ параллельны соответственно AB, AP, BP, при этом $HL \parallel MK$ (рис. 61). Учитывая, что $PABCD$ — правильная пирамида, K и M — середины BC

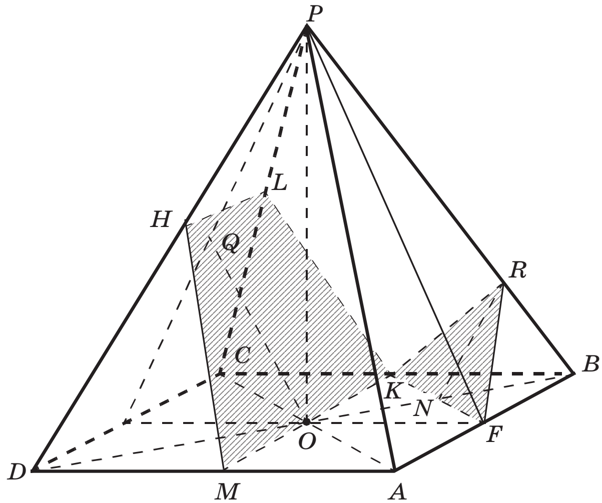


Рис. 61

и AD, приходим к выводу: $MHLK$ — равнобедренная трапеция, у которой $MK = 2HL$, а высота $OQ = \frac{1}{2}PF = 4$ ($PF = \sqrt{AP^2 - AF^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$). Значит, $S_{MHLK} = \frac{3HL}{2} \cdot OQ = \frac{3 \cdot 6}{2} \cdot 4 = 36$.

б) Проведём $NR \parallel PD$, N — середина OB. Так как $\alpha \parallel AC$, то прямая $FK = \alpha \cap (ABC)$ параллельна AC, значит, $FK \perp OB$. В сечении получается равнобедренный $\triangle FKR$ с основанием $KF = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ и высотой $NR = \frac{1}{4}DP = \frac{1}{4} \cdot 10 = 2{,}5$. Тогда $S_{\triangle FKR} = \frac{1}{2}KF \cdot NR = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 2{,}5 = \frac{15\sqrt{2}}{2}$.

в) Сечением пирамиды плоскостью, проходящей через середину её высоты и параллельной её основанию, является квадрат, площадь которого в четыре раза меньше площади основания пирамиды, т. е. равна 36.

4.028. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны a. Точка M лежит на ребре AB, причём $AM : MB = 3 : 1$, точка N — середина B_1C_1. а) Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости A_1BC. б) Найти периметр сечения. в) Найти площадь сечения. г) В каком отношении плоскость сечения делит отрезок AN, считая от A?

Решение. а) Пусть секущая плоскость α параллельна (A_1BC) и пересекает рёбра AC и A_1A в точках соответственно D и K, тогда $MK \parallel A_1B$, $DK \parallel A_1C$ (рис. 62). Таким образом, в сечении призмы получается равнобедренный треугольник MDK ($MK = DK$).

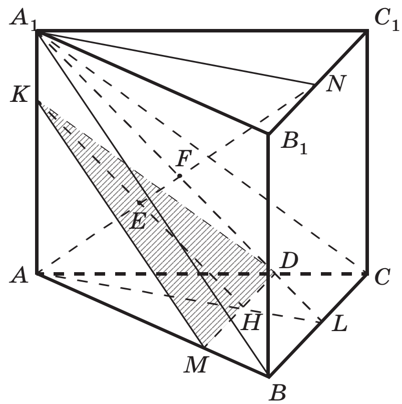


Рис. 62

б) Из условия $AM : MB = 3 : 1$ следует, что $MK = DK = \frac{3}{4}A_1B$, $MD = \frac{3}{4}BC$. Тогда для периметра треугольника MDK имеем:

$$P_{\triangle MDK} = \frac{3}{4}(2A_1B + BC) = \frac{3}{4}(2 \cdot a\sqrt{2} + a) = \frac{3}{4}(2\sqrt{2} + 1)a.$$

в) $MD \perp AH \Rightarrow MD \perp KH \Rightarrow S_{\triangle MDK} = \frac{1}{2}MD \cdot HK = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}BC \times \times \frac{3}{4}A_1L = \frac{9}{32}a \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{9a^2\sqrt{7}}{64}$ $\left(\text{где } A_1L = \sqrt{A_1A^2 + AL^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}\right)$.

г) Обозначим $E = AN \cap (MDK) = AN \cap KH$; $F = AN \cap A_1L$. Тогда $AF = \frac{1}{2}AN$, $AE = \frac{3}{4}AF$. Значит, $AE = \frac{3}{8}AN$, откуда $AE : EN = 3 : 5$.

§ 14. Двугранные углы. Угол между двумя плоскостями

Задачи данного параграфа носят пропедевтический характер к решению содержательных задач стереометрии в 11 классе. В этой связи учащимся необходимо привыкнуть видеть двугранные углы, образованные различными плоскостями, находить, изображать и вычислять их линейные углы наиболее простым способом.

Для нахождения угла φ между двумя пересекающимися плоскостями α и β удобно использовать следующий факт: если плоскости α и β пересекаются по прямой c, а некоторая точка M плоскости α удалена от плоскости β на расстояние h и от прямой c — на расстояние m, то $\sin\varphi = \frac{h}{m}$.

Заметим, что при решении отдельных вопросов задачи **4.055** желательно к каждому из них выполнить специальный рисунок.

При изучении § 14 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

- понимать и объяснять определение двугранного угла;
- понимать и объяснять, что двугранный угол может быть острым, прямым или тупым, если его линейный угол соответственно острый, прямой или тупой;
- формулировать определение двугранного угла;
- видеть и правильно изображать (показывать на рисунке) линейные углы двугранных углов в данном многограннике; в качестве многогранников целесообразно использовать куб, правильные или специальные пирамиды;
- понимать, что двугранный угол может быть острым, прямым или тупым, если его линейный острый, прямой или тупой;
- решать задачи на нахождение: величины двугранного угла; расстояния от точки, расположенной внутри двугранного угла, до его граней или его ребра; целесообразно использовать для решения различных задач на двугранные углы изображения куба, прямоугольного параллелепипеда, правильных или специальных пирамид;
- находить с помощью теоремы о площади ортогональной проекции многоугольника: площадь основания многогранника; площадь сечения многогранника; величину двугранного угла при ребре многогранника; величину угла между плоскостями основания и сечения многогранника; в качестве многогранников использовать куб, правильные пирамиды;
- находить углы и расстояния между прямыми и плоскостями на изображениях многогранников.

4.039. Точки A и B лежат на разных гранях двугранного угла, величина которого равна 60°. Точки A_1 и B_1 — проекции точек A и B на ребро двугранного угла. $AA_1 = A_1B_1 = BB_1 = 2$. Найти длину отрезка AB.

Решение. Пусть D — такая точка грани A_1B_1B, что четырёхугольник A_1B_1BD — квадрат (рис. 63). Тогда $\triangle AA_1D$ — равносторонний со стороной 2.

Так как $AA_1 \perp A_1B_1$ и $A_1D \perp A_1B_1$, то $A_1B_1 \perp (AA_1D)$. Значит, $BD \perp (AA_1D)$, поэтому $\triangle ABD$ — прямоугольный, в котором $AB = \sqrt{BD^2 + AD^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

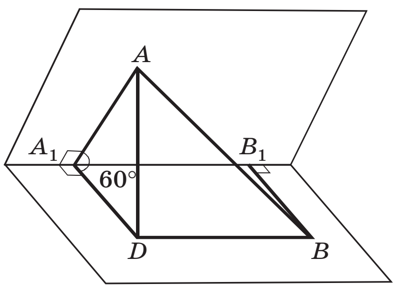


Рис. 63

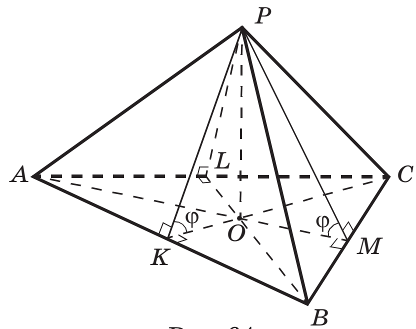


Рис. 64

4.047. Доказать, что все двугранные углы правильного тетраэдра равны. Найти их величину.

Решение. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр (рис. 64). Так как $PA = PB = PC$, то $OA = OB = OC$, где $PO \perp (ABC)$ и O — центр правильного $\triangle ABC$, в котором $CO \perp AB$, $AO \perp BC$, $BO \perp AC$. Если при этом $CO \cap AB = K$, $AO \cap BC = M$, $BO \cap AC = L$, то $OK = OM = OL$.

Так как $PK = PM = PL$ и $PK \perp AB$, $PM \perp BC$, $PL \perp AC$, то равны углы OKP, OMP и OLP, являющиеся линейными углами двугранных углов при рёбрах соответственно AB, BC и AC. Аналогично доказывается равенство двугранных углов при других рёбрах правильного тетраэдра.

Обозначим $\varphi = \angle OKP = \angle OMP = \angle OLP$. Если ребро тетраэдра $PABC$ равно a, то $PK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $OK = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{OK}{PK} = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{6}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}, \text{ откуда } \varphi = \arccos\frac{1}{3}.$$

4.055. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M — середина ребра C_1D_1. Заполнить таблицу.

№	Плоскости	Взаимное расположение плоскостей	Величина угла между плоскостями
1	A_1BA и D_1CD		
2	$A_1B_1C_1$ и DD_1C		
3	A_1BD и B_1D_1C		
4	B_1AC и ADC		
5	A_1BD и C_1DB		
6	A_1BD и CC_1A		
7	AB_1C_1 и ADC		
8	A_1MA и B_1C_1C		
9	A_1MA и BB_1D		
10	MA_1D и CA_1D		

Решение. 5) Пусть ребро куба равно a. Плоскости A_1BD и C_1DB пересекаются по прямой BD, образуя двугранный угол $A_1(BD)C_1$, линейным углом которого является $\angle A_1OC_1 = \varphi$ (рис. 65). В прямоугольном $\triangle C_1OO_1$, где $\angle O_1OC_1 = \frac{\varphi}{2}$, нахо-

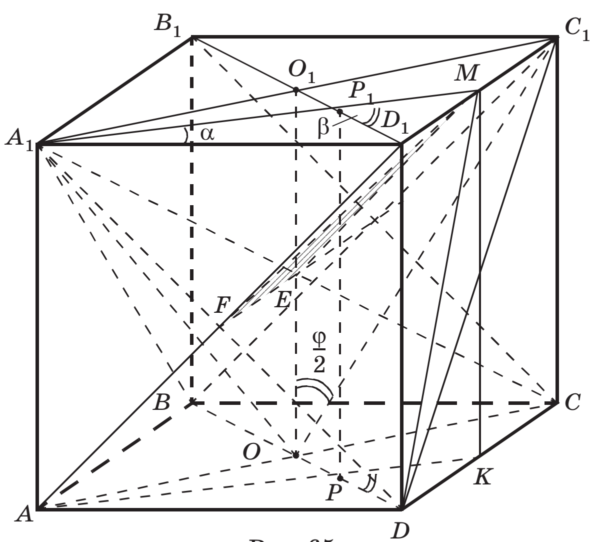


Рис. 65

дим: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{O_1C_1}{O_1O} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда $\varphi = 2\operatorname{acrtg}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8) Плоскости A_1MA и B_1C_1C пересекаются по прямой, параллельной AA_1. Так как $(BCC_1) \parallel (ADD_1)$ (см. рис. 65), то $\angle((A_1MA), (B_1C_1C)) = \angle((A_1MA), (ADD_1)) = \alpha$. Линейным углом двугранного угла $D_1(A_1A)M$ служит $\angle MA_1D_1$. В прямоугольном $\triangle MA_1D_1$ находим: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{MD_1}{A_1D_1} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

9) Плоскости A_1MA и BB_1D пересекаются по прямой P_1P (см. рис. 65) и образуют двугранный угол $K(P_1P)D$, линейным углом которого служит $\angle KPD = \beta$. В треугольнике KPD находим: $\angle AKD = \operatorname{arctg} 2$, $\angle PDK = 45°$, тогда $\angle KPD = 135° - \operatorname{arctg} 2$.

10) Плоскости MA_1D и CA_1D пересекаются по прямой A_1D, образуя двугранный угол $M(A_1D)C$. Если FE — средняя линия $\triangle A_1CD$, то MF — медиана равнобедренного $\triangle MA_1D$ — перпендикулярна A_1D. Кроме того, $FE \parallel CD$, значит, $FE \perp A_1D$, поэтому $\angle MFE$ — линейный угол двугранного угла $M(A_1D)C = \gamma$. Точка E является центром куба, лежит в плоскостях O_1OM и A_1B_1CD, причём $ME \perp (A_1CD)$. Тогда в прямоугольном $\triangle FEM$ находим $\operatorname{tg}\gamma = \frac{ME}{FE} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2}$, откуда $\gamma = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

§ 15. Перпендикулярность плоскостей

Материал о перпендикулярности плоскостей является завершающим в изложении разделов стереометрии, посвящённых вопросам взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве. После изучения этого материала учащиеся должны уметь решать задачи не только на определение взаимного расположения прямых и плоскостей, но и на нахождение углов и расстояний между ними, а также численных характеристик (длин, периметров, площадей и т. д.) различных геометрических фигур.

Все разделы задачи **4.067**, кроме д), полезно решить с помощью единого рисунка. Сочетание задач на доказательство, построение и исследование **(4.056—4.062, 4.066, 4.069, 4.072, 4.074)** с задачами вычислительного характера на нахождение расстояний **(4.063—4.065)**, периметров и площадей сечений многогранников **(4.070—4.071)**, углов между прямыми и плоскостями **(4.067—4.068, 4.073)** свидетельствует о большом многообразии вопросов стереометрии, которые можно решать после изучения пройденного материала.

При изучении § 15 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

- понимать и объяснять определение перпендикулярных плоскостей;
- понимать и объяснять, что если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны (признак перпендикулярности двух плоскостей);
- понимать и объяснять, что если в плоскости есть хоть одна прямая, перпендикулярная другой плоскости, то эти плоскости взаимно перпендикулярны (признак перпендикулярности двух плоскостей);
- понимать и объяснять, что для определения, перпендикулярны ли две плоскости, применяется признак перпендикулярности двух плоскостей;
- понимать и объяснять, что если плоскость перпендикулярна прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, то эта плоскость перпендикулярна каждой из данных плоскостей;
- понимать и объяснять, что если прямая лежит в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярна линии их пересечения, то она перпендикулярна другой плоскости;
- понимать и объяснять, что если прямая, проведённая через точку одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна другой плоскости, то она лежит в первой из них;
- понимать и объяснять, что если прямая, проведённая через точку одной из двух пересекающихся плоскостей, пер-

пендикулярна другой плоскости и не лежит в первой, то данные плоскости не перпендикулярны;

- понимать и объяснять, что если две плоскости, перпендикулярные третьей плоскости, пересекаются, то прямая их пересечения перпендикулярна третьей плоскости;
- формулировать определение перпендикулярных плоскостей;
- формулировать и доказывать признак перпендикулярности двух плоскостей;
- доказывать признаки перпендикулярности двух плоскостей и свойства перпендикулярных плоскостей;
- доказывать теорему о площади ортогональной проекции многоугольника;
- решать задачи на признак и свойства перпендикулярных плоскостей, используя изображения правильного тетраэдра, правильной пирамиды, куба;
- находить расстояния между скрещивающимися прямыми, используя изображения правильного тетраэдра, куба; целесообразно предлагать учащимся решать одну и ту же задачу различными методами;
- решать задачи на определение и признак перпендикулярных плоскостей, используя изображения правильного тетраэдра, правильной пирамиды, куба;
- формулировать и доказывать теоремы: о прямой, лежащей в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярной прямой их пересечения; о прямой, перпендикулярной одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и имеющей со второй плоскостью общую точку; о линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей; иллюстрировать содержание этих теорем на моделях и изображениях куба, правильного тетраэдра, прямоугольного параллелепипеда, правильной шестиугольной призмы;
- используя многогранники и применяя теоремы о свойствах параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей, решать задачи: на доказательство параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей; на вычисление расстояний и углов между прямыми и плоскостями; на построение сечений и вычисление их площадей;
- сопровождать все рассуждения при решении задач корректными аргументациями.

4.063. Плоскости α и β взаимно перпендикулярны. Прямая p пересекает плоскости α и β в точках соответственно A и B, образуя при этом с каждой из плоскостей углы, равные φ. Найти длину отрезка, концами которого являются проекции точек A и B на линию пересечения данных плоскостей, если длина отрезка AB равна a.

Решение. Обозначим $a = \alpha \cap \beta$, A_1 и B_1 — ортогональные проекции соответственно точек A и B на прямую a. Так как $AA_1 \perp a$, $A \in a$, $\alpha \perp \beta$, $a = \alpha \cap \beta$, то $AA_1 \subset \alpha$ (рис. 66). Аналогично $BB_1 \perp a, B \in \beta, \alpha \perp \beta, a = \alpha \cap \beta \Rightarrow BB_1 \subset \beta$. Тогда в прямоугольных треугольниках ABB_1, AA_1B и AA_1B_1 получаем соответственно $AB_1 = AB \cdot \cos\varphi = a \cdot \cos\varphi$, $A_1A = AB \cdot \sin\varphi = a \cdot \sin\varphi$, $A_1B_1 = \sqrt{AB_1^2 - AA_1^2} = a\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

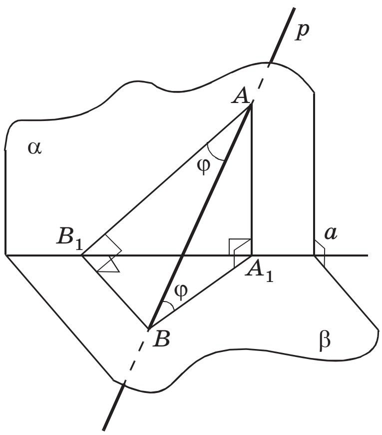


Рис. 66

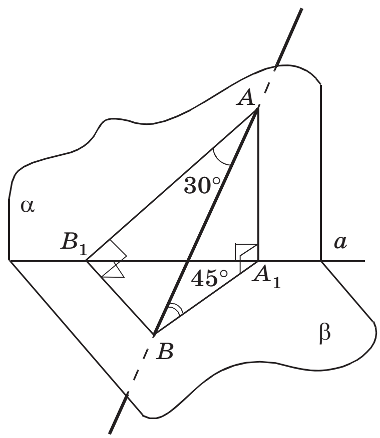


Рис. 67

4.064. Концы A и B отрезка AB, длина которого равна $10\sqrt{2}$ см, принадлежат перпендикулярным плоскостям соответственно α и β. Углы между прямой AB и плоскостями α и β равны соответственно 30° и 45°. Найти: а) расстояния от концов отрезка AB до линии пересечения плоскостей α и β; б) длины проекций отрезка AB на плоскости α и β.

Решение. Обозначим $a = \alpha \cap \beta$, A_1 и B_1 — ортогональные проекции соответственно точек A и B на плоскости соответственно β и α. Так как $AA_1 \perp \beta$, $A \in \alpha$, $\alpha \perp \beta$, $a = \alpha \cap \beta$, то $AA_1 \subset \alpha$ и $AA_1 \perp a$ (рис. 67). Аналогично доказывается, что $BB_1 \subset \beta$ и $BB_1 \perp a$.

а) Используя прямоугольные треугольники ABB_1 и AA_1B, находим соответственно расстояния: $\rho(B;\ a) = |BB_1| = \frac{1}{2}AB =$
$= \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ (см) и $\rho(A;\ a) = |AA_1| = AB \cdot \sin 45° =$
$= 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10$ (см).

б) Проекциями отрезка AB на плоскости α и β являются отрезки AB_1 и A_1B, длины которых равны: $|AB_1| = AB \cdot \cos 30° =$
$= 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{6}$ (см); $|A_1B| = AB \cdot \cos 45° = 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$
$= 10$ (см).

4.067. $ABCD$ — ромб с углом 60°. Прямая MA перпендикулярна плоскости ромба, причём $AB = AM = a$. Найти угол между плоскостями: а) AMB и ABC; б) AMB и AMD; в) MDC и ABC; г) MAD и MBC; д) MDC и BCM.

Решение.

а) $AM \perp (ABC) \Rightarrow (AMB) \perp (ABC) \Rightarrow \angle((AMB),\ (ABC)) =$
$= 90°$.

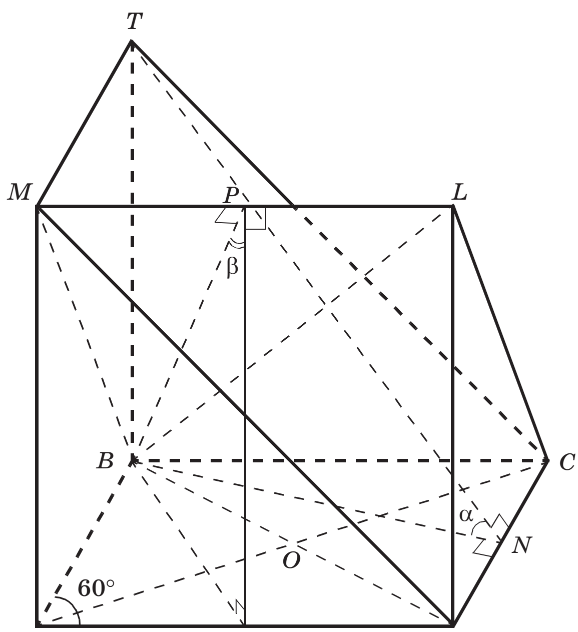


Рис. 68

б) $AM \perp (ABC) \Rightarrow \angle BAD$ — линейный угол двугранного угла $B(AM)D$. Поэтому, если в ромбе $ABCD$ $\angle BAD = 60°$, то $\angle((AMB), (AMD)) = 60°$; если $\angle BAD = 120°$, то тогда $\angle((AMB), (AMD)) = 120°$ (рис. 68).

в) Плоскости MDC и ABC образуют двугранный угол с ребром DC. Пусть N — середина DC, $BT = AM$ и $BT \parallel AM$, тогда $\angle BNT = \alpha$ — линейный угол двугранного угла $B(CD)T$ (см. рис. 68). Находим $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BT}{BN} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

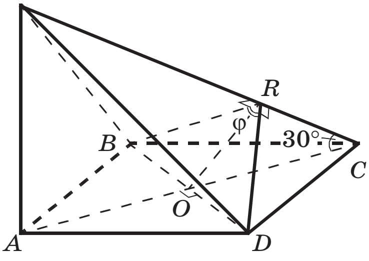
г) Из $AD \parallel BC$ следует, что прямая ML, по которой пересекаются плоскости MAD и MBC, параллельна стороне AD (см. рис. 68), т. е. плоскости MAD и MBC образуют двугранный угол $A(ML)B$.

Так как $BD = DL = AB = a$, то $BM = BL = a\sqrt{2}$. Значит, $\triangle MBL$ — равнобедренный. Если P и H — середины ML и AD, то $\angle BPH = \beta$ — линейный угол двугранного угла $A(ML)B$.

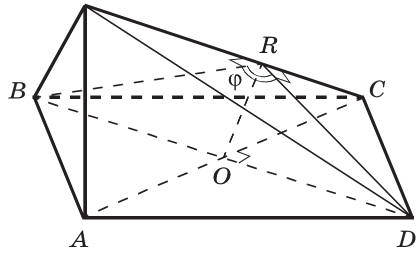
Из $AM \parallel PH$, $AM \perp (ABC)$ следует, что $\triangle BHP$ — прямоугольный, в котором $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $PH = a$. Тогда $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

д) Плоскости MBC и MDC образуют двугранный угол $B(MC)D$ с ребром MC (рис. 69, *а*, *б*). Так как диагонали ромба $ABCD$ взаимно перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам, кроме того, $(AMC) \perp (ABC)$, то плоскость AMC делит двугранный угол $B(MC)D$ пополам.

Пусть $OR \perp MC$, тогда из $CM \perp BD$, $CM \perp OR$ получаем $CM \perp (BRD) \Rightarrow \angle BRD = \varphi$ — линейный угол двугранного угла $B(MC)D$. Найдём угол φ.



а)



б)

Рис. 69

Если $\angle BAD = 60°$ (см. рис. 69, *а*), то $BD = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Так как в прямоугольном $\triangle ACM$ $MC = \sqrt{AM^2 + AC^2} = 2a = 2AM$, то $\angle ACM = 30°$. Значит, $OR = \frac{1}{2}OC = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Тогда в прямоугольном $\triangle ORD$, в котором $\angle ORD = \frac{\varphi}{2}$, находим

$$RD = \sqrt{OR^2 + OD^2} = \sqrt{\frac{3}{16}a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{4},\ \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{OD}{RD} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{7}}{4}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{7}}{7},\text{ откуда } \varphi = 2\arcsin\frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

Если $\angle BAD = 120°$ (см. рис. 69, *б*), то $BD = a\sqrt{3}$, $AC = a$. Значит, $\triangle ACM$ — равнобедренный прямоугольный ($\angle ACM = 45°$), $OC = \frac{a}{2}$, $OD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Тогда $OR = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, $RD =$

$$= \sqrt{OR^2 + OD^2} = \sqrt{\frac{1}{8}a^2 + \frac{3}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4},\ \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{OD}{RD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{14}}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{42}}{7},\text{ откуда } \varphi = 2\arcsin\frac{\sqrt{42}}{7}.$$

4.068. Плоскости ABC и ABD образуют угол в 45°. Известно, что $AD = 3$, $AB = 5$, $BC = \sqrt{2}$; $DA \perp AB$, $CB \perp AB$. Найти: а) CD; б) угол между прямой CD и плоскостью ABC.

Решение. а) Пусть $DK \perp (ABC)$, $K \in (ABC)$ (рис. 70). Тогда в прямоугольном $\triangle CDK$ находим $CD = \sqrt{CK^2 + KD^2}$.

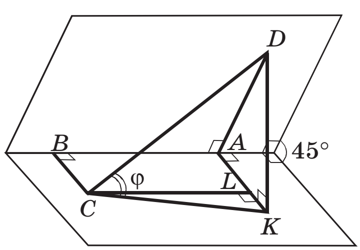


Рис. 70

Так как $AD \perp AB$, то $AK \perp AB$ и в равнобедренном прямоугольном $\triangle ADK$ имеем $DK = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Если L — такая точка отрезка AK, что $AL = BC$, то в прямоугольном $\triangle CLK$ находим $CL = AB = 5$, $LK = AK - AL = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда $CK =$

$= \sqrt{CL^2 + LK^2} = \sqrt{25 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{51}{2}}$. Значит, $CD = \sqrt{CK^2 + DK^2} =$

$= \sqrt{\frac{51}{2} + \frac{9}{2}} = \sqrt{30}$.

б) В прямоугольном треугольнике CDK находим $\angle KCD = \varphi$:

$$\sin\varphi = \frac{DK}{CD} = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{15}}{10},\ \text{откуда}\ \varphi = \arcsin\frac{\sqrt{15}}{10}.$$

4.071. В треугольной пирамиде $MABC$ боковые грани MAC и MBC взаимно перпендикулярны и перпендикулярны основанию пирамиды, которым служит равнобедренный треугольник ACB. Через вершину C проведена плоскость α, перпендикулярная плоскости грани MAB. Найти периметр и площадь фигуры, получившейся при пересечении пирамиды и плоскости α, если $MC = 10$ см, $AB = 20$ см.

Решение. Пусть точка D — середина гипотенузы AB равнобедренного прямоугольного $\triangle ABC$ (рис. 71) с гипотенузой $AB = 20$. Тогда $CD = AD = 10$, при этом $AC = BC = 10\sqrt{2}$ и $\triangle MAB$ является равнобедренным с высотой $MD = 10\sqrt{2}$.

Так как $AB \perp (CDM)$, то $(AMB) \perp (CMD)$, значит, перпендикуляр CH к (AMB) лежит в плоскости CMD, $H \in MD$, а из $CH \perp MD$ следует, что H — середина MD ($\triangle MCD$ — равнобедренный прямоугольный). Это означает, что искомое сечение данной пирамиды плоскостью α представляет собой равнобедренный треугольник CKP с основанием PK ($PK \parallel AB$ и $PK = 0{,}5AB = 10$) и высотой $CH = 0{,}5MD = 5\sqrt{2}$. Поэтому $S_{\triangle CKP} = \frac{1}{2} PK \cdot CH = 25\sqrt{2}$ (см²).

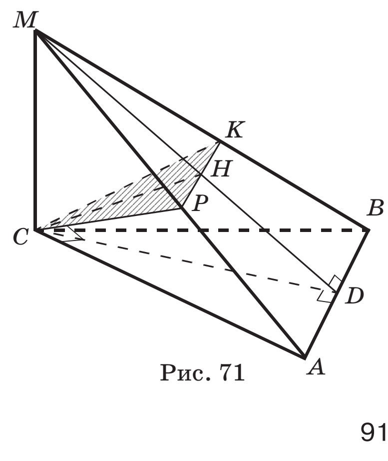


Рис. 71

В прямоугольном $\triangle CPH$ находим $CP = \sqrt{CH^2 + PH^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + 5^2} = 5\sqrt{3}$. Тогда периметр треугольника CPK равен $PK + 2CP = 10 + 2 \cdot 5\sqrt{3} = 10 \cdot (\sqrt{3} + 1)$ (см).

§ 16. Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых

Вопрос об общем перпендикуляре двух скрещивающихся прямых и о расстоянии между ними относится к одному из наиболее сложных в изучении взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве. А так как с нахождением расстояния между двумя скрещивающимися прямыми связано решение многих задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений площадей и объёмов геометрических фигур, то этот вопрос заслуживает подробного изложения учителем.

Учащимся следует пояснить, что для нахождения расстояния между двумя скрещивающимися прямыми вовсе не обязательно строить их общий перпендикуляр (что часто не так просто сделать), а можно поступить иначе.

Если a и b — данные скрещивающиеся прямые, то бывает достаточно применить один из трёх следующих методов.

а) Провести (или увидеть уже построенные) через прямые a и b параллельные плоскости. Тогда расстояние от любой точки одной из этих плоскостей до другой плоскости равно расстоянию между a и b.

б) Провести (или увидеть уже проведённую), например, через прямую a плоскость α, параллельную прямой b. Тогда расстояние от любой точки прямой b до плоскости α равно расстоянию между a и b.

в) Провести плоскость α, перпендикулярную прямой a и пересекающую её в некоторой точке A; затем построить прямую b_1 — ортогональную проекцию прямой b на эту плоскость. Тогда расстояние от точки A до прямой b_1 равно расстоянию между a и b.

Для успешного решения задач, в которых требуется найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми, учащиеся должны уметь применять все перечисленные три метода. Целесообразно предложить учащимся решать одну и ту же задачу различными методами.

Применение этих методов показано в приведённых ниже решениях задач данного параграфа и задач к этой главе.

При изучении § 16 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

- понимать и объяснять, что расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые;

• понимать и объяснять, что для нахождения расстояния между двумя скрещивающимися прямыми вовсе не обязательно строить их общий перпендикуляр, а можно поступить иначе, а именно если a и b — данные скрещивающиеся прямые, то бывает достаточно применить один из трёх следующих методов:

— проводить (или увидеть уже построенные) через прямые a и b параллельные плоскости; тогда объяснять, что расстояние от любой точки одной из этих плоскостей до другой плоскости равно расстоянию между прямыми a и b;

— проводить (или увидеть уже проведённую), например, через прямую a плоскость α, параллельную прямой b; тогда объяснять, что расстояние от любой точки прямой b до плоскости α равно расстоянию между прямыми a и b;

— провести плоскость α, перпендикулярную прямой a и пересекающую её в некоторой точке A; затем построить прямую b_1 — ортогональную проекцию прямой b на эту плоскость; тогда объяснять, что расстояние от точки A до прямой b_1 равно расстоянию между прямыми a и b;

• доказывать теорему о единственности общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых;

• доказывать, что расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно: расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые; расстоянию от любой точки одной из прямых до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой; расстоянию от точки пересечения плоскости, перпендикулярной одной из данных прямых, до ортогональной проекции на эту плоскость второй прямой;

• решать задачи на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми, используя изображения правильного тетраэдра, куба, прямоугольного параллелепипеда; целесообразно предлагать учащимся решать одну и ту же задачу различными методами;

• сопровождать рассуждения при решении задач корректными аргументациями.

4.077. Плоскости квадрата $ABEF$ и ромба $ABCD$ перпендикулярны; $CD = 6$, $\angle C = 60°$. Найти расстояние между прямыми: а) EF и CD; б) AF и BC.

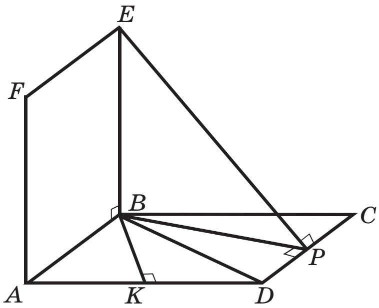


Рис. 72

Решение. а) Пусть P — середина CD правильного $\triangle BCD$ (рис. 72). Тогда $BP \perp CD \Rightarrow$ $\Rightarrow EP \perp CD$. Так как $EF \parallel CD$, то $EP \perp EF$, значит, EP — общий перпендикуляр параллельных прямых EF и CD, поэтому $\rho(EF; CD) = PE$. Находим:

$$BP = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3};$$

$$PE = \sqrt{BE^2 + BP^2} =$$

$$= \sqrt{6^2 + (3\sqrt{3})^2} = 3\sqrt{7}.$$

б) Пусть BK — медиана правильного $\triangle ABD$ (см. рис. 72). Тогда $BK \perp AD$. А так как $AF \perp (ABC)$, то $BK \perp AF$, следовательно, $BK \perp (ADF)$. Получаем:

$$BC \parallel (AFD),\ AF \subset (AFD) \Rightarrow \rho(BC; AF) =$$

$$= \rho(BC; (AFD)) = \rho(B; (AFD)) = BK = 3\sqrt{3}.$$

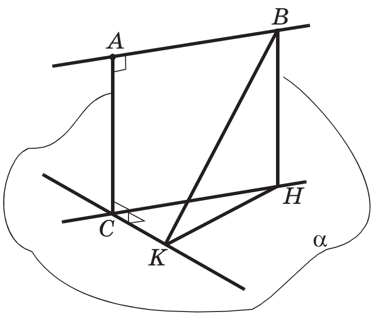


Рис. 73

4.079. На двух скрещивающихся прямых AB и CK выбраны точки A и C так, что угол BAC равен углу ACK и равен $90°$; $AB = KC = 6$. Найти BK, если расстояние между прямыми AB и CK равно 3 и AB перпендикулярна CK.

Решение. Из условия задачи следует, что AC — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AB и CK (рис. 73), т. е. $\rho(AB; CK) = AC = 3$.

Проведём $CH \parallel AB$. Тогда $AC \perp (CKH)$. Если $CH = AB$, то $BH \perp (CKH)$ и $BH = AC = 3$. В равнобедренном прямоугольном $\triangle CKH$ находим $KH = 6\sqrt{2}$, а в прямоугольном $\triangle BKH$ —

$BK = \sqrt{BH^2 + KH^2} = \sqrt{3^2 + (6\sqrt{2})^2} = 9.$

4.080. Угол между двумя скрещивающимися прямыми AB и CK равен $60°$, а расстояние между ними равно 3. Точки A и C выбраны так, что $\angle BAC = \angle ACK = 90°$; $AB = 4$; $KC = 2$. Найти BK.

Решение. Из условия задачи следует, что AC — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AB и CK (рис. 74), т. е. $\rho(AB; CK) = AC = 3$.

Проведём $CH \parallel AB$. Тогда $AC \perp (CKH)$. Если $CH = AB$, то $BH \perp (CKH)$ и $BH = AC = 3$.

Если $\angle KCH = 60°$, то в $\triangle CKH$ имеем $KH^2 = CH^2 + CK^2 - 2CH \cdot CK \cdot \cos 60° = 16 + 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 12$; в прямоугольном $\triangle BKH$ находим

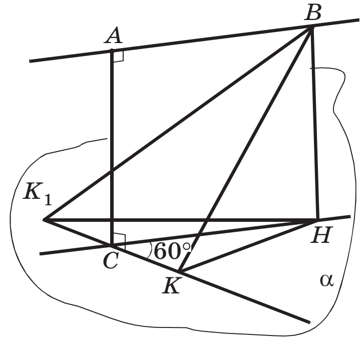


Рис. 74

$$BK = \sqrt{BH^2 + KH^2} = \sqrt{9 + 12} = \sqrt{21}.$$

Если $\angle K_1CH = 120°$, то в $\triangle CK_1H$ имеем $K_1H^2 = CH^2 + K_1C^2 - 2CH \cdot K_1C \cdot \cos 120° = 16 + 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 28$; в прямоугольном $\triangle BK_1H$ находим

$$BK_1 = \sqrt{BH^2 + K_1H^2} = \sqrt{9 + 28} = \sqrt{37}.$$

4.084. Из точек A и B на плоскость α опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 и наклонные AP и BT, перпендикулярные прямой A_1B_1. Найти расстояние между прямыми AP и BT, если $A_1P = 0{,}5$, $B_1T = 3{,}5$, а $PT = 5$.

Решение. Возможны два случая.

Случай 1. Проекции A_1P и B_1T расположены в одной полуплоскости плоскости α относительно прямой A_1B_1 (рис. 75, *а*). Так как $A_1P \parallel B_1T$ и $AA_1 \parallel BB_1$, то скрещиваю-

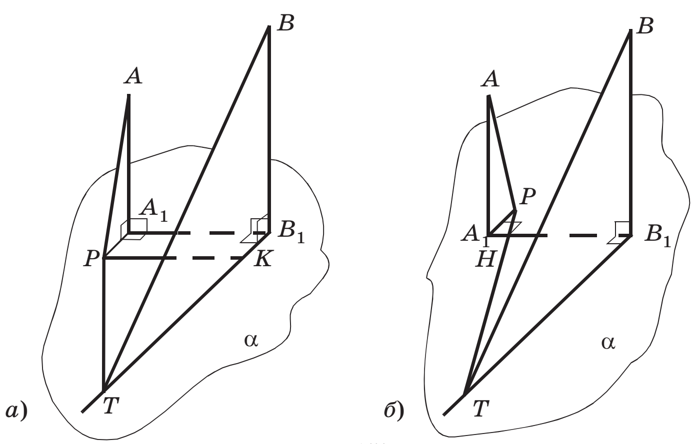


Рис. 75

щиеся прямые AP и BT лежат в параллельных плоскостях соответственно AA_1P и BB_1T. Это означает, что расстояние между AP и BT равно расстоянию между плоскостями AA_1P и BB_1T, т. е. равно длине отрезка A_1B_1.

Найдём длину A_1B_1, для чего проведём отрезок PK, равный и параллельный A_1B_1 ($K \in B_1T$). Тогда в прямоугольном $\triangle TPK$: $TK = B_1T - B_1K = 3{,}5 - 0{,}5 = 3$, $PK = \sqrt{PT^2 - TK^2} = 4$. Так как $PK = A_1B_1$, то расстояние между прямыми AP и BT равно 4.

Случай 2. Проекции A_1P и B_1T расположены в разных полуплоскостях плоскости α относительно прямой A_1B_1 (рис. 75, *б*); $A_1B_1 \cap PT = H$. Тогда $\frac{A_1P}{B_1T} = \frac{PH}{HT} = \frac{A_1H}{B_1H} = \frac{1}{7}$, откуда $HT = 7PH$, $B_1H = 7A_1H$. Учитывая, что $PT = PH + TH = 8PH = 5$, получаем: $PH = \frac{5}{8}$, $TH = \frac{35}{8}$. В прямоугольном треугольнике A_1HP получаем: $A_1H = \sqrt{PH^2 - A_1P^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{8}$, тогда $B_1H = 7A_1H = \frac{21}{8}$. Значит, $A_1B_1 = \frac{21}{8} + \frac{3}{8} = 3$. Таким образом, в этом случае расстояние между прямыми AP и BT равно 3.

4.087. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Точка K — середина ребра B_1C_1. Заполнить таблицу.

№	**Прямые**		**Расстояние между прямыми**
1	AA_1	DC	
2	BB_1	DC_1	
3	DC	A_1K	
4	DD_1	A_1K	
5	B_1D	AC	
6	AK	BC	
7	B_1C	C_1D	
8	AK	BD	
9	DK	AC_1	

Решение. 1) Ребро AD является общим перпендикуляром прямых AA_1 и CD, поэтому $\rho(AA_1; CD) = AD = a$ (рис. 76).

2) $BB_1 \parallel (C_1CD)$, $DC_1 \subset (C_1CD)$; $\rho(B; (C_1CD)) = BC = a \Rightarrow$ $\Rightarrow \rho(BB_1; DC_1) = BC = a$ (см. рис. 76).

3) Скрещивающиеся прямые CD и A_1K лежат в параллельных плоскостях ABC и $A_1B_1C_1$, расстояние между которыми равно a, поэтому $\rho(A_1K; CD) = AA_1 = a$ (см. рис. 76).

4) Проведём через прямую A_1K плоскость AA_1K (см. рис. 76), которая параллельна DD_1. Тогда расстояние $\rho(DD_1;\ A_1K) = \rho(DD_1;\ (AA_1K)) = \rho(D;\ (AA_1K))$. Если $(AA_1K) \cap BC = F$ (F — середина BC) и P — середина AB, то $DP \perp (AFK)$ и $DL = \frac{4}{5}DP$. Так как $DP = \sqrt{AP^2 + AD^2} =$ $= \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, то $DL = \frac{4}{5} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$. Это означает, что

$\rho(DD_1; A_1K) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

5) С помощью теоремы о трёх перпендикулярах доказывается, что $B_1D \perp (ACD_1)$ (см. рис. 76), значит, $B_1D \perp OD_1$ ($O = AC \cap BD$), при этом $M = B_1D \cap (ACD_1) = B_1D \cap OD_1$. Так как в правильном треугольнике ACD_1 справедливо $OD_1 \perp AC$, то отрезок OM — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых B_1D и AC. Учитывая, что $OM =$

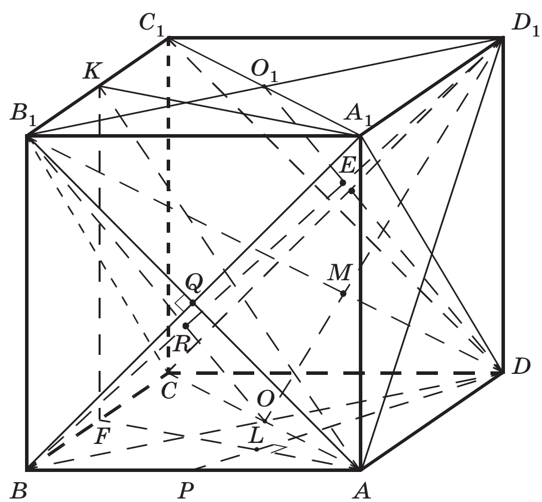


Рис. 76

$= \frac{1}{3} OD_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$, приходим к выводу: $\rho(AC;\ B_1D) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

6) Прямая AK лежит в плоскости AB_1C_1, которая параллельна прямой BC (см. рис. 76). Поэтому $\rho(BC;\ AK) = \rho(BC;\ (AB_1C_1)) = \rho(B;\ (AB_1C_1)) = BQ = \frac{1}{2} BA_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

7) Скрещивающиеся прямые B_1C и C_1D лежат в параллельных плоскостях соответственно AB_1C и A_1C_1D (см. рис. 76), поэтому расстояние между прямыми B_1C и C_1D равно расстоянию между этими плоскостями. Если $BD_1 \cap (A_1C_1D) = E$, $BD_1 \cap (AB_1C) = R$, то $RE = \frac{1}{3} BD_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Доказав, что прямая $BD_1 \perp (A_1C_1D)$, приходим к выводу: $\rho(B_1C;\ C_1D) = \rho((AB_1C);\ (A_1C_1D)) = RE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

8) Прямая AP — ортогональная проекция прямой AK на плоскость ACC_1, которая перпендикулярна прямой BD, при этом $BD \cap (ACC_1) = O = AC \cap BD$ (рис. 77). Это означает, что $\rho(BD;\ AK) = \rho(O;\ AP)$.

Пусть $OH \perp AP$, $H \in AP$. Тогда $\rho(BD;\ AK) = OH$. Найдём OH.

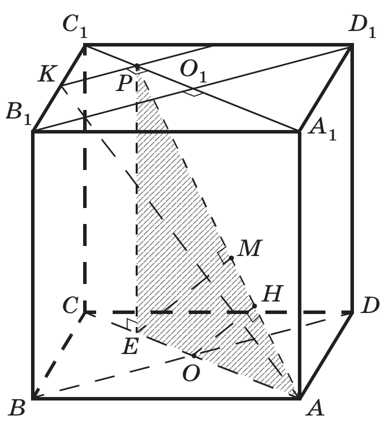


Рис. 77

Так как $OH \perp AP$, то $OH \parallel EM$, где EM — высота прямоугольного $\triangle APE$ ($KP \parallel B_1D_1$, $PE \parallel CC_1$, $E \in AC$). Учитывая, что K — середина B_1C_1 и $KP \parallel B_1D_1$, $PE \parallel CC_1$, заключаем, что E — середина OC, значит, $AE = \frac{3}{4} AC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$. Из соотношения $OA = \frac{2}{3} AE$ получаем $OH = \frac{2}{3} ME$. Так как $\triangle APE$ — прямоугольный, то $ME = \frac{AE \cdot PE}{AP}$.

Находим: $AP = \sqrt{AE^2 + PE^2} = \sqrt{\frac{9}{8}a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{34}}{4}$; $ME =$

$$= \frac{\frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot a}{\frac{a\sqrt{34}}{4}} = \frac{3a\sqrt{17}}{17}.$$ Тогда $OH = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{17}}{17} = \frac{2a\sqrt{17}}{17}$. Таким образом, $\rho(BD; AK) = \frac{2a\sqrt{17}}{17}$.

9) Прямые DK и AC_1 пересекаются, поэтому $\rho(DK; AC_1) = 0$.

4.088. $MABC$ — правильный тетраэдр с ребром 6. Точка O — центр треугольника ABC. K — середина ребра MB. P — середина ребра AC. Заполнить таблицу.

№	Прямые		Расстояние между прямыми
1	AC	MO	
2	BC	AM	
3	OK	PM	
4	MO	KC	
5	BO	AM	

Решение. 1) Так как $BP \perp AC$ и $MO \perp (ABC)$, то OP — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AC и OM (рис. 78). Значит, $\rho(OM; AC) = OP = \frac{1}{3}BP = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

2) Если E и T — середины рёбер соответственно AM и BC, то доказывается, что TE — общий перпендикуляр AM и BC, поэтому $\rho(AM;\ BC) = TE =$

$$= \sqrt{AT^2 - AE^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2} =$$

$= 3\sqrt{2}$.

3) Прямые OK и PM лежат в одной плоскости BMP и пересекаются, поэтому $\rho(PM; OK) = 0$.

4) Проведём $KL \parallel OM$, $L \in BP$. Тогда $(CKL) \parallel OM$, значит, $\rho(OM;\ CK) = \rho(OM;\ (CKL)) =$

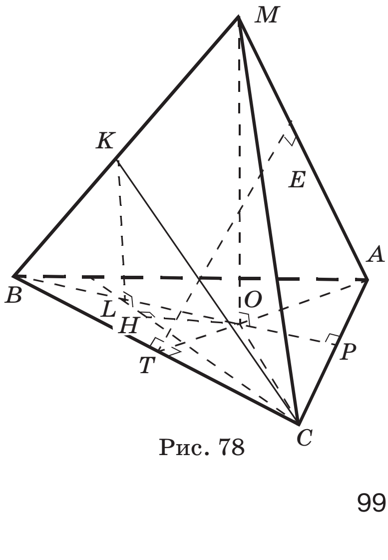


Рис. 78

$= \rho(O;\,CL) = OH$, где $OH \perp CL$, $H \in CL$ (см. рис. 78). Следовательно, $\rho(OM;\,CK)$ равно высоте треугольника COL. Найдём эту высоту по формуле $OH = \dfrac{2S_{\triangle COL}}{CL}$, для этого в $\triangle BCL$ находим:

$$CL = \sqrt{BL^2 + BC^2 - 2BL \cdot BC \cdot \cos 30^\circ} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 6^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{21};$$

$$S_{\triangle OCL} = \frac{1}{2} OL \cdot OC \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда $OH = \dfrac{2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{21}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$. Таким образом, $\rho(OM;\,CK) = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$.

5) Спроектируем прямую OB на плоскость BCE, перпендикулярную AM, для чего проведём $ON \parallel AM$ ($AM \perp TE \Rightarrow ON \perp TE$). Пусть $BN \cap CE = F$ (рис. 79). Тогда BF — проекция BO на (BCE). Если $HE \perp BF$, то $EH = \rho(OB;\,AM)$. Найдём EH.

Так как $TE = 3\sqrt{2}$, то из $OT : AT = 1 : 3$ и $ON \parallel AM$ следует $TN = \dfrac{1}{3} TE = \sqrt{2}$. Тогда в прямоугольном треугольнике BTN находим: $BN = \sqrt{BT^2 + TN^2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{11}$. Обозначив $\angle NBT = \varphi$, получаем

$$\cos\varphi = \frac{BT}{BN} = \frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{11}}{11}.$$

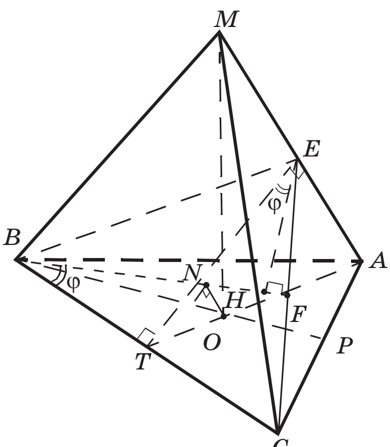


Рис. 79

Так как $BC \perp TE$ и $HE \perp BF$, то $\angle NEH = \angle NBT = \varphi$, и в прямоугольном треугольнике NEH находим $EH = NE \cdot \cos\varphi = 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{3\sqrt{11}}{11} = \dfrac{6\sqrt{22}}{11}$. Таким образом, $\rho(OB;\,AM) = \dfrac{6\sqrt{22}}{11}$.

§ 17. Площадь ортогональной проекции многоугольника

Теорема о площади ортогональной проекции многоугольника находит своё применение при решении задач на нахождение площади сечения и площади основания многогранника, угла при ребре основания пирамиды, угла между плоскостью сечения и плоскостью основания многогранника, угла между плоскостями.

При изучении § 17 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

• понимать и объяснять, что площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна площади проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекций;

• находить с помощью теоремы о площади ортогональной проекции многоугольника: площадь основания многогранника; площадь сечения многогранника; величину двугранного угла при ребре многогранника; величину угла между плоскостями основания и сечения многогранника (в качестве многогранников использовать куб, призму, правильные пирамиды).

4.096. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ проведено сечение через середину ребра MC и вершины A и B. Площадь этого сечения составляет $\frac{8}{9}$ площади основания пирамиды. Определить: а) угол наклона плоскости сечения к плоскости основания пирамиды; б) угол, который образует плоскость сечения с боковым ребром пирамиды; в) угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.

Решение. а) MO — высота данной пирамиды (O — центр основания ABC), точки K и P — середины рёбер соответственно MC и AB (рис. 80), тогда $\angle CPK = \varphi$ — угол наклона плоскости сечения к плоскости основания пирамиды. При этом

$$S_{\triangle ABK} = \frac{8}{9} S_{\triangle ABC} \Rightarrow KP = \frac{8}{9} PC.$$

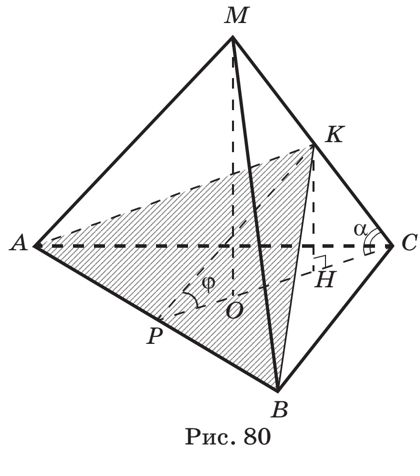


Рис. 80

Если $AB = a$, то $CP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $KP = \frac{8}{9} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4a\sqrt{3}}{9}$. Так как K является серединой MC и $KH \parallel OM$, то $HC = OH = OP = = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, значит, $PH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Тогда $\cos\varphi = \frac{PH}{PK} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{4a\sqrt{3}}{9}} = \frac{3}{4}$, откуда $\varphi = \arccos\frac{3}{4}$.

в) $\angle MCP = \alpha$ — угол наклона бокового ребра к плоскости основания пирамиды. В $\triangle CKH$ находим $\operatorname{tg}\alpha = \frac{KH}{CH} = \frac{PK \cdot \sin\varphi}{CH} = \frac{\frac{4a\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{7}}{3}$.

4.097. В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ через ребро AB и середину ребра MC проведено сечение, площадь которого в 1,125 раза больше площади основания. Найти величину угла между плоскостью сечения и плоскостью основания, а также угол при ребре основания данной пирамиды.

Решение. Пусть $AB = a$, точки H, F и K — середины отрезков соответственно AB, CD и MC (рис. 81). Сечение $ABKE$ — равнобедренная трапеция с основаниями $AB = a$ и

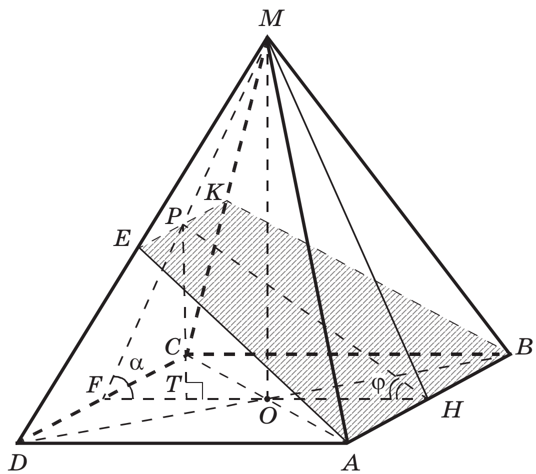


Рис. 81

$KE = 0{,}5AB = \frac{a}{2}$. Тогда $S_{ABKE} = \frac{AB + KE}{2} \cdot PH = \frac{a + \frac{a}{2}}{2} \cdot PH =$
$= \frac{3a}{4} \cdot PH$ (P — середина KE).

Имеем: $S_{ABKE} = \frac{9}{8} S_{ABCD} \Rightarrow \frac{3a}{4} \cdot PH = \frac{9}{8} a^2 \Rightarrow PH = \frac{3}{2} a.$

Так как P — середина MF и $PT \parallel OM$, то $HT = \frac{3}{4} a$, $FT = \frac{a}{4}$, при этом $\angle PHT = \varphi$ — линейный угол двугранного угла, образованного секущей плоскостью и плоскостью основания пирамиды, $\angle PFT = \alpha$ — линейный угол двугранного угла при ребре основания пирамиды.

В прямоугольном $\triangle PHT$ находим:

$$\cos\varphi = \frac{HT}{HP} = \frac{\frac{3}{4}a}{\frac{3}{2}a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

В прямоугольном $\triangle PFT$ находим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{PT}{FP} = \frac{PH \cdot \sin 60^\circ}{FP} = \frac{\frac{3}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{4}} = 3\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}(3\sqrt{3}).$$

4.098. К плоскости треугольника ABC по одну сторону от неё проведены перпендикуляры AK и BM. Найти угол между плоскостями ABC и CKM, если $AB = AC = BC = AK = 0{,}5BM$.

Решение. Пусть $P = MK \cap AB = MK \cap (ABC)$ (рис. 82). Вследствие $AK \parallel BM$ и $BM = 2AK$ заключаем, что $AP = AB = AC$. Это означает, что $\triangle APC$ — равнобедренный. А так как $\angle CAP = 120^\circ$, то $\angle ACP = 30^\circ$. Значит, $\angle BCP = 90^\circ$. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $MC \perp CP$, поэтому $\angle BCM = \varphi$ — линейный угол двугранного угла $M(CP)B$.

Найдём угол φ. Пусть $AB = a$. Тогда $BM = 2a$, $MC = a\sqrt{5}$, значит, $\cos\varphi = \frac{BC}{MC} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, откуда $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$.

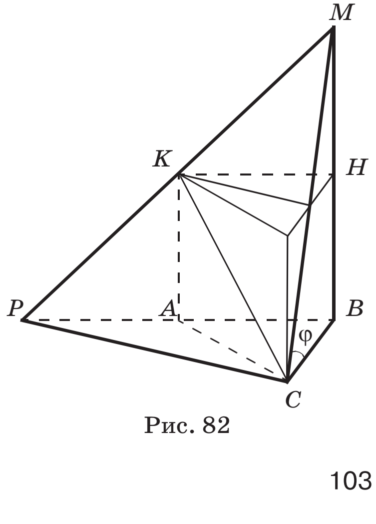


Рис. 82

4.105. В правильной треугольной призме, каждое ребро которой равно 9 дм, построить сечение, проходящее через сторону основания и середину отрезка, соединяющего центры оснований призмы. Найти: а) угол между плоскостью сечения и плоскостью основания призмы; б) площадь сечения.

Решение. Пусть OO_1 — отрезок, соединяющий центры ABC и $A_1B_1C_1$ оснований данной призмы $ABCA_1B_1C_1$, K и K_1 — середины BC и B_1C_1 (рис. 83). Пересечением плоскости BCE с гранью $A_1B_1C_1$ является отрезок MH, который параллелен отрезку B_1C_1 и $B_1C_1 = 3MH$, откуда следует, что $S_{\triangle A_1MH} =$ $= \dfrac{1}{9} S_{\triangle A_1B_1C_1}$, значит, $S_{B_1MHC_1} = \dfrac{8}{9} S_{\triangle A_1B_1C_1} = \dfrac{8}{9} \cdot \dfrac{81\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}$.

Так как $A_1K_1 \perp B_1C_1$, $B_1C_1 \parallel MH$, то $A_1K_1 \perp MH$, значит, $KL \perp MH$ (где $L = MH \cap A_1K_1$). Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $KL \perp BC$, поэтому $\angle AKL = \varphi$ — линейный угол двугранного угла между секущей плоскостью и плоскостью основания призмы. Это означает, что $S_{BMHC} = \dfrac{S_{B_1MHC_1}}{\cos\varphi}$.

Найдём угол φ.

Так как $OK = \dfrac{1}{3} AK = \dfrac{9\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $OE = 4{,}5$, то $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{OE}{OK} =$ $= \dfrac{4{,}5}{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$, значит, $\varphi = 60°$.

Тогда $S_{\text{сеч}} = S_{BMHC} = \dfrac{18\sqrt{3}}{\cos\ 60°} = \dfrac{18\sqrt{3}}{\dfrac{1}{2}} = 36\sqrt{3}$.

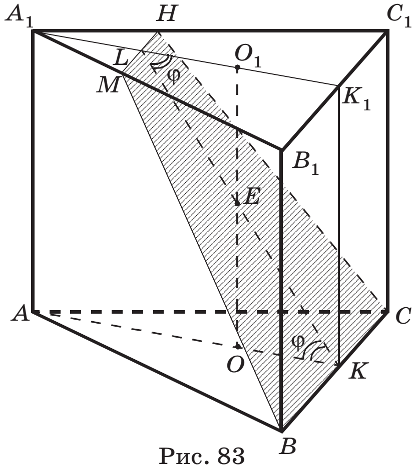


Рис. 83

Задачи к главе 4

Задачи к этой главе имеют многоуровневый характер, поэтому каждый учащийся может самостоятельно или по рекомендации учителя выбрать для решения интересную задачу. Очень важно качество выполнения учащимися рисунков к задачам, в которых требуется найти расстояния от точки до прямой или до плоскости, углы между прямыми, между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями. Ученики должны привыкнуть правильно аргументировать выполняемые ими рисунки. Вместе с тем некоторые задачи, например **4.113, 4.115,** можно решать без помощи рисунка.

4.116. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a найти расстояние от центра грани CDD_1C_1 до плоскости AB_1C.

Решение. Пусть точка M — центр грани CDD_1C_1 (рис. 84). Так как прямая D_1C пересекает плоскость AB_1C в точке C и $MC = \frac{1}{2} D_1C$, то $\rho(M; (AB_1C)) = \frac{1}{2}\rho(D_1; (AB_1C))$. Найдём расстояние $\rho(D_1; (AB_1C))$.

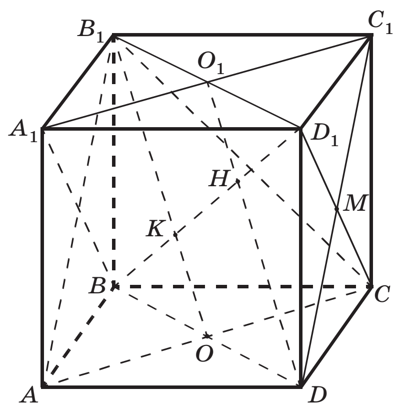


Рис. 84

Так как прямые BA_1 и BD, являющиеся проекциями BD_1 на плоскости соответственно A_1AB и ABC, перпендикулярны соответственно AB_1 и AC, то по теореме о трёх перпендикулярах $BD_1 \perp AB_1$ и $BD_1 \perp AC$, значит, $BD_1 \perp (AB_1C)$. Кроме того, прямые B_1O и O_1D делят отрезок $BD_1 = a\sqrt{3}$ на три равные части, то $\rho(D_1; (AB_1C)) = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$, поэтому $\rho(M; AB_1C)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

4.117. В параллельных плоскостях β и β_1, расстояние между которыми b, лежат два равных квадрата $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ со стороной a, причём $AB \parallel A_1B_1$, AA_1 перпендикулярна плоскости β, прямые BB_1 и DD_1 не перпендикулярны β; точка K — середина стороны CD. а) Построить прямую пересечения плоскости β_1 и плоскости, проходящей через точку B_1 перпендикулярно прямой AK. б) Доказать, что прямая BD перпендикулярна плоскости AA_1C_1. в) Найти расстояния от точки K до плоскостей AA_1B и AA_1C_1. г) Найти расстояние между прямой BD и плоскостью B_1D_1K.

Решение. а) Пусть H_1 и K_1 — середины A_1D_1 и A_1B_1 соответственно, тогда $C_1K_1 \parallel AK$ и $H_1B_1 \perp C_1K_1$ (рис. 85), а плоскость, проходящая через B_1H_1 параллельно AA_1, является искомой.

в) $CD \parallel (AA_1B)$, $K \in CD \Rightarrow \rho(K; (AA_1B)) = a$; $KH \parallel BD$, $BD \perp (AA_1C) \Rightarrow \rho(K; (AA_1C)) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

г) $BD \parallel (KB_1D_1)$, $O \in BD \Rightarrow \rho(BD; (KB_1D_1)) = \rho(O; (KB_1D_1))$ (см. рис. 85). Найдём $\rho(O; (KB_1D_1))$.

Так как $KH \perp (AA_1C)$, то $(KB_1D_1) \perp (AA_1C)$, поэтому перпендикуляр OT из O на (KB_1D_1) расположен в (AA_1C), при этом его основание T принадлежит прямой O_1E, по которой пересекаются эти плоскости.

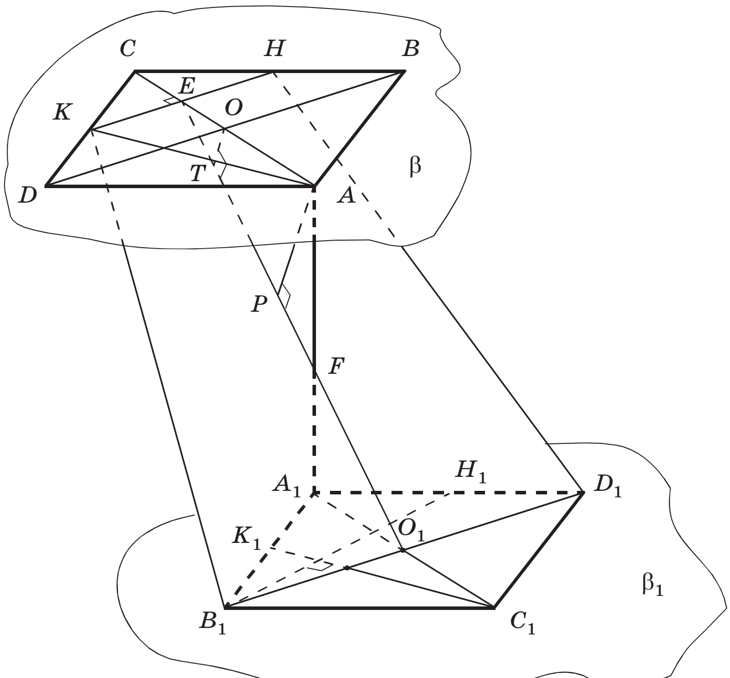


Рис. 85

Пусть AP — высота прямоугольного $\triangle AFE$. Тогда из $OE = \dfrac{1}{3}AE$ следует $OT = \dfrac{1}{3}AP = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{AE \cdot AF}{EF}$. Находим EF.

Из подобия треугольников AFE и A_1O_1F получаем: $AF : FA_1 = AE : A_1O_1 = 3 : 2 \Rightarrow AF = \dfrac{3}{5}AA_1 = \dfrac{3}{5}b$. Тогда $EF = \sqrt{AF^2 + AE^2} = \sqrt{\dfrac{9}{25}b^2 + \dfrac{9}{8}a^2} = \dfrac{3}{10}\sqrt{\dfrac{25a^2 + 8b^2}{2}}$. Теперь

$$OT = \frac{1}{3} \cdot \frac{AE \cdot AF}{EF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{3}{4}a\sqrt{2} \cdot \frac{3}{5}b}{\frac{3}{10}\sqrt{\frac{25a^2 + 8b^2}{2}}} = \frac{ab}{\sqrt{25a^2 + 8b^2}}.$$

Таким образом, $\rho(BD; (KB_1D_1)) = \dfrac{ab}{\sqrt{25a^2 + 8b^2}}$.

4.119. Основанием параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб со стороной a и острым углом A, равным α. Известно, что вершина A_1 удалена на расстояние a от точек A, B и D. Доказать, что основание перпендикуляра, проведённого из точки A_1 на плоскость ABC, принадлежит прямой AC. Найти длину этого перпендикуляра.

Решение. Так как $AA_1 = A_1B = A_1D$, то основание M перпендикуляра A_1M из A_1 на (ABC) совпадает с центром окружности, описанной около $\triangle ABD$. Значит, M принадлежит серединному перпендикуляру отрезка BD, т. е. биссектрисе AC угла BAD ромба $ABCD$ (рис. 86). Найдём A_1M.

Пусть K — середина AB, тогда $MK \perp AB$ и $AK = \dfrac{a}{2}$,

$$AM = \frac{AK}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$ Тогда

$$A_1M = \sqrt{A_1A^2 - AM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2\cos\alpha + 1}.$$

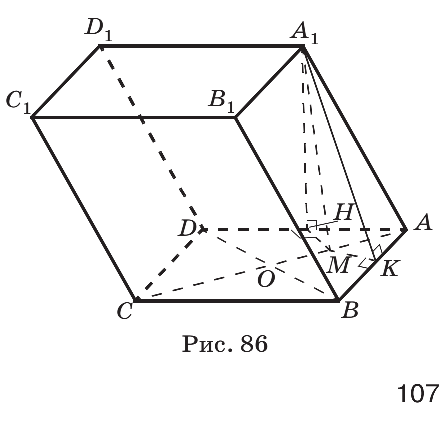


Рис. 86

4.120. Расстояние между скрещивающимися диагоналями двух смежных граней куба равно m. Найти ребро этого куба.

Решение. Диагональ AC_1 перпендикулярна параллельным плоскостям A_1BD и B_1CD_1, в которых лежат скрещивающиеся прямые A_1B и B_1C (рис. 87). Расстояние между этими плоскостями равно $\frac{1}{3}AC_1 = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$, где a — длина ребра куба (см. **4.087**, **4.116**). Значит, $\rho(A_1B;\ B_1C) = \rho((A_1BD);\ (B_1CD_1))$. Тогда, используя условие $m = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$, находим ребро куба $a = m\sqrt{3}$.

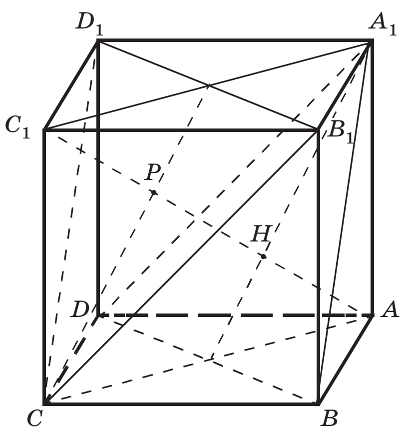


Рис. 87

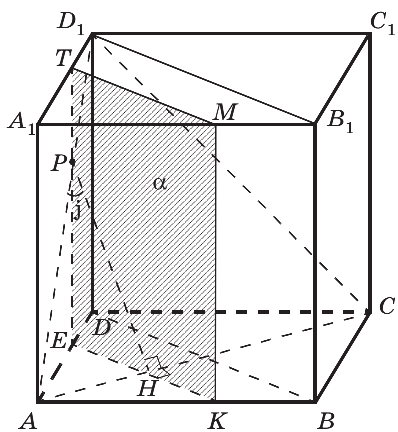


Рис. 88

4.121. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через любую точку K ребра AB куба проведена плоскость α, параллельная плоскости BDD_1. Найти угол между прямой AD_1 и плоскостью α.

Решение. Так как $\alpha \parallel (BB_1D_1)$, то в сечении получается прямоугольник $TMKE$, стороны которого параллельны AA_1 и BD (рис. 88).

Пусть $P = TE \cap AD_1$, $H = AC \cap KE$. Убедившись, что $AC \perp \alpha$, приходим к выводу: $AC \perp PH$ и $(ACD_1) \perp \alpha$. Это означает, что PH — ортогональная проекция AP на плоскость α. Тогда $\angle APH$ — угол между прямой AD_1 и плоскостью α. Так как $\triangle PAH$ — прямоугольный, а $\triangle ACD_1$ — равносторонний, то $\angle APH = 30°$.

4.122. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Точка K — середина ребра BC. Найти расстояние между прямыми AC и C_1K.

Решение. Пусть $O = AC \cap BD$, $O_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$, $P = C_1K \cap \cap B_1B$, $L = A_1P \cap AB$ (рис. 89). Тогда $KL \parallel AC$, значит, $AC \parallel (A_1C_1K)$.

Поэтому расстояние $\rho(AC; C_1K) = \rho(AC; (A_1C_1K)) = \rho(O; (A_1C_1K)) = OH$, где $OH \perp (A_1C_1K)$, $H \in (A_1C_1K)$.

Так как $A_1C_1 \perp (BDD_1)$, то $(A_1C_1K) \perp (BDD_1)$, значит, перпендикуляр OH из O на (A_1C_1K) расположен в (BDD_1) и $H \in O_1P$. Найдём длину OH.

Отрезок OH является высотой прямоугольного $\triangle OO_1M$, где $M = O_1P \cap KL$. Так как $OM = \dfrac{1}{4}BD = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, то

$$O_1M = \sqrt{OM^2 + O_1O^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + a^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}. \text{ Тогда}$$

$$OH = \frac{OM \cdot OO_1}{O_1M} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot a}{\frac{3a\sqrt{2}}{4}} = \frac{a}{3}.$$

Это означает, что

$$\rho(AC; C_1K) = \frac{a}{3}.$$

Замечание. В том, что $\rho(AC; C_1K) = OH$, можно убедиться, рассуждая иначе.

Прямая AC перпендикулярна плоскости BDD_1 и пересекает её в точке O, а прямая O_1P — проекция прямой C_1K на эту плоскость. Значит, $\rho(AC; C_1K) = \rho(O; O_1P) = OH$.

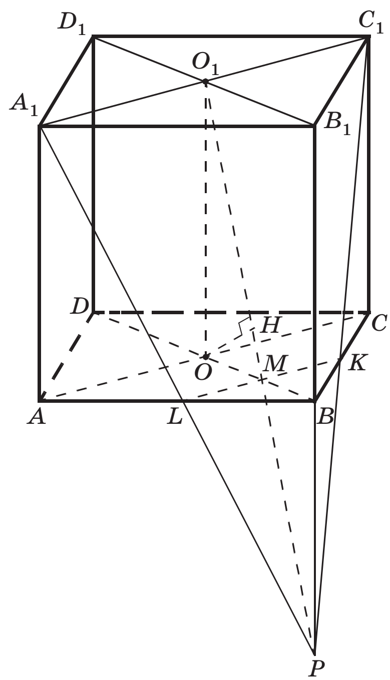


Рис. 89

4.123. В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ высота PO вдвое больше стороны основания $ABCD$. Найти расстояние между прямыми AB и PC, если сторона основания пирамиды равна 17.

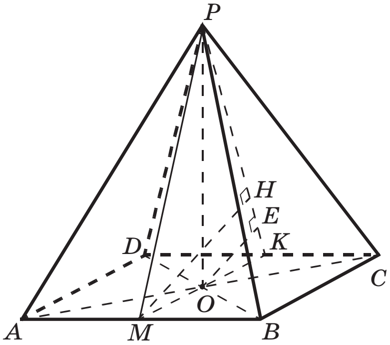


Рис. 90

Решение. Прямые AB и CP скрещиваются. Пусть M и K — середины сторон соответственно AB и CD (рис. 90). Тогда $AB \perp (MPK)$, при этом $AB \cap$ $\cap$ $(MPK) = M$. Кроме того, $CD \perp (MPK)$, $CD \cap (MPK) = K$, поэтому PK — проекция CP на (MPK). Сказанное означает, что $\rho(AB;\ CP) = \rho(M;\ PK) = MH$, где $MH \perp PK$, $H \in PK$. Найдём MH.

Пусть OE — высота прямоугольного $\triangle OPK$. Тогда $OE \parallel MH$, а так как $MK = 2OK$, то $MH = 2OE$. Находим: $OE = \dfrac{2S_{\triangle OPK}}{PK} = \dfrac{OK \cdot OP}{\sqrt{OK^2 + OP^2}} =$

$$= \frac{\frac{17}{2} \cdot 34}{\sqrt{\left(\frac{17}{2}\right)^2 + 34^2}} = 2\sqrt{17}.$$ Тогда $MH = 2 \cdot 2\sqrt{17} = 4\sqrt{17}$. Таким образом, $\rho(AB;\ CP) = 4\sqrt{17}$.

4.124. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма, все рёбра которой равны 1. Найти синус угла между плоскостями: а) ABC и BC_1F; б) FB_1D_1 и ABC; в) A_1BC и AB_1F; г) BC_1D и ABC; д) A_1CE_1 и ABC; е) ABC и BFD_1.

Для решения метрических задач применительно к правильной шестиугольной призме полезно на отдельном (выносном) рисунке изобразить её нижнее (или верхнее) основание — правильный шестиугольник $ABCDEF$ (см. рис. 17 и указание к задаче 2.055).

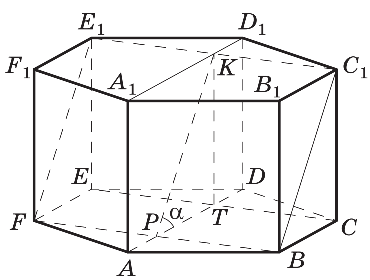


Рис. 91

Решение. Обозначим: $K = C_1E_1 \cap A_1D_1$; $T = CE \cap AD$; $P = AD \cap BF$.

Тогда $KP = (BC_1F) \cap (ADD_1)$, $KT = (ECC_1) \cap (ADD_1)$ (рис. 91).

Имеем: $A_1A \perp (ABC) \Rightarrow$ $\Rightarrow (ADD_1) \perp (ABC)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей); аналогично, $(ECC_1) \perp (ABC)$. Это означает, что $KT \perp (ABC)$, откуда $KT \perp AD$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости).

Далее, $BF \perp AD$; $BF \perp A_1A$ $(A_1A \perp (ABC)) \Rightarrow BF \perp (ADD_1)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости) $\Rightarrow$ $\Rightarrow (ADD_1) \perp (BC_1F)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей). Из сказанного следует, что $\angle KPT$ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BC_1F.

Пусть $\angle KPT = \angle ((ABC), (BC_1F)) = \alpha$. Найдём $\sin \alpha$.

Так как $CE \parallel BF$, $AD \parallel BC$, то $PT = BC = 1$. Учитывая, что $KT = C_1C = 1$, $KP = C_1B = \sqrt{2}$, в прямоугольном $\triangle PKT$ находим: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

в) Обозначим: $\angle ((A_1BC), (AB_1F)) = \beta$; $P = B_1E_1 \cap A_1D_1$; $K = AB_1 \cap A_1B$. Тогда $(A_1BC) \cap (AB_1F) = KP$ — ребро двугранного угла, образованного плоскостями A_1BC и AB_1F (рис. 92). Найдём $\sin \beta$.

Имеем: точка P — середина диагоналей B_1E_1 и A_1D_1, равных 2, поэтому $A_1P = B_1P = 1$.

Аналогично, точка K — середина диагоналей A_1B и AB_1 равных $\sqrt{2}$, поэтому $A_1K = B_1K = 0{,}5\sqrt{2}$. Тогда: $\triangle A_1PK = \triangle B_1PK \Rightarrow A_1T = B_1T$, где A_1T и B_1T — высоты этих треугольников, проведённые к их общей стороне PK. Это означает, что $\angle ((A_1BC), (AB_1F)) = \angle A_1TB_1 = \beta$. Найдём $\sin \beta$.

Замечаем, что отрезок PK — средняя линия $\triangle AB_1E_1$, поэтому $PK = 0{,}5AE_1$.

В прямоугольном $\triangle AE_1E$ с катетами $AE = \sqrt{3}$ и $E_1E = 1$ находим: $AE_1 = \sqrt{AE^2 + E_1E^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$, значит, $PK = 1$.

Если $TK = x$, то $PT = 1 - x$, тогда на основании $A_1K^2 - KT^2 =$

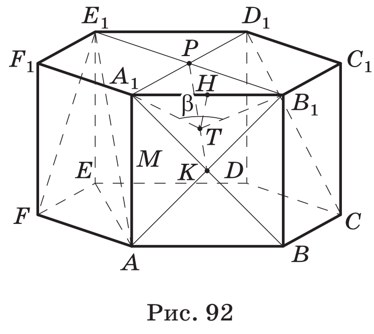


Рис. 92

$= A_1P^2 - PT^2$ получаем: $0{,}5 - x^2 = 1 - (1 - 2x + x^2)$, откуда $x = 0{,}25 = TK$. Значит,

$$A_1T = \sqrt{A_1K^2 - KT^2} = \sqrt{(0{,}5\sqrt{2})^2 - 0{,}25^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Далее, пусть точка H — середина A_1B_1. Тогда в равнобедренном $\triangle A_1B_1T$ находим: $\angle A_1TH = \frac{\beta}{2}$, при этом $\sin\frac{\beta}{2} = \frac{A_1H}{A_1T} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$, $\cos\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Тогда $\sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 2 \cdot \frac{2\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.

Глава 5. Расстояния в пространстве

Нахождение расстояний в пространстве является той важнейшей частью стереометрии, на которой основываются все метрические вопросы пространственной геометрии, в том числе нахождение углов, площадей и объёмов. Иначе говоря, нахождение расстояний в пространстве является завершающим этапом пропедевтики к изучению в 10 классе векторного и координатного методов в пространстве, а в 11 классе — преобразований пространства, многогранников и фигур вращения. Это свидетельствует о большой значимости решения задач на нахождение различных расстояний в пространстве.

§ 18. Расстояние от точки до фигуры

В данном параграфе решаются задачи на нахождение расстояний от точки до плоскости и до прямой.

Для нахождения расстояния от точки A до плоскости α удобно пользоваться следующим фактом: если прямая AB пересекает плоскость α в точке O и известно расстояние $\rho(B; \alpha)$ от точки B до этой плоскости, то $\frac{\rho(A; \alpha)}{\rho(B; \alpha)} = \frac{OA}{OB}$, т. е. $\rho(A; \alpha) = \frac{OA}{OB} \cdot \rho(B; \alpha)$ (см. **5.010, 5.015, 5.017**).

Для нахождения расстояния от точки M, не лежащей в плоскости α, до прямой a, лежащей в этой плоскости, проведём из точки M на плоскость α перпендикуляр MP ($P \in \alpha$);

величина $|MP| = h$ равна расстоянию от точки M до плоскости α.

Если точка P принадлежит прямой a, то расстояние от точки M до прямой a равно $|MP| = h$.

Если точка P не принадлежит прямой a, то из точки P проводим в плоскости α перпендикуляр PK к прямой a, $K \in a$. Тогда расстояние от точки M до прямой a равно длине отрезка $MK = \sqrt{MP^2 + PK^2}$.

Решение учащимися задач данного и следующего параграфов поможет им в выработке навыков осуществлять необходимые в будущем построения на изображениях многогранников. При этом решаются стереометрические задачи вычислительного характера; проводится подготовка к решению содержательных стереометрических задач в 11 классе.

При изучении § 18 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

• понимать и объяснять определение расстояния от точки до прямой и до плоскости;

• понимать и объяснять, что расстоянием от данной точки M до данной прямой a (до плоскости α), не проходящей через точку M, является длина отрезка перпендикуляра MH, опущенного из точки M на прямую a (на плоскость α);

• понимать и объяснять, что расстояние от точки M до сферы с центром O равно длине отрезка MK, где K — точка пересечения луча OM с данной сферой;

• понимать и объяснять, что для нахождения расстояния от точки A до плоскости α удобно пользоваться следующим фактом: если прямая AB пересекает плоскость α в точке O и известно расстояние $\rho(B; \alpha)$ от точки B до этой плоскости, то $\frac{\rho(A, \alpha)}{\rho(B, \alpha)} = \frac{OA}{OB}$, т. е. $\rho(A; \alpha) = \frac{OA}{OB} \cdot \rho(B; \alpha)$;

• формулировать определение расстояния от точки до прямой и до плоскости;

• грамотно выполнять аргументированные рисунки, верно изображая перпендикуляр из точки на прямую или на плоскость;

• находить на изображениях многогранников видеть и аргументированно обосновывать расстояние от точки до прямой и плоскости;

• пользоваться формулой

$$\rho(A; \alpha) = \frac{OA}{OB} \cdot \rho(B; \alpha),\ O = AB \cap \alpha;$$

• решать задачи на нахождение расстояний от точки до прямой (плоскости), корректно аргументировать каждый шаг построения изображения, доказательной и вычислительной частей решения задачи.

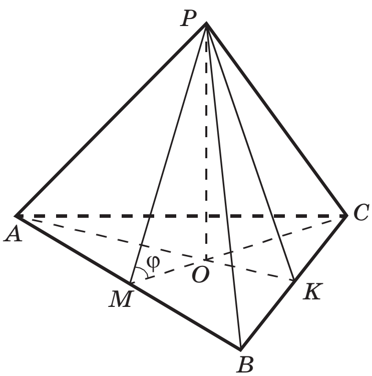


Рис. 93

5.008. Точка P удалена от каждой вершины правильного треугольника ABC на расстояние $\sqrt{21}$, а от каждой его стороны — на расстояние $2\sqrt{3}$. Найти: а) расстояние от точки P до плоскости треугольника; б) площадь данного треугольника; в) угол между плоскостями ABP и ABC.

Решение. Так как точка P равноудалена от всех вершин правильного треугольника ABC и равноудалена от всех его сторон, то основание O перпендикуляра PO (ABC) совпадает с центром треугольника ABC (рис. 93).

а) Пусть K — середина BC. Находим: $CK = \sqrt{CP^2 - PK^2} = \sqrt{(\sqrt{21})^2 - (2\sqrt{3})^2} = 3$, $BC = 2CK = 6$, $OK = \frac{1}{3}AK = \frac{1}{3} \cdot \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Тогда $OP = \sqrt{PK^2 - OK^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3$.

б) $S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$.

в) Если M — середина AB, то угол между плоскостями ABP и ABC равен φ (см. рис. 93), $\cos\varphi = \frac{OM}{MP} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$, откуда $\varphi = 60°$.

5.010. Вершины A и B квадрата $ABCD$ лежат в плоскости α, а вершина C удалена от этой плоскости на 4. Найти расстояние до плоскости α от: а) точки D; б) точки O пересечения диагоналей квадрата; в) точки M — середины DO;

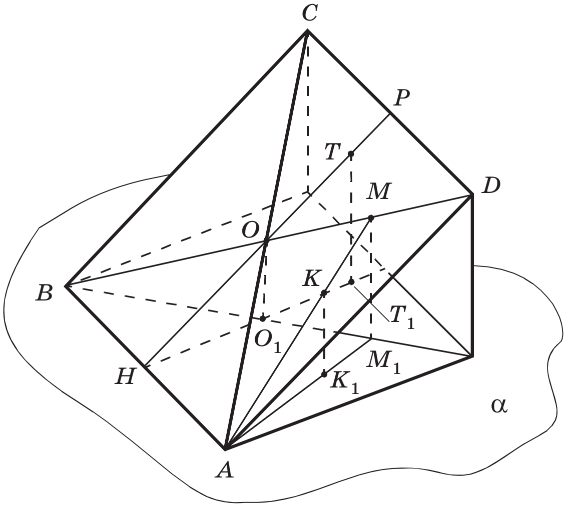


Рис. 94

г) точки K пересечения медиан треугольника ADO; д) точки T пересечения медиан треугольника DOC.

Решение. Имеем (рис. 94):

а) $CD \parallel \alpha \Rightarrow \rho(D;\alpha) = \rho(C;\alpha) = 4$;

б) $OA = \dfrac{1}{2}AC \Rightarrow \rho(O;\alpha) = \dfrac{1}{2}\rho(C;\alpha) = 2$;

в) $MB \cap \alpha = B$, $MB = \dfrac{3}{4}DB \Rightarrow \rho(M;\alpha) = \dfrac{3}{4}\rho(D;\alpha) = 3$;

г) $MA \cap \alpha = A$, $AK = \dfrac{2}{3}AM \Rightarrow \rho(K;\alpha) = \dfrac{2}{3}\rho(M;\alpha) = \dfrac{2}{3}\cdot 3 = 2$;

д) пусть H и P — середины соответственно AB и CD, тогда $TH = \dfrac{5}{6}PH \Rightarrow \rho(T;\alpha) = \dfrac{5}{6}\rho(P;\alpha) = \dfrac{5}{6}\rho(C;\alpha) = \dfrac{5}{6}\cdot 4 = 3\dfrac{1}{3}$.

5.015. Вершина D тетраэдра $ABCD$ удалена от плоскости ABC на 6. На какое расстояние от этой плоскости удалены: а) точка K — середина BD; б) точка M — точка пересечения медиан треугольника ABD; в) точка N пересечения медиан треугольника BCM; г) середина MK; д) точка пересечения медиан треугольника CMK?

Решение. Обозначим $\alpha = (ABC)$; DO — высота тетраэдра $\Rightarrow$ $\Rightarrow \rho(D;\alpha) = DO = 6$ (рис. 95). Тогда:

а) $BK = \dfrac{1}{2}BD \Rightarrow KK_1 = \rho(K;\alpha) = \dfrac{1}{2}\rho(D;\alpha) = 3$;

б) DF — медиана $\triangle ABD$; $MF = \dfrac{1}{3}DF \Rightarrow MM_1 = \rho(M;\ \alpha) =$

$= \dfrac{1}{3}\rho(D;\ \alpha) = 2;$

в) T — середина BC, $NT = \dfrac{1}{3}MT \Rightarrow NN_1 = \rho(N;\ \alpha) =$

$= \dfrac{1}{3}\rho(M;\ \alpha) = \dfrac{2}{3};$

г) E — середина MK; $AE = \dfrac{5}{6}AK \Rightarrow EE_1 = \rho(E;\ \alpha) =$

$= \dfrac{5}{6}\rho(K;\ \alpha) = \dfrac{5}{6} \cdot 3 = 2{,}5;$

д) CE — медиана $\triangle MCK$, P — центроид этого треугольника; $PC = \dfrac{2}{3}EC \Rightarrow PP_1 = \rho(P;\ \alpha) = \dfrac{2}{3}\rho(E;\ \alpha) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{5}{2} = 1\dfrac{2}{3}$.

Замечание. Формально решая рассмотренную задачу, можно не строить перпендикуляры, проведённые из заданных точек на плоскость ABC. Однако в целях выработки необходимых навыков построения на построенных изображениях многогранников желательно, чтобы ученики мотивированно правильно и аккуратно изобразили все перпендикуляры, длины которых равны искомым расстояниям (см. рис. 95).

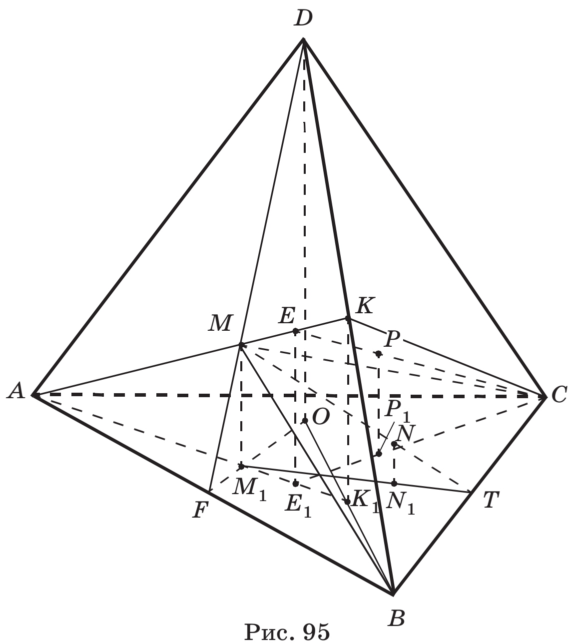


Рис. 95

5.017. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение через вершины A_1, C_1 и B. Расстояние от вершины B_1 до плоскости сечения равно 4. Найти расстояния до плоскости сечения от вершин: A, C, D_1, D.

Решение. Обозначим $\alpha = (A_1BC_1)$, $O_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$ (рис. 96).

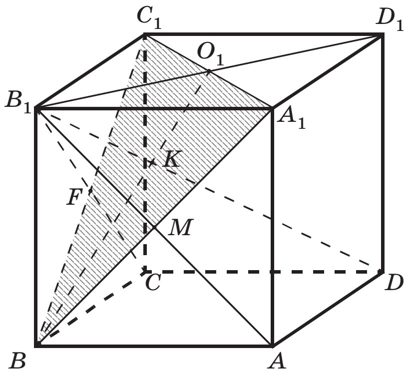


Рис. 96

Если $M = AB_1 \cap \alpha = AB_1 \cap A_1B$, то $AM = B_1M$, значит, $\rho(A; \alpha) = \rho(B_1; \alpha) = 4$.

Если $F = B_1C \cap \alpha = B_1C \cap BC_1$, то $CF = B_1F$, значит, $\rho(C; \alpha) = \rho(B_1; \alpha) = 4$.

$B_1D_1 \cap \alpha = O_1$, где O_1 — середина отрезка B_1D_1, значит, $\rho(D_1; \alpha) = \rho(B_1; \alpha) = 4$.

Если $K = B_1D \cap \alpha = B_1D \cap BO_1$, то $DK = 2B_1K$, значит, $\rho(D; \alpha) = 2\rho(B_1; \alpha) = 8$.

§ 19. Расстояние между фигурами

В данном параграфе решаются задачи на нахождение расстояний между двумя плоскостями, двумя прямыми, прямой и плоскостью. В этой связи учащимся необходимо пояснить следующие утверждения.

Если прямая лежит в плоскости или её пересекает, то расстояние между прямой и плоскостью равно нулю.

Если прямая параллельна плоскости, то расстояние между ними равно длине отрезка перпендикуляра, опущенного из любой точки прямой на данную плоскость.

Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно длине отрезка перпендикуляра, опущенного из любой точки одной из этих плоскостей на другую.

Если две прямые a и b параллельны и лежат в параллельных плоскостях соответственно α и β, расстояние между которыми равно h, то возможны случаи. 1) Перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой a на плоскость β, пересекает прямую b. Тогда расстояние между прямыми a и b равно h. 2) Перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой a на плоскость β, пересекает плоскость β в некоторой точке K, удалённой от прямой b на расстояние m. Тогда расстояние между прямыми a и b равно $\sqrt{h^2 + m^2}$.

О методах нахождения расстояния между двумя скрещивающимися прямыми говорилось в указаниях к решениям задач § 16.

При решении задач на нахождение расстояний учащиеся должны привыкать видеть эти расстояния и изображать отрезки, длины которых равны искомым расстояниям.

При изучении § 19 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

- понимать и объяснять определение расстояния между: двумя параллельными плоскостями; двумя скрещивающимися прямыми;
- понимать и объяснять, что если прямая лежит в плоскости или её пересекает, то расстояние между этими прямой и плоскостью равно нулю;
- понимать и объяснять, что если прямая параллельна плоскости, то расстояние между ними равно длине отрезка перпендикуляра, опущенного из любой точки данной прямой на данную плоскость;
- понимать и объяснять, что расстояние между двумя параллельными плоскостями равно длине отрезка перпендикуляра, опущенного из любой точки одной из этих плоскостей на другую;
- понимать и объяснять, что если две прямые a и b параллельны и лежат в параллельных плоскостях соответственно α и β, расстояние между которыми равно h, то возможны случаи: перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой a на плоскость β, пересекает прямую b, тогда расстояние между прямыми a и b равно h; перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой a на плоскость β, пересекает плоскость β в некоторой точке K, удалённой от прямой b на расстояние m; тогда расстояние между прямыми a и b равно $\sqrt{h^2 + m^2}$;

• понимать и объяснять методы нахождения расстояния между двумя скрещивающимися прямыми, которые рассмотрены в предыдущем разделе;

• формулировать определение расстояния между двумя параллельными плоскостями; между двумя скрещивающимися прямыми;

• видеть и, аргументированно обосновывая, находить на изображениях многогранников расстояние между параллельными плоскостями, между скрещивающимися прямыми тремя ранее указанными способами;

• находить различные расстояния в пространстве, используя многогранники и многоугольники, расположенные в пространстве, корректно аргументировать каждый шаг построения изображения, доказательной и вычислительной частей решения задачи;

• решать стереометрические задачи на нахождение наименьшего (наибольшего) значений площади, объёма геометрической фигуры, величина которых зависит от расстояния между скрещивающимися прямыми этих фигур.

5.028. Плоскости равностороннего треугольника ABC со стороной 6 и равнобедренного треугольника ABK ($AK = BK = 9$) перпендикулярны. Найти расстояние между: а) точкой K и центром O треугольника ABC; б) прямыми AB и CK.

Решение. Пусть точка H — середина AB (рис. 97). Тогда $CH = 3\sqrt{3}$, $OH = \frac{1}{3}CH = \sqrt{3}$, $HK = \sqrt{AK^2 - AH^2} = 6\sqrt{2}$. Тогда:

а) $\rho(O; K) = OK = \sqrt{HK^2 + OH^2} = 5\sqrt{3}$; б) имеем: $KH \perp AB$, $CH \perp AB \Rightarrow AB \perp (HCK) \Rightarrow AB \perp HM$, где HM — высота прямоугольного $\triangle CHK$. Это означает, что MH — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AB и CK, поэтому

$$\rho(AB; CK) = MH = \frac{2S_{\triangle CHK}}{CK} = \frac{CH \cdot KH}{\sqrt{CH^2 + KH^2}} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{2}}{\sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (6\sqrt{2})^2}} = \frac{6\sqrt{66}}{11}.$$

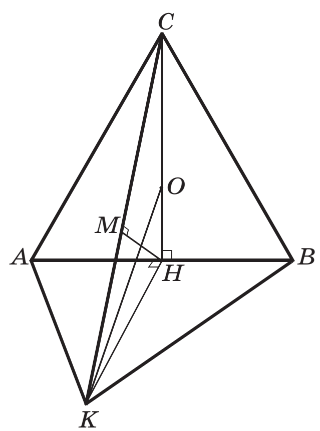


Рис. 97

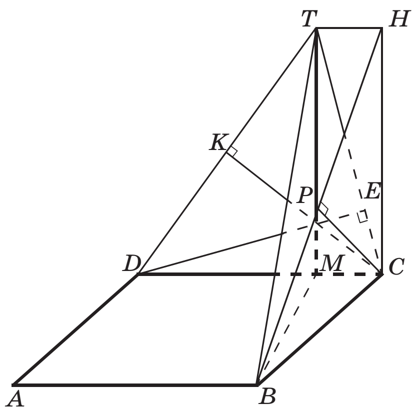


Рис. 98

5.029. $ABCD$ — квадрат со стороной 4. Точка M принадлежит стороне CD и делит её в отношении 3 : 1, считая от D. Прямая TM перпендикулярна плоскости квадрата. $TM = 4$. Найти расстояние между прямыми: а) TD и AB; б) TD и BC; в) TC и AD; г) TB и DC.

Решение. а) Плоскость DCT проходит через прямую MT, перпендикулярную плоскости ABC, поэтому эти плоскости перпендикулярны. Кроме того, $AB \parallel (DCT)$ (рис. 98). А так как $AD \perp (DCT)$, то

$$\rho(AB;\,TD) = \rho(AB;\,(DCT)) = \rho(A;\,(DCT)) = AD = 4.$$

б) $BC \perp (DCT) \Rightarrow BC \perp CK$, где CK — высота $\triangle DCT$. Это означает, что CK — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых DT и BC, поэтому

$$\rho(BC;\,DT) = CK = \frac{2S_{\triangle DCT}}{CK} = \frac{DC \cdot TM}{\sqrt{DM^2 + TM^2}} = \frac{4 \cdot 4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3{,}2.$$

в) Аналогично рассуждая, получим

$$\rho(AD;\,CT) = DE = \frac{2S_{\triangle DCT}}{CK} = \frac{DC \cdot TM}{\sqrt{CM^2 + TM^2}} = \frac{4 \cdot 4}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{16}{\sqrt{17}}.$$

г) Проведя отрезок CH, равный и параллельный MT, получим плоскость ABH, параллельную прямой CD ($TH \parallel CD$), и плоскость BCH, перпендикулярную этой прямой (см. рис. 98). Так как BH — проекция прямой BT на (BCH), то $\rho(DC;\,BT) = \rho(C;\,BH) = CP$, где $CP = 2\sqrt{2}$ (как высота равнобедренного прямоугольного $\triangle BCH$, с катетом, равным 4).

5.031. В правильном тетраэдре $PABC$ с ребром a точки M и K — середины рёбер соответственно BP и CP, точка O — центр основания ABC. Найти расстояние между прямыми: а) MK и OP; б) AP и BC; в) AB и MK.

Решение. Пусть T — середина AP (рис. 99).

а) Тогда $(MTK) \parallel (ABC)$, значит, $OP \perp (MTK)$. Обозначив $F = OP \cap (MTK)$, $E = PH \cap MK$, получаем $EF \parallel OH$. Поэтому из $AH \perp BC$ и $MK \parallel BC$ следует $EF \perp MK$, а из $OP \perp (MTK)$

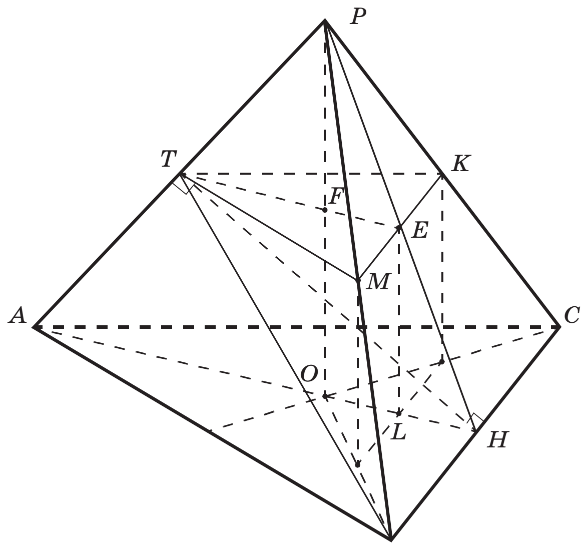


Рис. 99

следует $OP \perp EF$. Это означает, что EF — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых OP и MK, откуда

$$\rho(OP; MK) = EF = \frac{1}{2}OH = \frac{1}{6}AH = \frac{a\sqrt{3}}{12}.$$

б) В равнобедренном $\triangle TBC$ имеем $TH \perp BC$, а в равнобедренном $\triangle APH$ — $TH \perp AP$. Значит, $\rho(AP;\ BC) = TH = \sqrt{AH^2 - AT^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

в) Скрещивающиеся прямые AB и MK лежат в параллельных плоскостях ABC и MTK, расстояние между которыми равно $\frac{1}{2}OP = \frac{1}{2}\sqrt{AP^2 - OA^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Это означает, что $\rho(AB; MK) = \rho((ABC); (MTK)) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

§ 20. Геометрические места точек, связанные с расстояниями в пространстве

Решая задачи на геометрические места точек в стереометрии, учащиеся используют ранее изученный материал о перпендикулярности прямых и плоскостей, а также о нахождении расстояний в пространстве. Кроме того, при решении таких задач у учащихся развивается конструктивное пространственное воображение, а их речь — обоснования решений — приобретает необходимую математическую культуру. К тому же, если учесть, что характеристическое свойство геометрического места точек можно сформулировать не единственным способом, то трудно переоценить роль решения задач такого рода в развитии творческого мышления учащихся.

При изучении § 20 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

- знать и понимать основные геометрические места точек в пространстве;
- понимать и иллюстрировать на изображениях многогранников геометрическое место точек пространства: равноудалённых от концов данного отрезка; равноудалённых от трёх данных неколлинеарных точек; равноудалённых от сторон данного треугольника; равноудалённых от двух параллельных плоскостей; расположенных внутри двугранного угла и равноудалённых от его граней; равноудалённых от двух данных пересекающихся прямых;
- решать содержательные задачи на параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, на нахождение площадей и объёмов фигур, используя основные геометрические места точек в пространстве.

5.033. Даны пересекающиеся плоскости α и β. Найдите множество всех точек пространства, принадлежащих плоскости α и удалённых на расстояние m от плоскости β.

Указание. Множество всех точек пространства, удалённых от данной плоскости на данное расстояние, представляет собой объединение двух плоскостей, параллельных данной плоскости и расположенных в разных полупространствах относительно этой плоскости.

5.034. Даны пересекающиеся плоскости α и β. Найдите множество всех точек пространства, каждая из которых удалена от α и β соответственно на расстояния a и b ($a \neq 0$, $b \neq 0$).

Указание. При пересечении двух плоскостей, параллельных плоскости α и удалённых от неё на расстояние a, с двумя плоскостями, параллельными β и удалёнными от неё на расстояние b, образуются четыре прямые, параллельные прямой пересечения данных плоскостей.

5.036. Даны плоскость α и не принадлежащие ей точки A и B. На плоскости α найдите множество всех точек, равноудалённых от точек A и B.

Указание. Искомое множество точек может представлять собой: а) прямую, по которой плоскость α пересекается с плоскостью серединных перпендикуляров отрезка AB, если прямая AB не перпендикулярна плоскости α; б) плоскость α, если прямая AB перпендикулярна плоскости α и точки A и B равноудалены от этой плоскости; в) пустое множество — во всех остальных случаях.

5.039. Точка M не принадлежит плоскости α, а точка B этой плоскости принадлежит. Что собой представляет множество оснований всех перпендикуляров, проведённых из точки M ко всем прямым плоскости α, проходящим через точку B?

Указание. Достаточно воспользоваться свойством вписанного в окружность угла, опирающегося на её диаметр.

5.040. Точка A удалена от плоскости α на расстояние, равное 4 см. В плоскости α найдите множество всех точек, удалённых от точки A на расстояние, равное 5 см.

Указание. Если M — любая точка искомого множества T точек, B — основание перпендикуляра из A на α, то $BM = 3$. Следовательно, T — окружность радиуса 3 см с центром B.

Задачи к главе 5

Как и в предыдущих главах, задачи к этой главе многоуровневые. Поэтому каждый учащийся может самостоятельно или по рекомендации учителя выбрать для решения задачу «для души». Очень важно качество выполнения учащимися рисунков к задачам: ученики должны выполнять грамотно аргументированные рисунки.

Авторы продолжают придерживаться концепции изучать свойства взаимного расположения прямых и плоскостей в задачах с использованием моделей и изображений куба, правильного тетраэдра, призмы, пирамиды, параллелепипеда, так как решение таких задач эффективно формирует у ученика конструктивные пространственные представления.

Для успешного решения задач на нахождение расстояний целесообразно предлагать учащимся решать одну и ту же задачу различными методами.

5.044. Все вершины куба, кроме двух противоположных A и C_1, лежащих на одной диагонали, одинаково удалены от некоторой плоскости α. Найти расстояние от каждой из этих вершин (исключая A и C_1) до плоскости α, если ребро куба равно 6.

Решение. Пусть M, P, K и H — середины рёбер соответственно A_1D_1, A_1B_1, BC и CD (рис. 100). Тогда точки A_1, B_1, D_1, B, C и D равноудалены от плоскости $\alpha = (MPK)$, которая перпендикулярна диагонали AC_1 куба и проходит через её середину.

Обозначим $E = AC \cap HK$, $E_1 = A_1C_1 \cap MP$. Тогда $CE : AE = A_1E_1 : C_1E_1 = 1 : 3$. Это означает, что $\rho(A_1;\ \alpha) = \rho(C;\ \alpha) = \frac{1}{3}\rho(A;\ \alpha) = \frac{1}{3}\rho(C_1;\ \alpha)$. Так как $\rho(A;\ \alpha) = \frac{1}{2}AC_1 = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$, то $\rho(A_1;\ \alpha) = \rho(B_1;\ \alpha) = \rho(D_1;\ \alpha) = \rho(B;\ \alpha) = \rho(C;\ \alpha) = \rho(D;\ \alpha) = \sqrt{3}$.

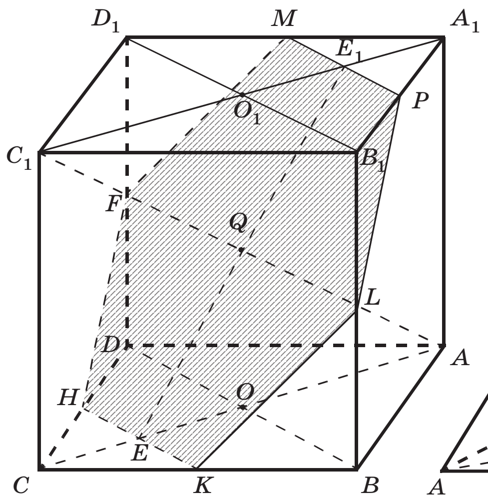


Рис. 100

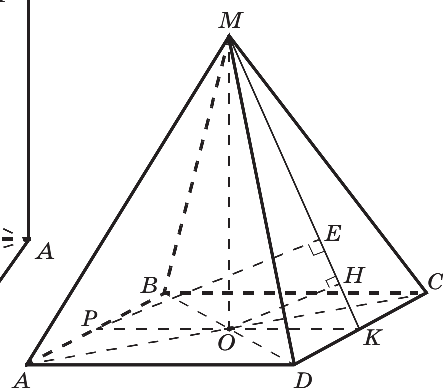


Рис. 101

5.045. $MABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида. Ребро основания пирамиды равно 6, а её высота равна 4. Найти расстояние от вершины A до плоскости MDC.

Решение. Пусть P и K — середины сторон соответственно AB и CD основания пирамиды (рис. 101). Тогда $(MPK) \perp (MDC)$, поэтому перпендикуляры OH и PE из O и P на (MDC) расположены в (MPK) и пересекают MK. Из $PK = 2OK$ следует $\rho(P;\ (MDC)) = 2\rho(O;\ (MDC)) = 2OH$. Так как $OH = \dfrac{OK \cdot OM}{\sqrt{OK^2 + OM^2}} = \dfrac{3 \cdot 4}{5} = 2{,}4$, то $\rho(P;\ (MDC)) = 4{,}8$. Учитывая, что $AB \parallel (MDC)$, заключаем: $\rho(A;\ (MCD)) = 4{,}8$.

Замечание. Можно воспользоваться и тем, что из $AC = 2OC$ и $AC \cap (MDC) = C$ следует $\rho(A; (MDC)) = 2\rho(O; (MDC))$.

5.046. Прямая AB перпендикулярна прямой CP, прямая AP перпендикулярна прямой AB. Прямая AP перпендикулярна прямой CP; $AB = AP = CP = 4$. Найти расстояние между прямыми AP и CB.

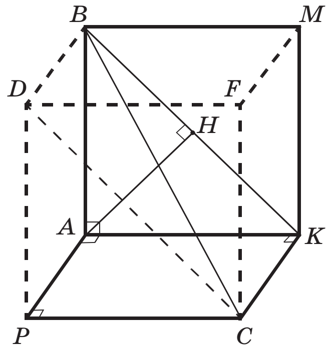


Рис. 102

Решение. Из условия следует, что $AB \perp (APC)$ и $CP \perp (ABP)$ (рис. 102). Проведём через прямую AB плоскость α, перпендикулярную AP и пересекающую плоскость APC по прямой $AK \parallel CP$, при этом $AK = PC$. Отрезок BK — ортогональная проекция отрезка BC на (ABK), при этом $AP \cap (ABK) = A$. Это означает, что $\rho(AP; BC) = \rho(A; BK) = AH = 2\sqrt{2}$ (как медиана равнобедренного прямоугольного треугольника ABK с катетом, равным 4).

Замечание. Если через BC провести плоскость, параллельную AP (на рисунке 102 — это плоскость BCK), то искомое расстояние равно расстоянию между AP и (BCK), которое опять же равно длине AH. Наконец, можно на данных отрезках AB, AP и PC построить куб (на рисунке 102 это «достраивание» показано штриховыми линиями), тогда задача сводится к нахождению расстояния между ребром куба и скрещивающейся с ним его диагональю.

5.062. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник ACM, если точка M лежит на прямой B_1D_1? Найти эту площадь.

Решение. Площадь треугольника ACM будет наименьшей, когда высота этого треугольника, проведённая из M на AC, будет наименьшей. А так как прямые AC и B_1D_1 скрещиваются, то эта высота должна быть общим перпендикуляром прямых AC и B_1D_1, т. е. точка M — есть точка пересечения диагоналей A_1C_1 и B_1D_1. В таком случае высота треугольника равна a, а его площадь — $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

5.063. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник BDT, если точка T лежит на прямой A_1C?

Решение. Обозначим $O = AC \cap BD$. Чтобы площадь треугольника BDT была наименьшей (при постоянном основании BD), наименьшей должна быть высота этого треугольника, проведённая из T на BD. Так как искомая высота, с одной стороны, перпендикулярна BD, с другой стороны, точка T должна лежать на прямой A_1C и быть ближайшей к прямой BD, то искомая высота является общим перпендикуляром скрещивающихся прямых BD и A_1C. Найдём этот перпендикуляр.

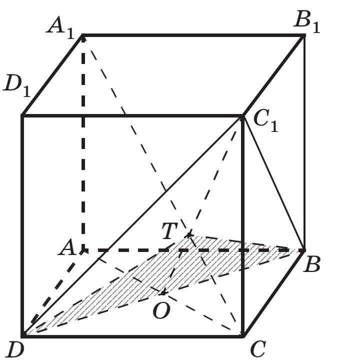


Рис. 103

Пусть $M = A_1C \cap (BDC_1)$. Можно доказать, что $A_1C \perp (BDC_1)$, откуда $A_1C \perp OC_1$, при этом $M = A_1C \cap OC_1$. Учитывая, что в равностороннем $\triangle BDC_1$ имеем $OC_1 \perp BD$, приходим к выводу: OM — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых BD и A_1C, т. е. точка T совпадает с M (рис. 103).

Площадь этого треугольника будет равна

$$\frac{1}{2} BD \cdot OT = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{(a\sqrt{2}) \cdot \sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}.$$

5.064. Ребро правильного тетраэдра $MABC$ равно a. Точка K — середина ребра AC. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник TMK, если точка T лежит на прямой AB?

Решение. Принимая отрезок MK за основание искомого треугольника MTK с наименьшей площадью и вершиной T на AB, приходим к выводу: высота TE ($E \in MK$) треугольника MTK, проведённая из точки $T \in AB$ на MK, является общим перпендикуляром скрещивающихся прямых AB и MK (рис. 104). Найдём TE.

Через OB проведём плоскость α, перпендикулярную MK (плоскость α пересекает (AMC) по прямой OP, проходящей через O параллельно AC) и спроектируем на α прямую AB (для этого через A проведём прямую AP, параллельную MK). Получаем: BP — проекция прямой AB на плоскость α; так как $MK \cap \alpha = O$, то $\rho(MK; AB) = \rho(O; BP) = OH$, где OH — высота $\triangle BOP$.

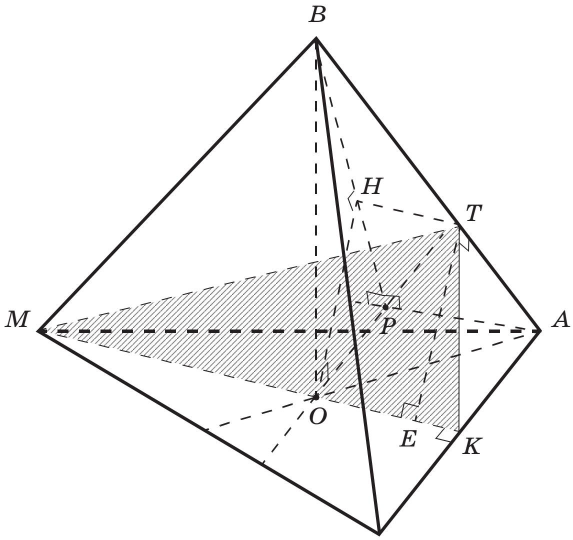


Рис. 104

В прямоугольном $\triangle BOP$ находим $OH = \dfrac{OP \cdot OB}{BP} = \dfrac{OP \cdot OB}{\sqrt{OP^2 + OB^2}}$. Так как $OP = AK = \dfrac{a}{2}$, $OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, то $OH = \dfrac{\dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{2}{3}a^2}} = \dfrac{a\sqrt{22}}{11}$. Значит, $\rho(MK; AB) = OH = \dfrac{a\sqrt{22}}{11}$.

Проведя $HT \parallel AP$ и $TE \parallel OH$, заключаем: TE — высота искомого треугольника MTK и $TE = OH$. Это означает, что $S_{\triangle MTK} = \dfrac{1}{2} MK \cdot TE = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{22}}{11} = \dfrac{a^2\sqrt{66}}{44}$.

5.065. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $AA_1 = a$, $AB = 3a$ и $AD = 4a$. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник AD_1M, если точка M лежит на прямой DC_1?

Решение. Площадь $S_{\triangle ADM}$ треугольника AD_1M будет наименьшей при наименьшей высоте, проведённой из $M \in DC_1$ на AD_1. Это означает, что высотой искомого треугольника является общий перпендикуляр скрещивающихся прямых

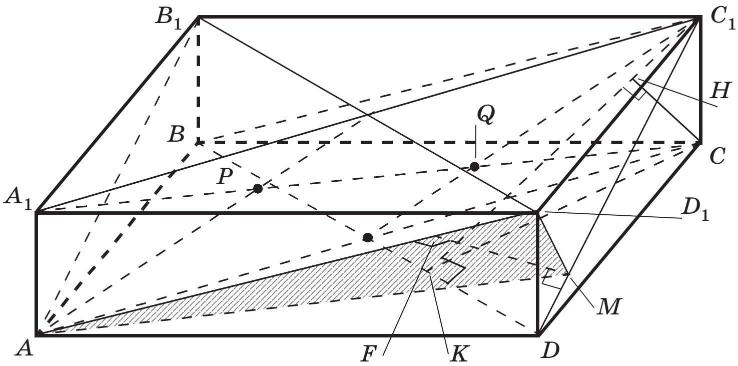


Рис. 105

AD_1 и DC_1. Так как $(AB_1D_1) \parallel (C_1BD)$, то $\rho(AD_1;\ DC_1) = \rho((AB_1D_1); (C_1BD))$ (рис. 105).

Диагональ A_1C делится AB_1D_1 и C_1BD плоскостями AB_1D_1 и C_1BD на три равные части $A_1P = PQ = QC$, поэтому имеем $\rho((AB_1D_1); (C_1BD)) = \rho(C; (C_1BD))$. Найдём $\rho(C; (C_1BD))$.

Если $CK \perp BD$, то $BD \perp (CC_1K)$, значит, $(CC_1K) \perp (C_1BD)$. Поэтому перпендикуляр CH, проведённый из C к (C_1BD), расположен в (CC_1K), а его основание H принадлежит C_1K. Это означает, что CH — высота прямоугольного $\triangle CC_1K$. Найдём $CH = \rho(AD_1; DC_1)$.

В прямоугольном $\triangle BCD$ находим: $BD = 5a$, $KD = \dfrac{CD^2}{BD} = \dfrac{9}{5}a$. Тогда в прямоугольном $\triangle CKD$: $CK = \sqrt{CD^2 - KD^2} = \sqrt{9a^2 - \dfrac{81}{25}a^2} = \dfrac{12}{5}a$. Наконец, в прямоугольном $\triangle CC_1K$ находим $CH = \dfrac{CC_1 \cdot CK}{C_1K} = \dfrac{CC_1 \cdot CK}{\sqrt{C_1C^2 + CK^2}} = \dfrac{a \cdot \frac{12}{5}a}{\sqrt{a^2 + \frac{144}{25}a^2}} = \dfrac{12}{13}a$.

Таким образом,

$$\rho(C; (C_1BD)) = \rho((AB_1D_1); (C_1BD)) = \rho(AD_1; DC_1) = CH = \frac{12}{13}a.$$

Если MF — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AD_1 и DC_1 ($M \in DC_1$, $F \in AD_1$), то $MF = \dfrac{12}{13}a$. Тогда

$$S_{\triangle AD_1M} = \frac{1}{2}AD_1 \cdot MF = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{17} \cdot \frac{12}{13}a = \frac{6a^2\sqrt{17}}{13}.$$

5.066. Ребро основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно a. Боковое ребро призмы равно $2a$; точка P — середина ребра BB_1. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник AB_1K, если точка K лежит на прямой CP?

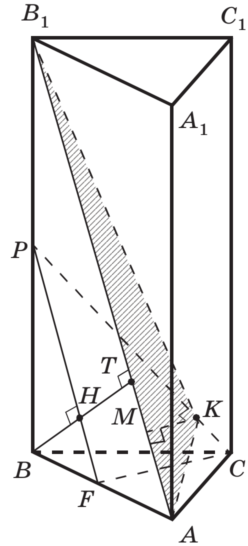


Рис. 106

Решение. Высотой искомого треугольника AB_1K является общий перпендикуляр скрещивающихся прямых CP и AB_1. Длина этого перпендикуляра равна расстоянию между прямой AB_1 и параллельной ей плоскостью CPF (F — середина AB) (рис. 106).

Так как $CF \perp (AB_1B)$, то $(CPF) \perp (AB_1B)$. Поэтому перпендикуляр BH, проведённый из B на (CPF), лежит в (AB_1B) и пересекает AB_1 в некоторой точке T. Учитывая, что PF — средняя линия $\triangle AB_1B$, находим

$$HT = BH = \frac{1}{2}BT = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB \cdot BB_1}{AB_1} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{AB \cdot BB_1}{\sqrt{AB^2 + B_1B^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Таким образом, $\rho(AB_1; (CPF)) = \rho(AB_1; CP) = HT = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

Если K — искомая точка прямой CP, KM — общий перпендикуляр прямых CP и AB_1, то $KM = HT = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$. Тогда искомая площадь треугольника AB_1K равна

$$\frac{1}{2}AB_1 \cdot KM = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{5} \cdot \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a^2}{2}.$$

5.069. Точка A принадлежит окружности радиуса 1. Отрезок AB длины 2 перпендикулярен плоскости этой окружности; C — такая точка окружности, что длина дуги AC равна x $(0 < x \leqslant \pi)$. Задать функцию расстояния между точками B и C от x.

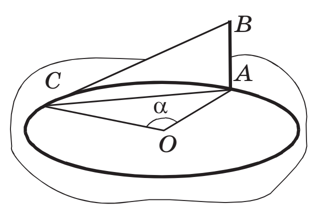


Рис. 107

Решение. Длина l дуги окружности радиуса R, соответствующая центральному углу α, вычисляется по формуле

$l = R\cdot\alpha$. Пусть $\angle AOC = \alpha$ (рис. 107). Тогда $x = \alpha$. Значит, $AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA\cdot OC\cdot\cos\alpha = 2\cdot(1-\cos\alpha) = 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$.

Тогда в $\triangle ABC$: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2\sqrt{1+\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

5.072. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма, все рёбра которой равны 1 (рис. 108). Найти: 1) расстояние от вершины B до прямой: а) E_1F; б) D_1F_1; в) C_1D_1; г) AD_1; д) CD_1.

Для решения метрических задач применительно к правильной шестиугольной призме полезно на отдельном (выносном) рисунке изобразить её нижнее (или верхнее) основание — правильный шестиугольник $ABCDEF$ (см. рис. 17 и указание к задаче **2.055**).

Решение. а) Имеем: F_1F ($\perp$ (ABC), $BF \subset (ABC) \Rightarrow F_1F \perp BF$ (см. рис. 108) (по определению прямой, перпендикулярной плоскости); $BF \perp EF$ шестиугольник $ABCDEF$ — правильный (см. рис. 17). Поэтому $BF \perp (F_1FE)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), откуда $BF \perp FE_1$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Это означает, что $\rho(B;\ FE_1) = BF = \sqrt{3}$ (как сторона правильного треугольника, вписанного в единичную окружность).

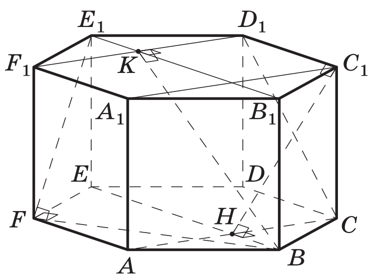


Рис. 108

б) Имеем: $BE \perp AC$ (см. рис. 17); $B_1B \perp (ABC)$, $BE \subset (ABC) \Rightarrow B_1B \perp BE$ (см. рис. 108) (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Поэтому $AC \perp (B_1BE)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), откуда $AC \perp BK$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости), где $K = B_1E_1 \cap D_1F_1$. Значит, $BK \perp D_1F$, $(AC \parallel D_1F_1)$, тогда $\rho(B;\,D_1F_1) = BK = \sqrt{B_1B^2 + B_1K^2} = \sqrt{1^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

в) Имеем: $BE \parallel CD$ (см. рис. 17), $CD \parallel C_1D_1$ (см. рис. 108) $\Rightarrow BE \parallel C_1D_1 \Rightarrow \rho(B;\ C_1D_1) = \rho(H;\ C_1D_1)$. Из $BE \perp (ACC_1)$, $BE \parallel C_1D_1$ следует $C_1D_1 \perp (ACC_1)$, откуда $C_1D_1 \perp HC_1$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости, так как

$HC_1 \subset (ACC_1)$). Это означает, что $\rho(B;\ C_1D_1) = HC_1$. В прямоугольном $\triangle HCC_1$ находим:

$$HC_1 = \sqrt{C_1C^2 + CH^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

г) Так как $BD \perp AB$ (см. рис. 108), то $BD_1 \perp AB$ (рис. 109) (по теореме о трёх перпендикулярах), поэтому $\triangle ABD_1$ — прямоугольный ($\angle ABD_1 = 90°$). Пусть BT — высота $\triangle ABD_1$. Тогда $BT = \rho(B;\ AD_1) = \dfrac{AB \cdot BD_1}{\sqrt{AB^2 + BD_1^2}}$.

В прямоугольном $\triangle BDD_1$ находим: $BD_1 = \sqrt{DD^2 + DD_1^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. Значит, $\rho(B;\ AD_1) = \dfrac{1 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

д) Так как ни BD, ни CD не перпендикулярны BC (см. рис. 108), то $\triangle BCD_1$ — не прямоугольный. Если BK — высота этого треугольника (см. рис. 109), то $BK \perp CD_1$, значит, $BK = \rho(B;\ CD_1)$. Найдём BK.

В $\triangle BCD_1$: $BC = 1$; $BD_1 = 2$; $CD_1 = \sqrt{2}$. Обозначим: $D_1K = x$, тогда $CK = \sqrt{2} - x$.

Получаем:

$D_1B^2 - D_1K^2 = BC^2 - CK^2$ или $4 - x^2 = 1 - (\sqrt{2} - x)^2$, откуда

$$x = \frac{5\sqrt{2}}{4} = D_1K.$$

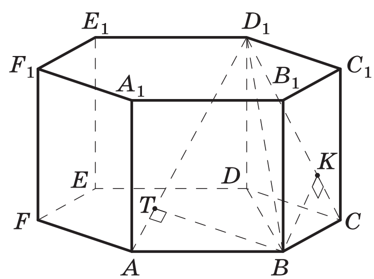


Рис. 109

Значит,

$$BK = \sqrt{D_1B^2 + D_1K^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

5.073. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма, все рёбра которой равны 1. Найти: а) расстояние от вершины A_1 до плоскости BCC_1; б) от вершин A_1 и D_1 до плоскости AC_1E_1; в) от вершин F и B_1 до плоскости AF_1D.

Указание. Для решения задач на нахождение расстояния от точки до плоскости с использованием изображения правильной шестиугольной призмы также полезно иметь перед глазами изображение оригинала правильного шестиугольника (см. рис. 17), на котором видна взаимная перпендикулярность диагоналей и сторон этого шестиугольника. Эта

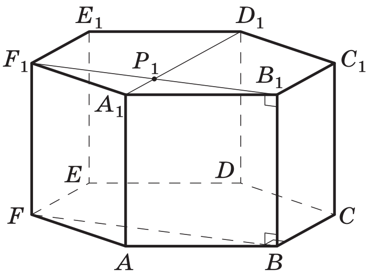


Рис. 110

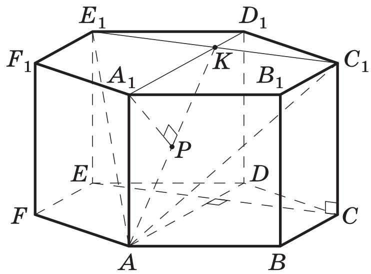


Рис. 111

перпендикулярность, в сочетании с теоремой о трёх перпендикулярах, свойствами и признаками перпендикулярности прямых и плоскостей, играет роль факторов, способствующих определению расстояния от точки до плоскости и последующего его вычисления.

Решение. а) Так как $A_1D_1 \parallel B_1C_1$ (см. рис. 110), то $A_1D_1 \parallel (BB_1C_1)$, поэтому расстояние от точки A_1 до (BB_1C_1) равно расстоянию до (BB_1C_1) от любой точки прямой A_1D_1. Удобной для решения задачи является точка $P_1 = A_1D_1 \cap B_1F_1$. Действительно, $B_1F_1 \parallel BF$, при этом $BF \perp BC$ (см. рис. 17), $BF \perp BB_1$, откуда $BF \perp (BB_1C_1)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Это означает, что $B_1F_1 \perp (BB_1C_1)$, поэтому $\rho(P_1; (BC_1C)) = P_1B_1 = \frac{1}{2}F_1B_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда $\rho(A_1; (BC_1C)) = \rho(P_1; (BC_1C)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

б) Имеем: $EC \perp AD$ (рис. 111), $EC \perp C_1C$, $C_1C \parallel AA_1$ (рис. 112) $\Rightarrow EC \perp (AA_1D)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Из $EC \parallel E_1C_1$ и $EC \perp (AA_1D)$ следует: $E_1C_1 \perp (AA_1D)$, откуда $\Rightarrow (AE_1C_1) \perp (AA_1D)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей).

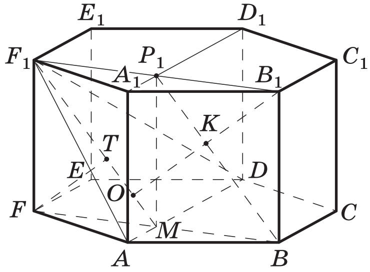


Рис. 112

Обозначим: $K = A_1D_1 \cap E_1C_1$. Тогда $(AE_1C_1) \cap (AA_1D) = AK$, и вследствие $(AE_1C_1) \perp (AA_1D)$ приходим к выводу: перпендикуляр из точки A_1 на (AE_1C_1) расположен в (AA_1D), поэтому $\rho(A_1; (AE_1C_1)) = \rho(A_1; AK) = A_1P$, где A_1P — высота прямоугольного $\triangle AA_1K$. Найдём длину A_1P.

В прямоугольном $\triangle AA_1K$ находим:

$$A_1P = \frac{A_1A \cdot A_1K}{\sqrt{(A_1A)^2 + A_1K^2}} =$$

$$= \frac{1 \cdot 1{,}5}{\sqrt{1 + 2{,}25}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

Таким образом,

$$\rho(A_1; (AE_1C_1)) = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

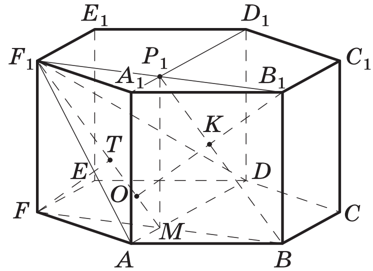


Рис. 113

Так как $D_1K : A_1K = 1 : 3$, то

$$\rho(D_1; (AE_1C_1)) = \frac{1}{3}\rho(A_1; (AE_1C_1)) = \frac{\sqrt{13}}{13}.$$

Замечание. В задаче речь идёт о расстоянии от точки A до плоскости AE_1C_1, которая изображена на рисунке 112 в виде $\triangle AE_1C_1$. Но получится такой же результат, если построить сечение AQE_1C_1R данной призмы плоскостью AE_1C_1. Вместе с тем, можно дополнительно предложить учащимся найти объём пирамиды $A_1AQE_1C_1R$.

в) Имеем: $AD \perp BF$ (см. рис. 17), $AD \perp DD_1$, $DD_1 \parallel BB_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow AD \perp BB_1$ (рис. 113), тогда $AD \perp (B_1BF)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости) $\Rightarrow (F_1AD) \perp (B_1BF)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей). Это означает: перпендикуляр из вершины F на (F_1AD) расположен в (B_1BF) и перпендикулярен прямой $F_1M = (F_1AD) \cap (B_1BF)$. Пусть точка T — основание этого перпендикуляра, $T \in F_1M$. Тогда $FT = \rho(F; (F_1AD))$.

Найдём длину FT.

В прямоугольном $\triangle F_1FM$: $FM = 0{,}5BF = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $F_1F = 1$. Значит, $FT = \frac{FF_1 \cdot FM}{\sqrt{F_1F^2 + FM^2}} = \frac{1 \cdot 0{,}5\sqrt{3}}{\sqrt{1 + (0{,}5\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$. Таким образом, $\rho(F; (F_1AD)) = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Перпендикуляр B_1O из вершины B_1 на (F_1AD) также расположен в (B_1BF) и перпендикулярен прямой F_1M, при этом $O \in F_1M$.

Так как $F_1M \parallel P_1B$ (в прямоугольнике FF_1B_1B точки P_1 и M — середины противоположных сторон), то точка $K = P_1B \cap B_1O$ является серединой перпендикуляра B_1O

(по теореме Фалеса). Учитывая, что $FT = B_1K$, приходим к выводу: $B_1O = 2\,B_1K = 2\,FT = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}$. Значит, $\rho(F;\,(F_1AD)) = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}$.

5.074. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма, все рёбра которой равны 1. Найти расстояние между прямыми: а) B_1F и CE_1; б) A_1B и B_1C; в) E_1E и A_1B; г) BE_1 и B_1C.

Решение. (См. указание к задаче 5.073.) б) Прямые A_1B и B_1C скрещиваются (почему?) (рис. 114). Найдём расстояние между ними.

Обозначим: $O = AD \cap CF$; $O_1 = A_1D_1 \cap C_1F_1$; $H = AC \cap BO$; $H_1 = A_1C_1 \cap B_1O_1$.

В прямом параллелепипеде $ABCOA_1B_1C_1O_1$, все рёбра которого равны 1, а его основанием является ромб $OABC$, имеем: $A_1O \parallel B_1C_1$, $A_1B \parallel O_1C$, откуда $(A_1OB) \parallel (B_1O_1C)$ (почему?).

Так как $A_1B \subset (A_1OB)$, $B_1C \subset (B_1O_1C)$, то $\rho(A_1B;\,B_1C) = \rho((A_1OB);\,(B_1O_1C))$ (почему?).

Боковые грани этого параллелепипеда — равные квадраты, поэтому треугольники A_1OB и B_1O_1C равны и являются равнобедренными. Откуда: $A_1H \perp OB$, $CH_1 \perp B_1O_1$. Учитывая перпендикулярность $OB \perp AC$, приходим *к выводу:* $OB \perp (A_1AC)$ (почему?), откуда $(A_1AC) \perp (A_1OB)$ (почему?). А так как $(A_1OB) \parallel (B_1O_1C)$, то $(A_1AC) \perp (B_1O_1C)$. Это означает, что прямая, проведённая через точку A перпендикулярно плоскостям A_1OB и B_1O_1C, расположена в (A_1AC), поэтому она пересекает (A_1OB) и (B_1O_1C) в точках, принадлежащих прямым соответственно A_1H и CH_1. Обозначим эти точки соответственно K и T (см. рис. 114). Тогда $\rho(A_1B;\,B_1C) = \rho(A_1OB);\,(B_1O_1C)) = KT$.

Так как $A_1H \parallel CH_1$ и $AH = HC$, то $AK = KT$ (по теореме Фалеса). Таким образом, $\rho(A_1B;\,B_1C) = AK$. Найдём длину AK.

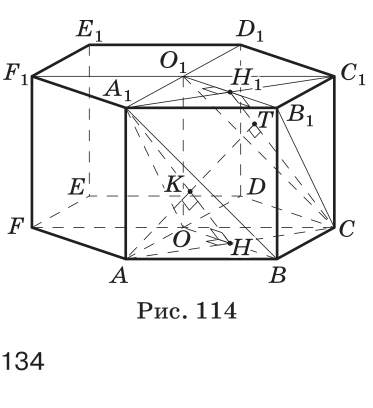


Рис. 114

В прямоугольном $\triangle AA_1H$ с катетами $A_1A = 1$, $AH = 0{,}5\sqrt{3}$ находим высоту AK:

$$AK = \frac{A_1A \cdot AH}{\sqrt{A_1A^2 + AH^2}} = \frac{1 \cdot 0{,}5\sqrt{3}}{\sqrt{1 + 0{,}75}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Итак, $\rho(A_1B;\,B_1C) = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

г) Расстояние между прямыми BE_1 и B_1C найдём «методом проектирования».

Имеем: $B_1C \perp BC_1$ (почему?) (рис. 115); $BC \perp BF \Rightarrow B_1C \perp BF$ (почему?). Тогда $B_1C \perp (C_1BF)$ (почему?), при этом

$B_1C \cap (C_1BF) = T = B_1C \cap C_1B$.

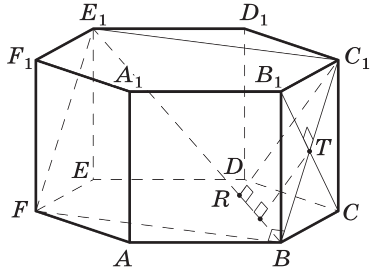


Рис. 115

Таким образом, в качестве плоскости, перпендикулярной прямой B_1C, выберем плоскость C_1BF, пересекающую эту прямую в точке T.

Прямая BE_1 лежит в плоскости C_1BF, поэтому её проекцией на (C_1BF) является сама прямая BE_1. Тогда, в соответствии с методом проектирования, $\rho(BE_1; B_1C) = \rho(T; BE_1)$.

Пусть: $TK \perp BE_1$, $K \in BE_1$, тогда $\rho(T; BE_1) = TK$. Найдём длину TK.

Если C_1R — высота прямоугольного $\triangle E_1C_1B$ (см. рис. 115), то $C_1R \perp BE_1$, следовательно, $C_1R \parallel TK$, откуда TK — средняя линия $\triangle\, C_1BR$. Значит, $TK = \dfrac{1}{2}\, C_1R$.

В прямоугольном $\triangle\, E_1C_1B$ с катетами $E_1C_1 = \sqrt{3}$ и $C_1B = \sqrt{2}$ находим: $C_1R = \dfrac{E_1C_1 \cdot C_1B}{\sqrt{E_1C_1^2 + C_1B^2}} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2}} = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

Тогда $TK = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$. Таким образом, $\rho(BE_1; B_1C) = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

Глава 6. Векторный метод в пространстве

Векторное решение многих стереометрических задач значительно проще их решений средствами элементарной геометрии, при этом можно обойтись без тех дополнительных построений, которые иногда затрудняют поиск решения задачи. Более того, применение векторов при решении геометрических задач способствует развитию инициативы учащихся в поисках эффективных путей решения этих задач, интересных обобщений, которые они могут сделать, анализируя полученные решения. Чтобы векторы стали аппаратом решения геометрических задач, необходимо, прежде всего, научить учащихся переводить условие геометрической задачи в векторную символику (на «векторный язык»), затем грамотно выполнять соответствующие алгебраические операции над векторами и, наконец, полученный в векторной форме результат переводить вновь на язык элементарной геометрии.

§ 21. Понятие вектора. Линейные операции над векторами

Для решения геометрических (и алгебраических, и физических) задач каждый учащийся должен усвоить векторные терминологию и символику, научиться безошибочно выполнять все действия над векторами.

Учащимся следует пояснить, что в стереометрии сумму двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно найти, как и в планиметрии, по правилу треугольника или по правилу параллелограмма, а при сложении трёх и более векторов применяется правило многоугольника (или правило ломаной линии). Если три вектора $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ отложены от одной точки, но не лежат в одной плоскости, то их сумма находится по правилу параллелепипеда.

Вычитание векторов можно свести к сложению векторов: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Операция умножения вектора на число обладает одними и теми же свойствами как в планиметрии, так и в стереометрии. Учащиеся должны помнить, что точка M лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда выполняется условие $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$.

Рабочими при решении задач этого параграфа (и в дальнейшем) являются векторная формула для середины отрезка и векторная формула для точки пересечения медиан (центроида) треугольника.

При изучении § 21 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

• понимать и объяснять определение свободного вектора;

• понимать и объяснять определения и свойства линейных операций над векторами;

• формулировать определение: вектора в пространстве; коллинеарных векторов; суммы, разности двух векторов; произведения вектора на число;

• формулировать свойства линейных операций над векторами и иллюстрировать их, используя изображения многогранников;

• формулировать признаки коллинеарности двух векторов в пространстве, иллюстрируя их на изображениях многогранников;

• определять на изображениях куба, пирамиды, параллелепипеда векторным методом взаимное расположение точек и прямых;

• решать геометрические задачи векторным методом, для чего переводить условие геометрической задачи в векторную терминологию и символику (на «векторный язык»), затем грамотно (безошибочно) выполнять соответствующие алгебраические операции над векторами и, наконец, полученный в векторной форме результат верно переводить обратно, на язык чисто геометрический.

6.016. Доказать, что если точка M — центроид треугольника ABC, то $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

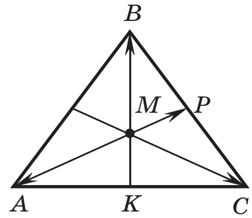


Рис. 116

Решение. Пусть точка P — середина BC (рис. 116). Тогда $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$. С другой стороны, $\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}$. Тогда получаем $-\frac{1}{2}\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$, откуда $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

6.018. В тетраэдре $PABC$ точки M_1 и M_2 — центроиды граней соответственно PAB и PBC. Доказать, что $M_1M_2 \parallel AC$ и $M_1M_2 = \frac{1}{3}AC$.

Решение. Пусть O — произвольная точка пространства (рис. 117).

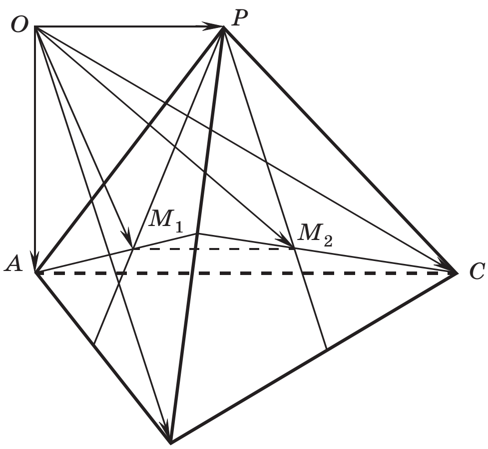


Рис. 117

Тогда:

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP}),\ \overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}).$$

Поэтому $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Это означает, что векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны и $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{AC}|$, откуда для отрезков M_1M_2 и AC справедливо: $M_1M_2 \parallel AC$ и $M_1M_2 = \frac{1}{3}AC$.

6.024. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Указать такую точку M, что справедливо равенство:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MD_1} = \vec{0}.$$

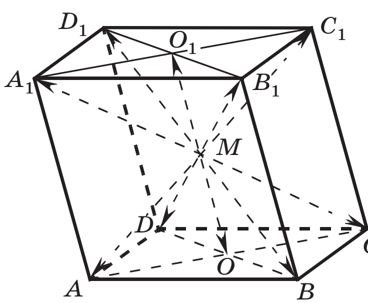


Рис. 118

Решение. Пусть $O = AC \cap BD$, $O_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$ (рис. 118). Тогда

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO} \text{ и } \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MC_1} = \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MD_1} = 2\overrightarrow{MO_1}.$$

Так как $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MD_1} = \vec{0}$, то $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO_1} = \vec{0}$, откуда $\overrightarrow{MO} = -\overrightarrow{MO_1}$. Это означает, что точка M — середина отрезка OO_1, соединяющего центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

6.030. Для данной неплоской замкнутой ломаной, состоящей из шести звеньев, построены два треугольника, вершинами каждого из которых служат середины несмежных звеньев. Доказать, что центроиды этих треугольников совпадают.

Решение. Пусть $ABCDEF$ — неплоская замкнутая ломаная; точки M, N, P — середины звеньев соответственно AB, CD, EF; точки Q, R, S — середины звеньев соответственно BC, DE, FA; M_1 и M_2 — центроиды треугольников соответственно MNP и QRS. Тогда для любой точки O, центроидов M_1 и M_2 треугольников соответственно MNP и QRS имеем:

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}),\quad \overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS}).$$

Так как $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$, $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE})$, $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OA})$, то после элементарных преобразований получаем $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}) = \overrightarrow{OM_2}$, откуда следует, что точки M_1 и M_2 совпадают.

§ 22. Разложение вектора по базису

Учащимся необходимо пояснить два важных векторно-геометрических факта:

- если точка O не лежит на прямой AB, то точка M лежит на этой прямой тогда и только тогда, когда выполняется векторное равенство $\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$ при условии, что $x + y = 1$;
- если точка O не лежит в плоскости ABC, то точка M лежит в этой плоскости тогда и только тогда, когда выполняется векторное равенство $\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}$ при условии, что $x + y + z = 1$.

Если при решении планиметрических задач выбирают два неколлинеарных (базисных) вектора, то для решения задач стереометрических выбирают три некомпланарных (базисных) вектора. При этом, если базисные векторы попарно не перпендикулярны и имеют попарно различные длины, то такой базис называется аффинным, а коэффициенты в разложении любого вектора пространства по базисным векторам — его аффинными координатами в этом базисе. Об этом можно сказать учащимся уже теперь, а можно и чуть позднее.

Если в задаче требуется доказать, что три данные прямые параллельны некоторой плоскости (её положение определять не нужно), то достаточно на каждой из этих прямых выбрать вектор (направленный отрезок) и доказать, воспользовавшись признаком компланарности трёх векторов, что выбранные векторы компланарны.

При изучении § 22 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

- понимать и объяснять свойства линейных операций над векторами;

- понимать и объяснять определения: коллинеарных векторов; компланарных векторов; векторного базиса на плоскости и в пространстве;
- понимать и объяснять признак коллинеарности двух векторов;
- понимать и объяснять признак компланарности трёх ненулевых векторов;
- понимать и объяснять, что для доказательства параллельности трёх прямых некоторой одной плоскости достаточно на каждой из этих прямых выбрать вектор и, используя признак компланарности трёх векторов, доказать, что выбранные векторы компланарны;
- выполнять грамотно (безошибочно) алгебраические операции над векторами;
- формулировать определения: а) компланарных векторов; б) векторного базиса на плоскости и в пространстве; в) теоремы о разложении вектора по двум неколлинеарным и трём некомпланарным векторам; г) производить разложение вектора в данном базисе;
- формулировать признаки коллинеарности двух и компланарности трёх векторов в пространстве, иллюстрируя их на изображениях многогранников;
- переводить условие геометрической задачи в векторную терминологию и символику (на «векторный язык»), затем грамотно (безошибочно) выполнять соответствующие алгебраические операции над векторами и, наконец, полученный в векторной форме результат верно переводить обратно, на язык чисто геометрический;
- задавать на данном изображении многогранника векторный базис, после чего правильно записывать разложение вектора по базису;
- доказывать векторным методом параллельность трёх прямых некоторой одной плоскости;
- определять на изображениях куба, пирамиды, параллелепипеда векторным методом взаимное расположение точек, прямых и плоскостей;
- решать геометрические задачи векторным методом, для чего переводить условие геометрической задачи в векторную терминологию и символику (на «векторный язык»), затем грамотно (безошибочно) выполнять соответствующие алгебраические операции над векторами и, наконец, полученный в векторной форме результат верно переводить обратно, на язык чисто геометрический.

6.046. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Точки M, P, K и H — середины отрезков соответственно AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. Доказать, что отрезки MK и PH пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Решение. Пусть O — любая точка пространства, T и T_1 — середины отрезков соответственно PH и MK. Тогда имеем (рис. 119):

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OH}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB_1}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD_1})\right) =$$

$$= \frac{1}{4}((\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OD_1}));$$

$$\overrightarrow{OT_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OK}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA_1}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC_1})\right) =$$

$$= \frac{1}{4}((\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OC_1})).$$

Так как $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограммы, то

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \text{ и } \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OD_1}.$$

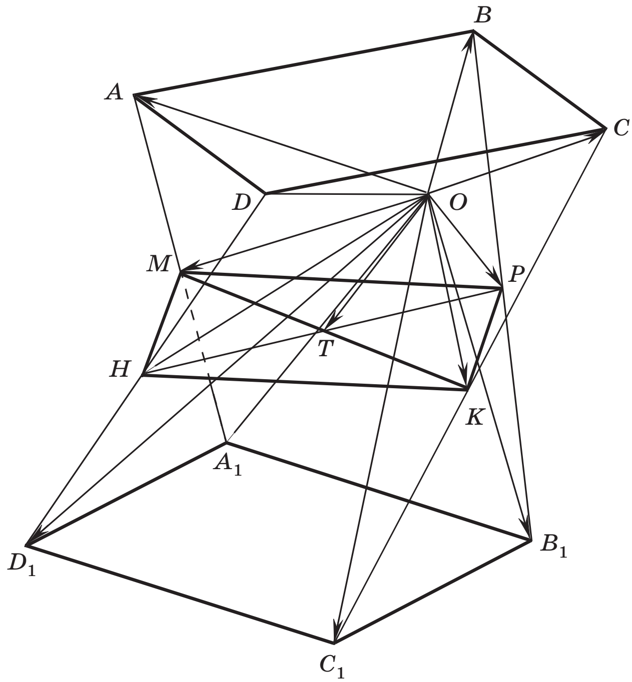


Рис. 119

Учитывая эти равенства, получаем $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT_1}$, откуда $T_1 = T$, т. е. отрезки PH и MK, пересекаясь, делятся пополам.

6.047. В тетраэдре $PABC$ точки K и M — середины рёбер соответственно PA и BC. Доказать, что прямые AB, KM и PC параллельны некоторой (одной) плоскости.

Решение. С одной стороны, $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CM}$ (рис. 120), с другой стороны, $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$. Тогда $2\overrightarrow{KM} = (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KP}) + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}) + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{AB}$, откуда $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{KM}$, значит, векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PC}$ и $\overrightarrow{MK}$ компланарны. Поэтому прямые AB, PC и MK параллельны некоторой плоскости.

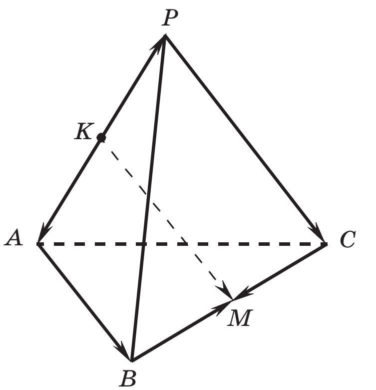


Рис. 120

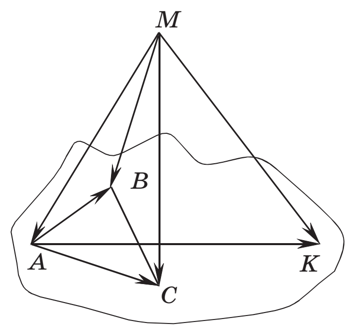


Рис. 121

Прежде чем комментировать решения задач **6.048—6.057**, проведём следующие рассуждения.

Если точка K лежит в плоскости ABC, то справедливо $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Пусть M — любая точка пространства, не принадлежащая плоскости ABC (рис. 121). Тогда из последнего равенства получаем:

$$\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MA} = x(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) + y(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}) =$$

$$= -(x + y)\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MK} = (1 - x - y)\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC}.$$

Если обозначить $\alpha = 1 - x - y$, $\beta = x$, $\gamma = y$, то следует:

$$\overrightarrow{MK} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} \text{ при } \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Оказывается справедливо обратное утверждение: если M — любая точка пространства, не принадлежащая плоскости ABC, и справедливо $\overrightarrow{MK} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ при $\alpha + \beta + \gamma = 1$, то точка K лежит в плоскости ABC.

В самом деле, из векторного равенства

$$\overrightarrow{MK} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$$

получаем:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AK} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AK} = (\alpha + \beta + \gamma - 1)\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC},$$

т. е. векторы $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ компланарны. А так как эти векторы отложены от одной точки, то точка K лежит в плоскости ABC.

Таким образом, для любой точки M, не принадлежащей плоскости ABC, равенство $\overrightarrow{MK} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ (при $\alpha + \beta + \gamma = 1$) справедливо тогда и только тогда, когда точка K лежит в плоскости треугольника ABC.

Можно доказать, что если в равенстве $\overrightarrow{MK} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ выполняется: $\alpha + \beta + \gamma > 1$, то точки M и K разделены плоскостью ABC; если $\alpha + \beta + \gamma < 1$, то точки M и K не разделены плоскостью ABC. Причём если прямая MK пересекает (ABC) в точке P, при этом $\alpha + \beta + \gamma = m$, то $MP : PK = 1 : (m - 1)$ при $m > 1$ и $MK : KP = m : (1 - m)$ при $0 < m < 1$.

Кроме того, точка P лежит внутри треугольника ABC при условии, если все коэффициенты α, β и γ положительны.

Теперь можно приступать к кратким решениям задач **6.048—6.057**.

6.048. Векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ некомпланарны, точка K лежит в плоскости треугольника ABC. Найти значение числа x, если: а) $\overrightarrow{MK} = 0{,}1\overrightarrow{MA} + 0{,}4\overrightarrow{MB} + x\overrightarrow{MC}$; б) $\overrightarrow{MK} = 7\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} + 0{,}38\overrightarrow{MC}$.

Решение. Используя признак принадлежности четырёх точек одной плоскости, заключаем, что точка K лежит в плоскости ABC, если: а) $0{,}1 + 0{,}4 + x = 1$, откуда $x = 0{,}5$, причём K лежит внутри треугольника ABC; б) $7 + x + 0{,}38 = 1$, откуда $x = -6{,}38$, причём K лежит вне треугольника ABC.

6.057. На продолжении рёбер MA, MB и MC правильного тетраэдра $MABC$ взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1 такие, что точка A — середина отрезка MA_1, $MB_1 = 3MB$ и $MC_1 = 1{,}5MC$. K — центроид (точка пересечения медиан) треугольника $A_1B_1C_1$. а) Разложить вектор $\overrightarrow{MK}$ по векторам $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$. б) В каком отношении плоскость ABC делит отрезок MK, считая от M? в) Найти расстояние от точки K до плоскости ABC, если ребро тетраэдра равно a.

Решение. а) Точка K — центроид $\triangle A_1B_1C_1$ (рис. 122) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \overrightarrow{MK} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1}) = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 1{,}5\overrightarrow{MC}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$.

б) $\alpha + \beta + \gamma = \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{13}{6} > 1$. Пусть $P = MK \cap (ABC)$. Тогда $MP : PK = 1 : \left(\frac{13}{6} - 1\right) = 6 : 7$.

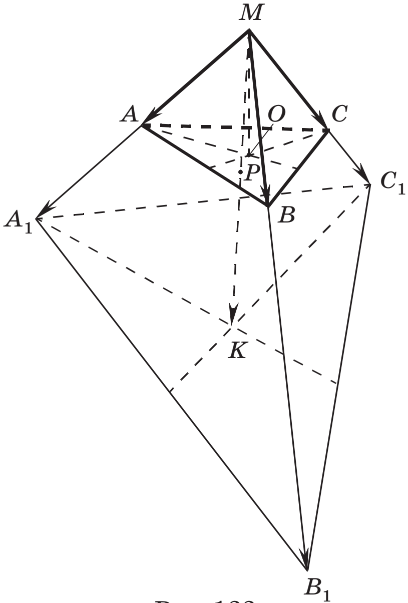


Рис. 122

в) Пусть O — центроид $\triangle ABC$.

Тогда $\rho(M; (ABC)) = OM = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Так как $KP : PM = 7 : 6$, то $KP = \frac{7}{6} PM$. Это означает, что

$$\rho(K; (ABC)) = \frac{7}{6}\rho(M; (ABC)) = \frac{7}{6} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{7a\sqrt{6}}{18}.$$

§ 23. Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение двух векторов позволяет находить длину отрезка, величину угла, следовательно, находить расстояния, площади и другие метрические характеристики геометрических фигур.

Если в задаче требуется найти длину отрезка, то в качестве базисных выбирают такие векторы, длины которых и углы между которыми уже известны. При этом длину отрезка находят как длину соответствующего вектора, который разлагают по базисным векторам, затем находят его скалярный квадрат и получают длину этого вектора по формуле: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Если в задаче требуется найти величину угла φ между прямыми, то в качестве базисных выбирают векторы с известными отношениями их длин и известными углами между ними. Кроме того, выбирают векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на сторонах этого угла с началом в его вершине и разлагают их по базису, а затем находят косинус искомого угла φ по формуле: $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ или $\cos\varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. При этом пользуются алгебраическими и геометрическими свойствами скалярного произведения векторов.

Для доказательства перпендикулярности прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей удобно пользоваться признаком перпендикулярности двух ненулевых векторов.

При изучении § 23 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

- понимать и объяснять определение скалярного произведения двух векторов и его свойства;
- понимать и объяснять признак перпендикулярности векторов;

- понимать и объяснять следующее: чтобы векторным методом найти длину отрезка, в качестве базисных выбирают такие векторы, длины которых и углы между которыми уже известны;
- понимать и объяснять следующее: чтобы векторным методом найти величину угла, в качестве базисных выбирают векторы с известными отношениями их длин и известными углами между ними;
- понимать и объяснять, что для доказательства перпендикулярности прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей удобно пользоваться признаком перпендикулярности двух ненулевых векторов;
- формулировать определения: угла между двумя ненулевыми векторами; скалярного произведения двух ненулевых векторов; доказывать свойства скалярного произведения векторов;
- используя свойства скалярного произведения векторов, находить длину вектора, угол между векторами;
- формулировать и доказывать признак перпендикулярности двух векторов;
- доказывать векторным методом: признак перпендикулярности прямой и плоскости; теоремы о трёх перпендикулярах;
- задавать на данном изображении многогранника векторный базис, после чего записывать разложение вектора по базису и векторным методом находить длины отрезков, углы между рёбрами;
- доказывать, используя изображения куба, правильного тетраэдра, прямоугольного параллелепипеда, векторным методом параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, содержащих рёбра, грани и сечения этих многогранников;
- находить с помощью скалярного произведения величины углов между прямыми и плоскостями, вычислять длины отрезков, расстояния от точки до прямой и плоскости, используя модели и изображения куба, правильного тетраэдра;
- сопровождать все решения векторным методом геометрических задач аргументированными объяснениями.

6.067. В тетраэдре $PABC$ рёбра AP и BC, а также AB и CP взаимно перпендикулярны. Доказать перпендикулярность рёбер AC и BP, используя векторы.

Решение. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AP} = \vec{c}$ (рис. 123). Исходя из условия задачи, получаем:

$$AP \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \Rightarrow \vec{c} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} =$$
$$= \vec{b} \cdot \vec{c}; AB \perp CP \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CP} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CP} =$$
$$= 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

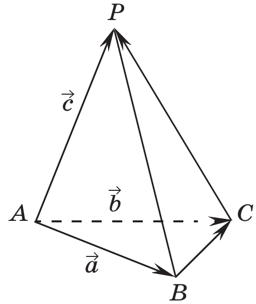


Рис. 123

Таким образом: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} \Rightarrow \vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BP} \Rightarrow AC \perp BP$, что и требовалось доказать.

6.069. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$; б) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 5$; в) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$; г) $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 1$; д) $|\vec{a} + 2\vec{b}| = |\vec{a} - 2\vec{b}| = p$.

Решение. а) $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2} =$
$= \sqrt{1 + 2\vec{a}\vec{b} + 4} = 3 \Rightarrow 2\vec{a}\vec{b} = 4 \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = 2;$

д) $|\vec{a} + 2\vec{b}| = |\vec{a} - 2\vec{b}| = p \Rightarrow \sqrt{\vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2} =$
$$= \sqrt{\vec{a}^2 - 4\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2} = p \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 = p^2, \\ \vec{a}^2 - 4\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 = p^2 \end{cases} \Rightarrow 8\vec{a}\vec{b} = 0 \Rightarrow$$
$\Rightarrow \vec{a}\vec{b} = 0.$

Так как в задачах **6.074—6.080** базисные векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — единичные и попарно взаимно перпендикулярные, то учащимся желательно напомнить, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 1$. Учитывая это, для любого вектора $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ имеют место следующие утверждения:

а) $\vec{p} \cdot \vec{a} = x$; $\vec{p} \cdot \vec{b} = y$; $\vec{p} \cdot \vec{c} = z$;

б) $\vec{p} \cdot \vec{a} = |\vec{p}| \cdot \cos\alpha$, $\vec{p} \cdot \vec{b} = |\vec{p}| \cdot \cos\beta$, $\vec{p} \cdot \vec{c} = |\vec{p}| \cdot \cos\gamma$, где α, β, γ — углы между вектором $\vec{p}$ и соответственно базисными векторами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Сказанное означает, что если базисные векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — единичные и попарно взаимно перпендикулярные, то каждая координата любого вектора в этом базисе равна произведению модуля данного вектора на косинус угла между этим вектором и соответствующим базисным вектором, т. е.

$$x = |\vec{p}| \cdot \cos\alpha,\ \ y = |\vec{p}| \cdot \cos\beta,\ z = |\vec{p}| \cdot \cos\gamma.$$

6.075. Найти косинусы углов между вектором $6\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$ и каждым из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Решение. Пусть $6\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c} = \vec{p}$, $\angle(\vec{p}, \vec{a}) = \alpha$, $\angle(\vec{p}, \vec{b}) = \beta$, $\angle(\vec{p}, \vec{c}) = \varphi$. Тогда, учитывая, что $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, получаем:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{p} \cdot \vec{a}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{(6\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}) \cdot a}{\sqrt{(6\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c})^2} \cdot 1} =$$

$$= \frac{6a^2}{\sqrt{36a^2 + 9b^2 + 4c^2}} = \frac{6 \cdot 1}{\sqrt{36 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 4 \cdot 1}} = \frac{6}{7};$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{p} \cdot \vec{b}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{a}|}\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{b}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{(6\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}) \cdot \vec{b}}{\sqrt{(6\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c})^2} \cdot 1} =$$

$$= \frac{-3\vec{b}^2}{\sqrt{36\vec{a}^2 + 9\vec{b}^2 + 4\vec{c}^2}} = \frac{-3 \cdot 1}{\sqrt{36 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 4} \cdot 1} = -\frac{3}{7};$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{c}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{(6\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}) \cdot \vec{c}}{\sqrt{(6\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c})^2} \cdot 1} =$$

$$= \frac{2c^2}{\sqrt{36a^2 + 9v^2 + 4c^2}} = \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{36 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 4} \cdot 1} = \frac{2}{7}.$$

После решения этой задачи целесообразно обратить внимание учащихся на тот факт, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\varphi = \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(-\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 = 1.$$

6.081. а) Следует ли из $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, что $\vec{b} = \vec{c}$? б) Известно, что для любого вектора $\vec{p}$ верно $\vec{a} \cdot \vec{p} = \vec{b} \cdot \vec{p}$. Верно ли, что $\vec{a} = \vec{b}$?

Решение. а) Из $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ следует $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$, откуда $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$.

б) Из $\vec{a} \cdot \vec{p} = \vec{b} \cdot \vec{p}$ следует $\vec{p} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$. Если вектор $\vec{p}$ не перпендикулярен вектору $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$, то выполнение условия $\vec{p} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ для любого вектора $\vec{p}$ возможно лишь при $\vec{a} - \vec{b} = 0$, т. е. при $\vec{a} = \vec{b}$.

6.089. В правильном тетраэдре $PABC$ на ребре PC взята точка E такая, что $PE : EC = 1 : 2$, и на медиане AF грани APB отмечена точка M — центроид грани APB. Найти длину отрезка ME, если длина ребра тетраэдра равна a.

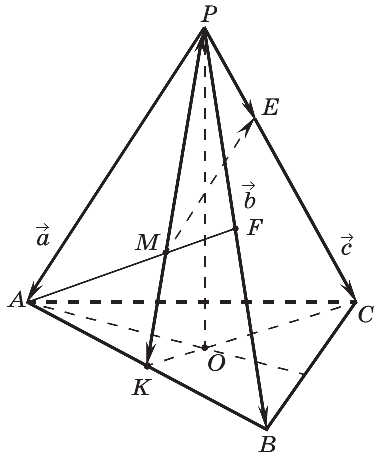


Рис. 124

Решение. Обозначим $\overrightarrow{PA} = \vec a$, $\overrightarrow{PB} = \vec b$, $\overrightarrow{PC} = \vec c$ (рис. 124). Тогда

$$\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PE} =$$

$$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{PK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PC} =$$

$$= -\frac{1}{3}(\vec a + \vec b) + \frac{1}{3}\vec c = \frac{1}{3}(-\vec a - \vec b + \vec c).$$

Учитывая, что $\vec a \cdot \vec b = \vec a \cdot \vec c = \vec b \cdot \vec c = \vec a\| \cdot |\vec a| \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$, получаем:

$$ME = |\overrightarrow{ME}| = \sqrt{\overrightarrow{ME}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}(-\vec a - \vec b + \vec c)\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\vec a^2 + \vec b^2 + \vec c^2 + 2\vec a \cdot \vec b - 2\vec a \cdot \vec c - 2\vec b \cdot \vec c} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

6.090. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна a, высота BB_1 равна h. Найти угол между прямыми AB_1 и BC_1.

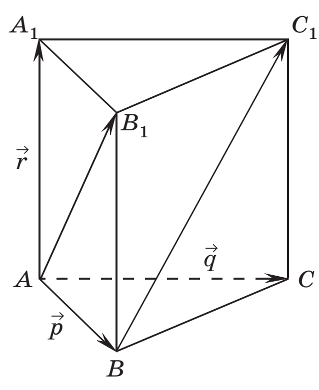


Рис. 125

Решение. Обозначим $\overrightarrow{AB} = \vec p$, $\overrightarrow{AC} = \vec q$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec r$ (рис. 125), $\angle(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{BC_1}) = \beta$. Тогда

$$\overrightarrow{AB_1} = \vec p + \vec r, \ \overrightarrow{BC_1} = -\vec p + \vec q + \vec r,$$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{AB_1}| \cdot |\overrightarrow{BC_1}|}.$$

Учитывая, что $\vec{p} \cdot \vec{r} = \vec{q} \cdot \vec{r} = 0$, $\vec{p} \cdot \vec{q} = \dfrac{a^2}{2}$, находим:

$$|\overrightarrow{AB_1}| = \sqrt{(\vec{p} + \vec{r})^2} = \sqrt{a^2 + h^2},\ |\overrightarrow{BC_1}| = \sqrt{(-\vec{p} + \vec{q} + \vec{r})^2} =$$
$$= \sqrt{a^2 + h^2},\ \overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = (\vec{p} + \vec{r})(-\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}) = \frac{2h^2 - a^2}{2}.$$

Тогда $\cos\beta = \dfrac{|2h^2 - a^2|}{2(a^2 + h^2)}$.

Задачи к главе 6

6.106. Можно ли составить: а) треугольник из медиан данного треугольника; б) замкнутую ломаную из отрезков, идущих из каждой вершины тетраэдра в точку пересечения медиан противоположной грани?

Решение. а) Пусть AM, BK и CP — медианы треугольника ABC. Найдём сумму векторов $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BK}$ и $\overrightarrow{CP}$:

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CP} =$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) =$$
$$= \frac{1}{2}((\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC})) = \frac{1}{2} \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

Это означает, что если вектор $\overrightarrow{BK}$ отложить от точки M, а вектор $\overrightarrow{CP}$ — от точки K, то точка P совпадёт с точкой A, т. е. ломаная, состоящая из трёх звеньев, окажется замкнутой, что и свидетельствует о том, что из медиан треугольника ABC можно составить новый треугольник.

б) Пусть M, K, T и H — точки пересечения медиан (центроиды) граней тетраэдра $PABC$, противолежащих его вершинам соответственно P, A, B и C. Тогда

$$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CH} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) +$$
$$+ \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BP}) +$$
$$+ \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CP}) = \frac{1}{3}((\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) +$$
$$+ (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PB}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CP})) = \frac{1}{3} \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

Рассуждения, аналогичные предыдущим, приводят к выводу: из отрезков PM, AK, BT и CH можно составить замкнутую ломаную.

6.107. Точки A_1, B_1 и C_1 взяты на сторонах соответственно BC, AC и AB треугольника ABC так, что $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A$. Доказать, что отрезки, равные AA_1, BB_1 и CC_1, являются сторонами некоторого треугольника.

Решение. Пусть $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = k$.

Тогда $\overrightarrow{AC_1} = k\overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{BA_1} = k\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{CB_1} = k\overrightarrow{B_1A}$.

Находим: $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC_1} =$

$= \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{AA_1}$ или $(1 + k)\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$. Аналогично $(1 + k)\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{BA}$, $(1 + k)\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + k\overrightarrow{CB}$.

После сложения полученных трёх равенств получаем:

$(1 + k)(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + k(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) = \vec{0} + k \cdot \vec{0} = \vec{0}$. Так как $k \neq -1$, то $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$. Это означает, что из отрезков, равных AA_1, BB_1 и CC_1, можно образовать треугольник.

6.110. *Отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с центроидором противолежащей грани, называется медианой тетраэдра.* Доказать, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и эта точка делит каждую из медиан в отношении $3 : 1$, считая от вершины.

Решение. Пусть M — точка, делящая медиану PH_1 тетраэдра $PABC$ в отношении $PM : MH_1 = 3 : 1$, где H_1 — центроид грани ABC (рис. 126).

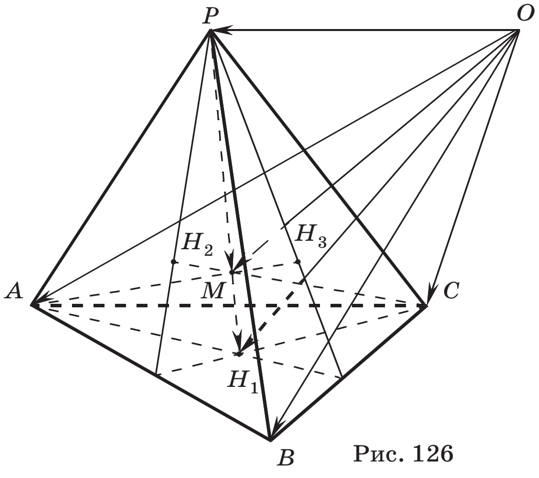


Рис. 126

Для любой точки O пространства выполняется

$$\overrightarrow{OH_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OP} + \frac{3}{4}\overrightarrow{PH_1} = \overrightarrow{OP} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OH_1} - \frac{3}{4}\overrightarrow{OP} =$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{OP} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}).$$

Аналогично доказывается, что для точек K, T и E, делящих остальные три медианы тетраэдра в отношении 3 : 1, считая от соответствующих вершин, выполняется $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OE} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OM}$. Это означает, что точки M, K, T и E совпадают, что и требовалось доказать.

6.116. $KABC$ — тетраэдр. Какую фигуру образуют точки M такие, что: а) $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + x\overrightarrow{KC}$; б) $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + y\overrightarrow{KB} + x\overrightarrow{KC}$; в) $\overrightarrow{KM} = z\overrightarrow{KA} + y\overrightarrow{KB} + x\overrightarrow{KC}$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Решение. а) Пусть $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{KH}$ (рис. 127, *а*). При $x = 0$ получаем $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KP}$, т. е. точка M совпадает с P; при $x = 1$ получаем $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{KH}$, т. е. M совпадает с H. При любом $x \in (0;\ 1)$ концом

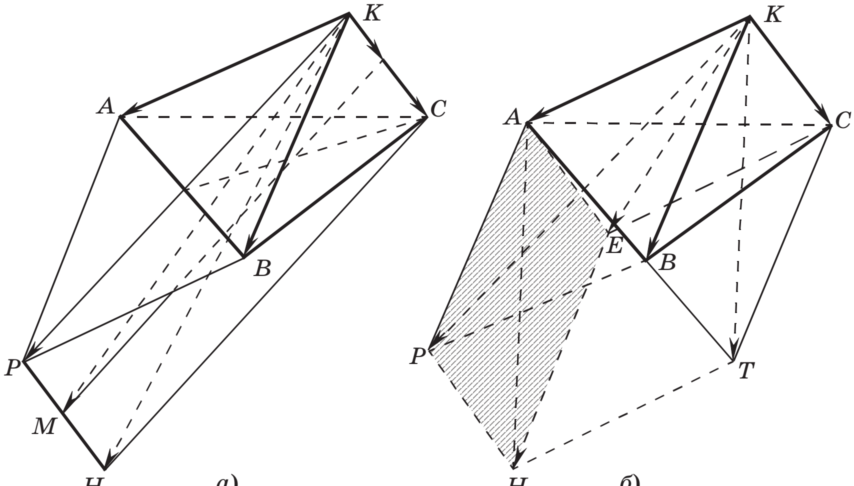


Рис. 127

вектора $x\overrightarrow{KC}$ является внутренняя точка отрезка KC, а концом вектора $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + x\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{KP} + x\overrightarrow{KC}$ — внутренняя точка отрезка PH. Таким образом, искомое множество точек M — отрезок PH.

б) Пусть $\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{KT}$, $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{KE}$, тогда $\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{KT} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AH}$ (рис. 127, *б*). Если $\overrightarrow{KA} = \vec{0}$, то при $x = 1$, $y = 1$ получаем $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{KT}$, т. е. точка M совпадает с вершиной T параллелограмма $BKCT$, а при любых $x \in [0;\ 1]$, $y \in [0;\ 1]$ точка M заполняет этот параллелограмм. Тогда при $\overrightarrow{KA} \neq \vec{0}$ и любых $x \in [0;\ 1]$, $y \in [0;\ 1]$ конец M вектора $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + y\overrightarrow{KB} + x\overrightarrow{KC}$ заполняет параллелограмм $PAEH$, равный параллелограмму $BKCT$, причём соответственные стороны этих параллелограммов равны и параллельны.

в) При любом $z \in [0;\ 1]$ конец M вектора $\overrightarrow{KM} = z\overrightarrow{KA} + y\overrightarrow{KB} + x\overrightarrow{KC}$ заполняет параллелограмм, стороны которого равны и параллельны сторонам параллелограмма $BKCT$. Тогда при всех $z \in [0;\ 1]$ множество всех точек M, для которых $\overrightarrow{KM} = z\overrightarrow{KA} + y\overrightarrow{KB} + x\overrightarrow{KC}$, образует параллелепипед, основаниями которого являются параллелограммы $BKCT$ и $PAEH$ (см. рис. 127, *б*).

6.119. В основании пирамиды $MABCD$ лежит трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD = 3BC$). На ребре MD отметили такую точку K, что $KM : KD = 2 : 3$; точка P — середина MB. В каком отношении, считая от точки M, плоскость AKP делит ребро MC?

Решение. Строим точки $O = BD \cap KP$, $T = BC \cap AO$, $H = T \cap MC$. H — искомая точка пересечения плоскости AKP и прямой MC (рис. 128). Найдём отношение $MH : HC$.

Примем векторы $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MD} = \vec{c}$ в качестве базисных векторов. Так как $H \in (APK)$, то

$$\overrightarrow{MH} = x \cdot \overrightarrow{MA} + y \cdot \overrightarrow{MP} + z \cdot \overrightarrow{MK} \text{ при } x + y + z = 1.$$

Учитывая условие задачи, получаем

$$\overrightarrow{MH} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b}\right) + z \cdot \left(\frac{2}{5}\vec{c}\right) = x \cdot \vec{a} + \left(\frac{1}{2}y\right) \cdot \vec{b} + \left(\frac{2}{5}z\right) \cdot \vec{c}$$

при $x + y + z = 1$.

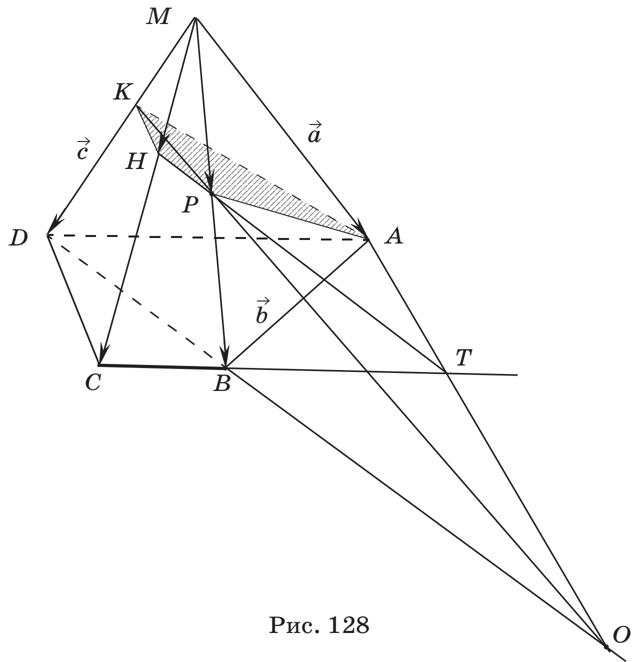


Рис. 128

Так как $MH \parallel MC$, то $\overrightarrow{MH} = t \cdot \overrightarrow{MC}$. Найдём значение t. Имеем:

$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MB} + \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MA}) =$

$= -\dfrac{1}{3}\vec{a} + \vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c}$. Из условия $\overrightarrow{MH} = t \cdot \overrightarrow{MC}$ находим:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3}t, \\ \dfrac{1}{2}y = t, \\ \dfrac{6}{5}z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3}t, \\ y = 2t, \\ z = \dfrac{5}{6}t. \end{cases}$$

Тогда из условия $x + y + z = 1$ получаем $-\dfrac{1}{3}t + 2t + \dfrac{5}{6}t = 1$, откуда $t = \dfrac{2}{5}$. Это означает, что $MH = \dfrac{2}{5}MC$ или $MH : MC = 2 : 5 \Rightarrow MH : HC = 2 : 3$.

6.120. $PABC$ — тетраэдр; b_1, b_2, b_3 — биссектрисы соответственно углов BPC, CPA, APB. Доказать, что если биссектрисы b_1, b_2 взаимно перпендикулярны, то каждая из них перпендикулярна биссектрисе b_3.

Решение. Пусть $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ — единичные векторы с общим началом P (рис. 129), т. е. $\vec{a}_1^2 = \vec{a}_2^2 = \vec{a}_3^2 = 1$. Тогда векторы $\vec{c}_1 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3$, $\vec{c}_2 = \vec{a}_3 + \vec{a}_1$, $\vec{c}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ направлены по биссектрисам соответственно b_1, b_2, b_3.

Если $b_1 \perp b_2$, то $\vec{c}_1 \perp \vec{c}_2$, поэтому $\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 = 0$. Это означает, что $(\vec{a}_2 + \vec{a}_3) \cdot (\vec{a}_3 + \vec{a}_1) = 0$, т. е. $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 + \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 + \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1 + 1 = 0$. Таким образом, из условия задачи следует, что для введённых единичных векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ справедливо равенство:

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 + \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 + \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1 + 1 = 0.$$

Теперь, с учётом этого равенства, получаем:

$$\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_3 = (\vec{a}_3 + \vec{a}_1) \cdot (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1 + \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_2 + \vec{a}_1^2 + \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 =$$

$$= \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 + \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 + \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1 + 1 = 0, \text{ откуда } \vec{c}_2 \perp \vec{c}_3 \Rightarrow b_2 \perp b_3.$$

Аналогично доказывается, что $b_1 \perp b_3$.

6.121. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, имеющие общую вершину, видны из точки пересечения его диагоналей под углами α, β и γ. Доказать, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$.

Решение. Обозначим: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ (рис. 130); $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = p$; $\angle AOB = \alpha$, $\angle BOC = \beta$, $\angle BOB_1 = \gamma$.

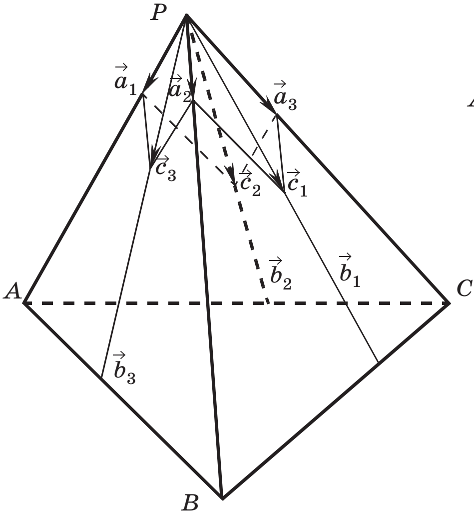


Рис. 129

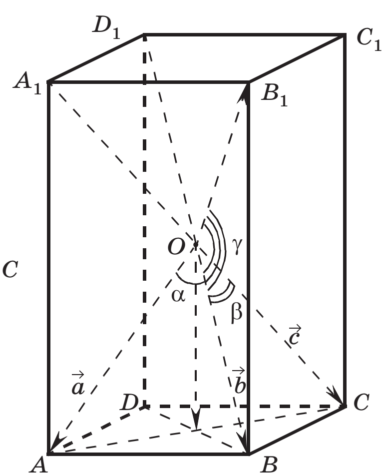


Рис. 130

Тогда:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{p^2}; \qquad \cos\beta = \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{p^2};$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{b}\cdot\overrightarrow{OB_1}}{|\vec{b}|\cdot\left|\overrightarrow{OB_1}\right|} = \frac{\vec{b}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BB_1})}{p^2} = \frac{\vec{b}\cdot(\vec{b}-\vec{a}-\vec{c})}{p^2} =$$

$$= \frac{\vec{b}^2-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{c}}{p^2}.$$

Значит,

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{p^2} + \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{p^2} + \frac{\vec{b}^2-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{c}}{p^2} = \frac{\vec{b}^2}{p^2} = 1.$$

6.124. Из вершины параллелепипеда проведены три диагонали его граней. На этих диагоналях (как на рёбрах) построен новый параллелепипед. Доказать, что противолежащая вершина данного параллелепипеда является серединой диагонали построенного параллелепипеда.

Решение. Данный и построенный параллелепипеды имеют общую вершину A. Пусть C_2 — вершина построенного параллелепипеда, противоположная вершине A.

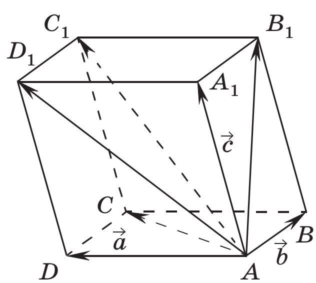


Рис. 131

Примем векторы $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$ в качестве базисных (рис. 131). Тогда: $\overrightarrow{AC_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{AB_1} = \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{AD_1} = \vec{a} + \vec{c}$. Находим $\overrightarrow{AC_2} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD_1} = 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 2\overrightarrow{AC_1}$. Это означает, что точка C_1 — середина диагонали AC_2 построенного параллелепипеда.

Глава 7. Координатный метод в пространстве

§ 24. Декартова прямоугольная система координат в пространстве

Материал пунктов 24.1—24.3 является продолжением темы предыдущей главы с той лишь разницей, что под любым вектором пространства понимается упорядоченная тройка действительных чисел — декартовых прямоугольных координат этого вектора в ортонормированном базисе.

Теперь учащиеся должны научиться определять, коллинеарны векторы или не коллинеарны, перпендикулярны они или не перпендикулярны, компланарны три данных вектора или не компланарны, если известны координаты этих векторов; должны уметь находить углы между векторами, заданными своими прямоугольными координатами, а также длину вектора и его проекции на оси координат, зная координаты этого вектора.

При изучении п. 24.1—24.3 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

- понимать и объяснять определение декартова прямоугольного базиса в пространстве;
- понимать и объяснять определение декартовых прямоугольных координат вектора в пространстве;
- понимать и объяснять в координатной форме: выражение скалярного произведения и условие перпендикулярности двух векторов; признак коллинеарности двух векторов, условие компланарности трёх векторов; формулу для вычисления длины вектора и угла между двумя векторами;
- понимать и объяснять определение линейной комбинации векторов с заданными коэффициентами;
- понимать и объяснять свойства линейных операций над векторами, заданными своими координатами;
- понимать и объяснять геометрический смысл декартовых прямоугольных координат вектора;
- изображать вектор по его координатам в декартовом прямоугольном базисе в пространстве;
- грамотно (безошибочно) выполнять алгебраические операции над векторами, заданными своими координатами;
- в координатной форме: вычислять скалярное произведение двух векторов и определять, перпендикулярны ли они; определять, коллинеарны (компланарны) ли данные векторы; находить длину вектора; находить величину угла между двумя векторами;
- задавать на данном изображении многогранника векторный базис, после чего правильно записывать разложение вектора по базису;
- определять на изображениях куба, пирамиды, параллелепипеда векторно-координатным методом взаимное расположение точек, прямых и плоскостей;
- решать геометрические задачи координатным методом, для чего переводить условие геометрической задачи в коор-

динатную терминологию и символику, затем грамотно (безошибочно) выполнять соответствующие алгебраические операции над координатами векторов и, наконец, полученный в координатной форме результат верно переводить обратно, на язык чисто геометрический.

24.4, 24.5. Декартовы прямоугольные координаты точки. Решение простейших задач стереометрии в координатах

В данном разделе предлагаются учебные задачи, при решении которых учащиеся определяют ту или иную числовую характеристику геометрической фигуры, пользуясь формулами расстояния между двумя точками и деления отрезка в данном отношении. При этом учащимся следует пояснить, что речь идёт о делении направленного отрезка.

При изучении п. 24.4, 24.5 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

- понимать и объяснять в координатной форме: формулу для вычисления длины вектора и угла между двумя векторами; формулу расстояния между двумя точками, деления отрезка в данном отношении;
- формулировать определение декартовых прямоугольных координат точки в пространстве;
- выводить в координатной форме формулы нахождения: расстояния между двумя точками; координат точки, делящей отрезок в данном отношении; координаты середины отрезка;
- решать в координатной форме аффинные и метрические задачи, используя в качестве объектов изучения куб, прямоугольный параллелепипед, правильный тетраэдр, правильную пирамиду, правильную призму.

7.037. Найти координаты такой точки C плоскости Oxy, которая лежит на одной прямой с точками $A(3; -8; 7)$ и $B(-1; 2; -7)$. Какая из точек A, B, C лежит между двумя другими?

Решение. Пусть искомая точка $C(x; y; 0)$ плоскости Oxy делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{AC}{CB}$. Тогда $0 = \frac{7 + \lambda \cdot (-7)}{1 + \lambda}$, откуда $\lambda = 1$. Значит, точка C лежит между A и B, являясь серединой отрезка AB, причём $x = \frac{3 - 1}{2} = 1$, $y = \frac{-8 + 2}{2} = -3$, т. е. $C(1; -3; 0)$.

7.038. Существует ли на оси Oz точка, лежащая на одной прямой с точками $A(-1; 3; 5)$ и $B(2; 2; 8)$?

Решение. Если точка $C(0; 0; z)$ прямой AB принадлежит оси Oz и делит отрезок AB в отношении $\lambda = \dfrac{AC}{CB}$, то должно существовать единственное значение λ, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{-1 + 2\lambda}{1 + \lambda} = 0, \\ \dfrac{3 + 2\lambda}{1 + \lambda} = 0. \end{cases}$$

Находим $\lambda = 0{,}5$ — решение первого уравнения системы, $\lambda = -1{,}5$ — решение её второго уравнения. Это означает, что прямая AB не пересекает ось Oz.

7.042. Лежат ли точки A, B, C и E в одной плоскости, если: а) $A(-2; -13; 3)$, $B(1; 4; 1)$, $C(-1; -1; -4)$, $E(0; 0; 0)$; б) $A(0; 1; 0)$, $B(3; 4; -1)$, $C(-2; -3; 0)$, $E(2; 0; 3)$; в) $A(5; -1; 0)$, $B(-2; 7; 1)$, $C(12; -15; -17)$, $E(1; 1; -2)$?

Решение. а) Точки A, B, C и E лежат в одной плоскости, если для векторов $\overrightarrow{AB}(3; 17; -2)$, $\overrightarrow{AC}(1; 12; -7)$ и $\overrightarrow{AE}(2; 13; -3)$ существуют такие (одновременно не равные нулю) числа x и y, что $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AE}$. Это означает, что должна иметь ненулевое решение система уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ 17x + 13y = 12, \\ -2x - 3y = -7. \end{cases}$$

Так как уравнение $17x + 13y = 12$ является алгебраической суммой уравнения $3x + 2y = 1$, умноженного на 5, и уравнения $2x + 3y = 7$, то эта система равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ 2x + 3y = 7, \end{cases}$$

решением которой является пара чисел: $x = -\dfrac{11}{5}$, $y = \dfrac{19}{5}$. Таким образом, получаем $5\overrightarrow{AC} + 11\overrightarrow{AB} - 19\overrightarrow{AE} = \vec{0}$. Значит, векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AE}$ компланарны, поэтому точки A, B, C и E лежат в одной плоскости.

Аналогично решаются задачи б) и в).

7.059. Даны точки $A(-1; 3; 8)$ и $B(-1; 2; 9)$. Найти все такие точки C плоскости Oyz, что треугольник ABC — равносторонний.

Решение. Пусть $C(0; y; z)$ — искомая точка. Так как $BC^2 = AC^2 = AB^2 = (-1 + 1)^2 + (2 - 3)^2 + (9 - 8)^2 = 2$, то получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 1 + (y - 3)^2 + (z - 8)^2 = 2, \\ 1 + (y - 2)^2 + (z - 9)^2 = 2, \end{cases}$$

решением которой являются тройки чисел $(0; 2; 8)$ и $(0; 3; 9)$. Значит, искомыми являются точки $C_1(0; 2; 8)$ или $C_2(0; 3; 9)$.

7.066. Основание ABC правильного тетраэдра $PABC$ лежит в плоскости Oxy так, что вершины A и C имеют координаты: $A(0; 0; 0)$, $C(4; 0; 0)$. Найти координаты: а) остальных вершин тетраэдра; б) центроидов всех его граней.

Решение. Пусть M — центроид $\triangle ABC$, $K(2; 0; 0)$ — середина AC (рис. 132). Так как $BK = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ и $BK \perp Ox$, то $B(2; 2\sqrt{3}; 0)$. Известно, что для любой точки S пространства и центроида M треугольника ABC имеет место $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$. Приняв в качестве S точку A, получаем: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, значит, $\overrightarrow{AM}\left(2; \frac{2\sqrt{3}}{3}; 0\right)$, откуда $M\left(2; \frac{2\sqrt{3}}{3}; 0\right)$.

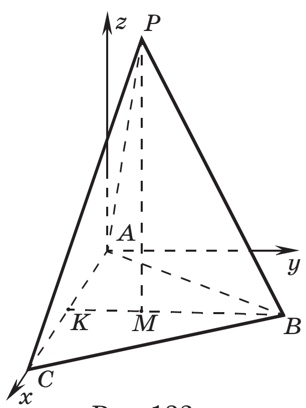


Рис. 132

Учитывая, что высота правильного тетраэдра с ребром a равна $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ и $MP \perp (Oxy)$, находим координаты вершины P: $P\left(2; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{4\sqrt{6}}{3}\right)$.

Если M_1, M_2, M_3 — центроиды граней соответственно PAB, PBC, PAC, то соотношение $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$, справедливое для любой точки S пространства и центроида M треугольника ABC, применённое последовательно для пар: M_1 и $\triangle PAB$, M_2 и $\triangle PBC$, M_3 и $\triangle PAC$ и точки A, позволяет найти координаты центроидов M_1, M_2 и M_3:

$$M_1\left(\frac{4}{3};\ \frac{8\sqrt{3}}{9};\ \frac{4\sqrt{6}}{9}\right),\ M_2\left(\frac{8}{3};\ \frac{8\sqrt{3}}{9};\ \frac{4\sqrt{6}}{9}\right),\ M_3\left(2;\ \frac{2\sqrt{3}}{9};\ \frac{4\sqrt{6}}{9}\right).$$

7.072. Даны точки $A(2;\ 3;\ 1)$ и $B(-1;\ -2;\ 3)$. Найти все такие точки C на оси Oz, что треугольник ABC — прямоугольный.

Решение. Пусть $C(0;\ 0;\ z)$ — искомая точка. Тогда имеем: $\overrightarrow{CA}(2;\ 3;\ 1-z)$, $\overrightarrow{BC}(1;\ 2;\ z-3)$, $\overrightarrow{BA}(3;\ 5;\ -2)$.

Для треугольника ABC возможны случаи:

1) $\angle ACB = 90°$.

Имеем: $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow 2 + 6 + (1-z)\cdot(z-3) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow z_1 = -1,\ z_2 = 5$. Тогда получаем две точки: $(0;\ 0;\ -1)$ и $(0;\ 0;\ 5)$.

2) $\angle BAC = 90°$.

Имеем: $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \Rightarrow 6 + 15 - 2(1-z) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow z = -9{,}5$. Получаем точку $(0;\ 0;\ -9{,}5)$.

3) $\angle ABC = 90°$.

Имеем: $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \Rightarrow 3 + 10 - 2(z-3) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow z = 9{,}5$. Получаем точку $(0;\ 0;\ 9{,}5)$.

§ 25. Задание фигур уравнениями и неравенствами

25.1, 25.2. Уравнение сферы. Уравнение плоскости

Первые задачи этого параграфа — опорные (базисные). Учащимся следует пояснить, что для составления уравнения сферы достаточно найти координаты её центра и радиус. Для составления общего уравнения плоскости достаточно найти координаты *любой* её точки и координаты *любого* вектора, перпендикулярного этой плоскости (вектора нормали плоскости), при этом в качестве нормального вектора выбирается тот, координаты которого наиболее удобны при вычислениях, возникающих при составлении уравнения.

Если плоскость проходит через данную точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ параллельно данной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, то её уравнение можно записать в виде $A(x - x_0) + B(y - y_0) +$ $+ C(z - z_0) = 0$, затем преобразовать.

При составлении общего уравнения плоскости α, проходящей через две данные точки K и H перпендикулярно данной плоскости или данной прямой, любую из точек K и H принимаем в качестве $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Координаты $(a; b; c)$ вектора $\vec{n}$ нормали плоскости α являются решением системы двух однородных линейных уравнений с тремя неизвестными a, b, c (см. **7.117, 7.118**). Так как все векторы, перпендикулярные плоскости α, коллинеарны между собой, то одной из координат a, b, c можно придать допустимое значение (в зависимости от контекста), после чего решается система двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Полученную тройку чисел $(a; b; c)$ можно «нормировать», умножая на одно и то же число, отличное от нуля.

Перед решением задач на взаимное расположение двух сфер, сферы и плоскости (**7.107, 7.108, 7.110, 7.111, 7.127, 7.128, 7.129, 7.130**), отнесённых в данном разделе к стереометрическим задачам повышенной сложности, следует пояснить учащимся аналогичную ситуацию при решении планиметрических задач на взаимное расположение двух окружностей, окружности и прямой. Только после такого анализа геометрической ситуации (на наглядном уровне) можно приступать к решению указанных задач координатным методом.

При изучении 25.1, 25.2 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

• понимать и объяснять в координатной форме: различные уравнения плоскости, сферы; формулу для вычисления угла между двумя плоскостями, условия их параллельности и перпендикулярности; формулу для вычисления расстояния от данной точки до данной плоскости; уравнения координатных плоскостей;

• понимать и объяснять, что для составления уравнения сферы достаточно знать или найти координаты её центра и радиус. Для составления общего уравнения плоскости достаточно знать или найти координаты *любой* её точки и координаты *любого* вектора $\vec{n}$, перпендикулярного этой плоскости (вектора нормали к плоскости);

• выводить в координатной форме:

— уравнение сферы и неравенство шара;

— общее уравнение плоскости; уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору;

— частные случаи общего уравнения плоскости и производить их графическую иллюстрацию;

— уравнение плоскости в отрезках;

— формулу расстояния от точки до плоскости;

— формулу вычисления угла между двумя плоскостями, условие их параллельности и перпендикулярности;

- решать задачи в координатной форме: на составление уравнения плоскости, сферы; на вычисление угла между двумя плоскостями по заданным их уравнениям, определяя при этом, параллельны (перпендикулярны) ли они; на вычисление расстояния: от данной точки до данной плоскости; между параллельными плоскостями;
- решать с помощью уравнений плоскостей аффинные и метрические задачи стереометрии на построение, доказательство и вычисление, используя в качестве объектов изучения куб, прямоугольный параллелепипед, правильный тетраэдр, правильную пирамиду, правильную призму, сферу.

7.102. На плоскости $2x + 3y - 5z - 1 = 0$ найти такую точку $M_0(x;\ y;\ z)$, что отрезок MM_0 перпендикулярен этой плоскости, если $M(1;\ 2;\ -1)$.

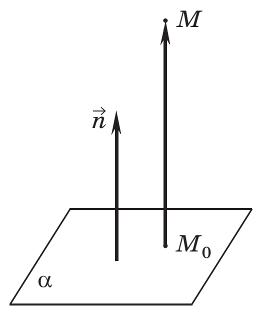


Рис. 133

Решение. Так как вектор $\overrightarrow{MM_0}(x - 1;\ y - 2;\ z + 1)$ коллинеарен вектору $\vec{n}(2;\ 3;\ -5)$ нормали данной плоскости α (рис. 133), то их одноимённые координаты пропорциональны, т. е. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{-5} = t$, откуда $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 3t$, $z = -1 - 5t$.

Значение t найдём из условия принадлежности точки M_0 плоскости α (координаты точки M_0 удовлетворяют уравнению этой плоскости). Получаем

$$2(1 + 2t) + 3(2 + 3t) - 5(-1 - 5t) - 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{6}{19}.$$

Тогда $x = \dfrac{7}{19}$, $y = \dfrac{20}{19}$, $z = \dfrac{11}{19}$, т. е. $M\left(\dfrac{7}{19};\ \dfrac{20}{19};\ \dfrac{11}{19}\right)$.

7.105. Сфера задана уравнением $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 4$. Найти координаты точки этой сферы: а) ближайшей к началу O системы координат; б) самой далёкой от точки O; в) ближайшей к каждой из координатных плоскостей; г) самой далёкой от каждой из координатных плоскостей; д) ближайшей к каждой из координатных осей; е) самой далёкой от каждой из координатных осей; ж) ближайшей к точке (3; 3; 6); з) самой далёкой от точки (3; 3; 6).

Решение. Центр $A(3;\ 3;\ 0)$ данной сферы принадлежит координатной плоскости Oxy, её радиус $R = 2$, причём $OA = 3\sqrt{2}$ (рис. 134).

а) Ближайшей к O точкой сферы является точка B её пересечения с отрезком OA, при этом $OB = OA - R = 3\sqrt{2} - 2$. Так как абсцисса и ордината точки B равны, то из уравнения $2x^2 = (3\sqrt{2} - 2)^2$ находим $x = 3 - \sqrt{2}$. Это означает, что $B(3 - \sqrt{2};\ 3 - \sqrt{2};\ 0)$.

б) Самой далёкой от точки O точкой сферы является вторая точка пересечения луча OA со сферой — точка C. Она удалена от O на расстоянии $OA + R = 3\sqrt{2} + 2$ и имеет координаты $x = y = 3 + \sqrt{2}$, $z = 0$, т. е. $C(3 + \sqrt{2};\ 3 + \sqrt{2};\ 0)$.

в) Самой близкой к (Oxz) является точка $P(3;\ 1;\ 0)$, к (Oyz) — точка $K(1;\ 3;\ 0)$, к (Oxy) — все точки окружности $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 4$, по которой сфера пересекает эту плоскость.

г) Самой далёкой точкой сферы от (Oxz) является точка $E(3;\ 5;\ 0)$, от (Oyz) — точка $H(5;\ 3;\ 0)$, от (Oxy) — точки $M(3;\ 3;\ 2)$ и $S(3;\ 3;\ -2)$.

д) Самой близкой точкой сферы к оси Ox является точка $P(3;\ 1;\ 0)$, к оси Oy — точка $K(1;\ 3;\ 0)$, к оси Oz — точка $B(3 - \sqrt{2};\ 3 - \sqrt{2};\ 0)$.

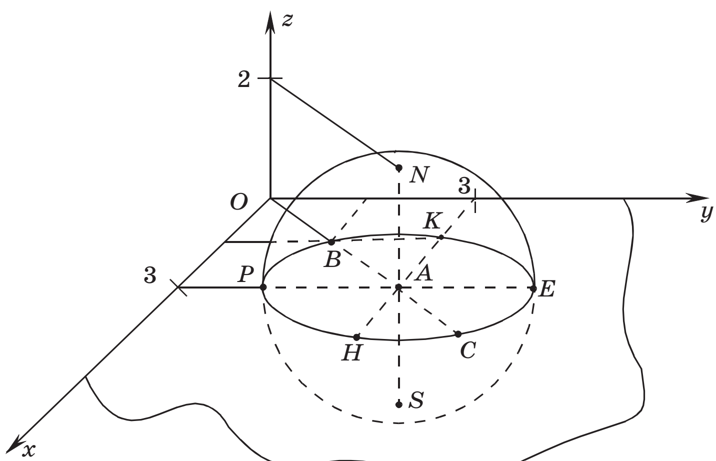


Рис. 134

е) Самой далёкой точкой сферы от оси Ox является точка $E(3;\ 5;\ 0)$, от оси Oy — точка $H(5;\ 3;\ 0)$, от оси Oz — точка $C(3 + \sqrt{2};\ 3 + \sqrt{2};\ 0)$.

ж) Ближайшей точкой сферы к точке $(3;\ 3;\ 6)$ является точка $N(3;\ 3;\ 2)$.

з) Самой далёкой точкой сферы от точки $(3;\ 3;\ 6)$ является точка $S(3;\ 3;\ -2)$.

7.107. Найти длину линии, состоящей из всех общих точек двух сфер $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 196$ и $(x + 3)^2 + (y + 6)^2 + (z + 7)^2 = 225$.

Решение. Данные уравнения задают соответственно сферу радиуса $R_1 = 14$ с центром $A(1;\ -3;\ 5)$ и сферу радиуса $R_2 = 15$ с центром $B(-3;\ -6;\ -7)$.

Пусть C — одна из точек пересечения сфер. Тогда получаем треугольник ABC, в котором

$$AB = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (-6 + 3)^2 + (-7 - 5)^2} = 13,$$
$$AC = 14,\ BC = 15.$$

При вращении треугольника ABC вокруг AB точка C «пробежит» окружность, радиус которой равен высоте CH этого треугольника. Так как $CH = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AB} = \dfrac{2\sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}}{13} = \dfrac{168}{13} = 12\dfrac{12}{13}$, то длина окружности пересечения данных сфер равна $2\pi \cdot \dfrac{168}{13} = 25\dfrac{11}{13}\pi$.

7.109. Написать уравнение плоскости, касающейся сферы $x^2 + 2x + y^2 + 2y + z^2 - 4z = 0$ в начале координат.

Решение. Исходное уравнение сферы приводится к виду $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 6$, из которого следует, что точка $A(-1;\ -1;\ 2)$ — центр этой сферы.

Так как плоскость касается сферы в начале координат, то она проходит через точку $O(0;\ 0;\ 0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{OA}(-1;\ -1;\ 2)$. Значит, уравнение плоскости имеет вид $x + y - 2z = 0$.

7.110. Написать уравнение сферы с центром $(1;\ 1;\ 2)$, касающейся сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 24$.

Решение. Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 24$ задаёт сферу радиуса $R = 2\sqrt{6}$ с центром $O(0;\ 0;\ 0)$. Расстояние между центрами этой сферы и касающейся её сферы равно $\sqrt{6}$. Значит, радиус касающейся сферы может быть равен или $2\sqrt{6} - \sqrt{6} = \sqrt{6}$, или $2\sqrt{6} + \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$. Поэтому уравнения этих сфер таковы: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 6$ или $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 54$.

7.116. Найти все точки плоскости $5x + 3y - z - 2 = 0$, равноудалённые от координатных плоскостей.

Решение. Если точка $M(x;\ y;\ z)$ равноудалена от координатных плоскостей, то она имеет равные по абсолютной величине координаты, т. е. $|x| = |y| = |z|$. Возможны следующие случаи.

1) $x = y = z$. Так как точка $M(x;\ x;\ x)$ лежит в плоскости α, заданной уравнением $5x + 3y - z - 2 = 0$, то её координаты удовлетворяют этому уравнению. Имеем $5x + 3x - x - 2 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \frac{2}{7}$. Тогда получаем $M\left(\frac{2}{7};\ \frac{2}{7};\ \frac{2}{7}\right)$.

2) $x = -y = -z$. Имеем $5x - 3x + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$. Тогда получаем $M\left(\frac{2}{3};\ -\frac{2}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$.

3) $x = y = -z$. Имеем $5x + 3x + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{9}$. Тогда получаем $M\left(\frac{2}{9};\ \frac{2}{9};\ -\frac{2}{9}\right)$.

4) $x = -y = z$. Имеем $5x - 3x - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$. Тогда получаем $M(2;\ -2;\ 2)$.

7.117. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M(-1;\ 2;\ 7)$ и $N(1;\ -9;\ 5)$ параллельно оси Oy.

Решение. Пусть $\vec{n}(a;\ b;\ c)$ — вектор нормали плоскости α, проходящей через точки M и N параллельно оси Oy. Так как $\vec{n} \perp \overrightarrow{MN}\,(2;\ -11;\ -2)$, $\vec{n} \perp \vec{j}\,(0;\ 1;\ 0)$, то $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$, $\vec{n} \cdot \vec{j} = 0$, поэтому координаты a, b и c вектора $\vec{n}$ получаем, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 2a - 11b - 2c = 0, \\ 1 \cdot b = 0. \end{cases}$$

Находим $a = c = 1$, $b = 0$. Значит, плоскость α имеет уравнение $1 \cdot (x + 1) + 0 \cdot (y - 2) + 1 \cdot (z - 7) = 0$ или $x + z - 6 = 0$.

7.118. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1;\ 3;\ 8)$ и $N(2;\ 5;\ -1)$ перпендикулярно плоскости $2x - y + z = 0$.

Решение. Так как плоскость α проходит через точки $M(1;\ 3;\ 8)$, $N(2;\ 5;\ -1)$ и перпендикулярна плоскости $2x - y + z = 0$, для которой вектор $\vec{p}(2;\ -1;\ 1)$ является вектором нормали, то в качестве вектора $\vec{n}(a;\ b;\ c)$, перпендикулярного плоскости α, можно принять вектор, перпендикулярный векторам $\overrightarrow{MN}$ и $\vec{p}$. Найдя координаты вектора $\vec{n}$, уравнение плоскости α можно записать в виде

$$a(x-1) + b(y-3) + c(z-8) = 0.$$

Так как $\vec{n} \perp \overrightarrow{MN}(1;\ 2;\ -9)$, $\vec{n} \perp \vec{p}(2;\ -1;\ 1)$, то $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$, $\vec{n} \cdot \vec{p} = 0$, поэтому координаты a, b и c вектора $\vec{n}$ получаем, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} a + 2b - 9c = 0, \\ 2a - b + c = 0. \end{cases}$$

Одним из решений этой системы является тройка чисел $(7;\ 19;\ 5)$. Тогда искомое уравнение плоскости α имеет вид: $7(x-1) + 19(y-3) + 5(z-8) = 0$ или $7x + 19y + 5z - 104 = 0$.

7.119. Изобразить множество точек пространства, для которых $|x| + |y| + |z| = 1$.

Решение. Возможны 8 различных случаев расположения точек пространства в каждом из восьми координатных октантов.

Пусть $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. При этом условии исходное уравнение равносильно уравнению $x + y + z = 1$, которое задаёт плоскость, пересекающую координатные оси в точках $A(0;\ 0;\ 1)$, $C(0;\ 1;\ 0)$ и $D(1;\ 0;\ 0)$, а координатные плоскости по отрезкам AC, AD и CD (рис. 135). Следовательно, при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ уравнение $x + y + z = 1$, равносильное исходному, задаёт треугольник ACD с вершинами на координатных осях, расположенный в первом координатном октанте.

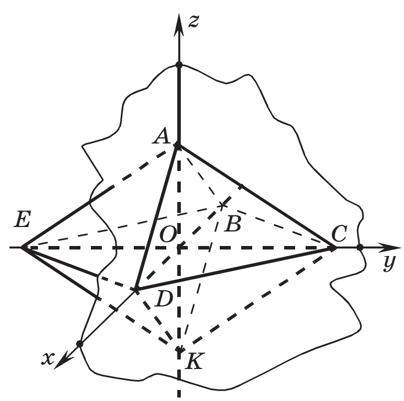


Рис. 135

Рассматривая остальные семь случаев, получим ещё семь треугольников с вершинами на координатных осях. Этими вершинами, кроме A, C и D, являются точки $B(-1;\ 0;\ 0)$, $K(0;\ 0;\ -1)$ и $E(0;\ -1;\ 0)$.

Таким образом, искомое множество точек представляет собой поверхность восьмигранника (правильного октаэдра) $ABCDEK$ (см. рис. 135).

7.123. Найти косинусы углов, образованных плоскостью $3x - 5y + z - 8 = 0$ и координатными плоскостями.

Решение. Обозначим α — плоскость, заданную уравнением $3x - 5y + z - 8 = 0$; $\angle(\alpha, (Oxy)) = \beta$, $\angle(\alpha, (Oxz)) = \gamma$, $\angle(\alpha, (Oyz)) = \varphi$; $\vec{n}(3; -5; 1)$ — вектор нормали к плоскости α. В качестве векторов нормалей к плоскостям Oxy, Oxz и Oyz примем соответственно базисные векторы $\vec{k}(0; 0; 1)$, $\vec{j}(0; 1; 0)$ и $\vec{i}(1; 0; 0)$. Тогда:

$$\cos\beta = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{k}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{k}|} = \frac{|3\cdot 0 + (-5)\cdot 0 + 1\cdot 1|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + 1^2}\cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{35}} \Rightarrow \beta = \arccos\frac{1}{\sqrt{35}};$$

$$\cos\gamma = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{j}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{j}|} = \frac{|3\cdot 0 + (-5)\cdot 1 + 1\cdot 0|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + 1^2}\cdot 1} = \frac{5}{\sqrt{35}} \Rightarrow \gamma = \arccos\frac{5}{\sqrt{35}};$$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{i}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{i}|} = \frac{|3\cdot 1 + (-5)\cdot 0 + 1\cdot 0|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + 1^2}\cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{35}} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{3}{\sqrt{35}}.$$

На этом примере можно убедиться, что

$$\cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\varphi = 1.$$

7.137. Даны точки $A(2; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$, $C(0; 0; 2)$. Найти: а) точки, равноудалённые от точек A, B, C и отстоящие от плоскости Oxz на расстоянии, равном 3; б) координаты центра сферы радиуса $\sqrt{19}$, проходящей через точки A, B и C.

Решение. а) Пусть $M(x; y; z)$ — любая точка искомого множества точек. Тогда $AM = BM = CM$, следовательно, $AM^2 = BM^2 = CM^2$.

Так как искомое множество точек принадлежит плоскостям $y = \pm 3$, то координаты этих точек найдём, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-2)^2, \\ (x-2)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y+2)^2 + z^2, \\ \left[\begin{array}{l} y = 3, \\ y = -3. \end{array}\right. \end{cases}$$

Решением этой системы являются тройки чисел $(3; -3; 3)$ и $(-3; 3; -3)$.

б) Так как центр $K(x;\ y;\ z)$ сферы, проходящей через точки A, B и C, равноудалён от этих точек, то для его координат справедливо $x = z = -y$.

Поэтому, найдя $KA^2 = 19$ и учитывая, что $x = z = -y$, получаем уравнение $3x^2 - 4x - 15 = 0$, корнями которого являются $x_1 = -\frac{5}{3}$, $x_2 = 3$. Значит, центрами сфер, проходящих через точки A, B и C, являются точки $\left(-\frac{5}{3};\ \frac{5}{3};\ -\frac{5}{3}\right)$ и $(3;\ -3;\ 3)$.

25.3, 25.4. Прямая в пространстве в координатах. Взаимное расположение прямой и плоскости в координатах

При решении задач на взаимное расположение двух прямых a и b в пространстве учащиеся должны увидеть направляющие векторы этих прямых соответственно $\vec{p}_1(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\vec{p}_2(b_1;\ b_2;\ b_3)$ из их параметрических уравнений и определить, параллельны ли они $\left(\text{используя признак: } \boldsymbol{a \parallel b \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}}\right)$, а также перпендикулярны ли эти прямые (используя признак: $\boldsymbol{a \perp b \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0}$). Если прямые не параллельны и не перпендикулярны, то угол между ними находится с помощью формулы:

$$\boldsymbol{\cos\varphi = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}}.$$

Аналогично, зная направляющий вектор $\vec{p}(a;\ b;\ c)$ прямой l и вектор $\vec{n}(A;\ B;\ C)$ нормали плоскости α, можно определить, параллельны ли они (с помощью признака: $l \parallel \alpha \Leftrightarrow a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = 0$), а также перпендикулярны ли $\left(\text{с помощью признака: } l \perp \alpha \Leftrightarrow \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}\right)$. Если данные прямая и плоскость не параллельны и не перпендикулярны, то угол между ними находится с помощью формулы:

$$\sin\angle(l;\ \alpha) = |\cos\angle(\vec{p};\ \vec{n})| = \frac{|a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Координаты точки пересечения прямой с плоскостью находят, решая систему из уравнений плоскости и прямой:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \\ z = z_0 + a_3 t. \end{cases}$$

При изучении п. 25.3, 25.4 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

• понимать и объяснять в координатной форме: различные уравнения прямой; формулу для вычисления угла между: двумя прямыми; прямой и плоскостью; условия их параллельности и перпендикулярности; уравнения координатных осей;

• выводить: уравнения прямой по точке и направляющему вектору; канонические и параметрические уравнения прямой; уравнения прямой по двум её точкам;

• находить точку пересечения прямой и плоскости;

• выводить в координатном виде формулу вычисления: угла между двумя прямыми, условие их параллельности и перпендикулярности; угла между прямой и плоскостью, условие их параллельности и перпендикулярности;

• решать задачи в координатной форме: на составление уравнения прямой, сферы; на вычисление угла между двумя прямыми, между прямой и плоскостью, заданными уравнениями, определяя при этом, параллельны (перпендикулярны) ли они; на вычисление расстояния: от данной точки до данной прямой; между параллельными прямыми; между скрещивающимися прямыми; на нахождение точки пересечения прямой и плоскости;

• решать с помощью уравнений прямых и плоскостей аффинные и метрические задачи стереометрии на построение, доказательство и вычисление, используя в качестве объектов изучения куб, прямоугольный параллелепипед, правильный тетраэдр, правильную пирамиду, правильную призму, сферу.

7.148. При каких значениях α и β точка $M(1; 5; 8)$ лежит на прямой

$$\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ x = 7 - \alpha t, \\ z = 8 + \beta t? \end{cases}$$

Решение. Точка $M(1;\,5;\,8)$ принадлежит прямой $\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 7 - \alpha t, \\ z = 8 + \beta t, \end{cases}$ если существуют такие значения t, α и β, что выполняется

$$\begin{cases} 1 = 3 + 2t, \\ 5 = 7 - \alpha t, \\ 8 = 8 + \beta t. \end{cases}$$

Подставив значение $t = -1$ — решение первого уравнения системы — во второе и третье её уравнения, находим $\alpha = -2$, $\beta = 0$, т. е. точка M принадлежит данной прямой при $\alpha = -2$, $\beta = 0$.

7.149. Написать параметрические уравнения каждой из прямых, по которым плоскость $3x + 8y + z = 11$ пересекается с координатными плоскостями.

Решение. Плоскость $\alpha(3x + 8y + z = 11)$ пересекает координатные оси Ox, Oy и Oz соответственно в точках $A\left(\frac{11}{3};\,0;\,0\right)$, $B\left(0;\,\frac{11}{8};\,0\right)$ и $C(0;\,0;\,11)$, значит, эта плоскость пересекает координатные плоскости Oxy, Oxz и Oyz соответственно по прямым AB, AC и BC, направляющими векторами которых служат векторы соответственно $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{11}{3};\;\frac{11}{8};\;0\right)$, $\overrightarrow{AC}\left(-\frac{11}{3};\,0;\,11\right)$ и $\overrightarrow{BC}\left(0;\,-\frac{11}{8};\,11\right)$. Тогда, принимая точки A, C и B в качестве «начальных» для прямых соответственно AB, AC и BC, получаем их параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = \dfrac{11}{3} - \dfrac{11}{3}t, \\ y = \dfrac{11}{8}t, \\ z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{11}{3}t, \\ y = 0, \\ z = 11 + 11t; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = \dfrac{11}{8} - \dfrac{11}{8}t, \\ z = 11t; \end{cases} \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

7.157. Определить взаимное расположение прямых

$$\begin{cases} x = 5 + 7t, \\ y = 2 - t, \\ z = 9 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 3 - 2u, \\ y = 5 + 3u, \\ z = 8 - u. \end{cases}$$

Решение. Так как координаты направляющих векторов данных прямых не пропорциональны, то эти прямые либо пересекаются, либо скрещиваются.

Для ответа на вопрос, имеют ли прямые общую точку, достаточно выяснить, имеет ли решение система уравнений:

$$\begin{cases} 5 + 7t = 3 - 2u, \\ 2 - t = 5 + 3u, \\ 9 = 8 - u. \end{cases}$$

Из уравнения $9 = 8 - u$ находим значение $u = -1$, которому соответствует точка (5; 2; 9) второй прямой, являющаяся при $t = 0$ точкой первой прямой. Сказанное означает, что прямые пересекаются.

7.165. Определить взаимное расположение прямой

$$\begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 4 + t \end{cases} \quad \text{и сферы } x^2 + y^2 + z^2 = 25.$$

Решение. Прямая может пересекать сферу в двух различных точках, касаться сферы или не иметь с ней общих точек. В координатном виде сказанное означает: система уравнений, составленная из уравнений прямой и сферы, имеет соответственно два различных решения, одно решение или является несовместимой.

Таким образом, решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x = 1 - 3t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 4 + t. \end{cases}$$

Подставив в первое уравнение вместо x, y и z их выражения через t, получаем уравнение $(1 - 3t)^2 + (2 + 2t)^2 + (4 + t)^2 = 25$, корнями которого являются $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{2}{7}$. Это означает, что прямая пересекает сферу в двух точках $\left(\frac{1}{7}; 2\frac{4}{7}; 4\frac{2}{7}\right)$ и (4; 0; 3).

7.168. Написать параметрические уравнения прямой, по которой пересекаются плоскости

$$2x + 3y - z = 6 \text{ и } x + y + z = 1.$$

Решение. Пусть данные плоскости $\alpha(2x + 3y - z = 6)$ и $\beta(x + y + z = 1)$ пересекаются по прямой m; $\vec{p}(a; b; c)$ — направляющий вектор прямой m.

Координаты вектора $\vec{p}$ найдём из условий его перпендикулярности каждому из векторов $\vec{n}_1(2;\ 3;\ -1)$ и $\vec{n}_2(1;\ 1;\ 1)$ нормалей соответственно плоскостей α и β. Имеем:

$$\begin{cases}\vec{p} \perp \vec{n}_1, \\ \vec{p} \perp \vec{n}_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{p} \cdot \vec{n}_1 = 0, \\ \vec{p} \perp \vec{n}_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a + 3b - c = 0, \\ a + b + c = 0.\end{cases}$$

Если $c = -1$, то $a = 4$, $b = -3$. Так как точка $(1;\ 1;\ -1)$ принадлежит каждой из плоскостей α и β, то она принадлежит прямой m. Тогда параметрические уравнения этой прямой можно записать в виде:

$$\begin{cases}x = 1 + 4t, \\ y = 1 - 3t, \\ z = -1 - t.\end{cases}$$

Замечание. Так как точка $(-3;\ 4;\ 0)$ принадлежит прямой m, то уравнения этой прямой можно записать в виде:

$$\begin{cases}x = -3 + 4t, \\ y = 4 - 3t, \\ z = -t.\end{cases}$$

7.176. Найти расстояние между прямыми

$$\begin{cases}x = t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = 2 + t\end{cases} \text{ и } \begin{cases}x = 3 + t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 2 + t.\end{cases}$$

Решение. Так как обе прямые

$$a: \begin{cases}x = t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = 2 + t\end{cases} \text{ и } b: \begin{cases}x = 3 + t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 2 + t\end{cases}$$

имеют один и тот же направляющий вектор $\vec{p}(1;\ 2;\ 1)$ и система уравнений

$$\begin{cases}t = 3 + t, \\ 3 + 2t = -1 + 2t, \\ 2 + t = 2 + t\end{cases}$$

не имеет решений, то $a \parallel b$.

Для нахождения расстояния между этими прямыми проведём через точку $A(0;\ 3;\ 2)$ прямой a плоскость α, перпендикулярную b (рис. 136). Тогда расстояние между точками A и $B = \alpha \cap b$ равно расстоянию между прямыми a и b.

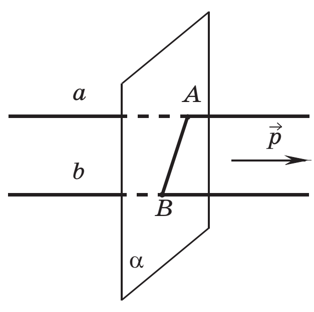


Рис. 136

Так как $a \perp \alpha$, то направляющий вектор $\vec{p}$ прямой a является вектором нормали плоскости α. Поэтому можем составить уравнение этой плоскости: $x + 2(y - 3) + (z - 2) = 0$ или $x + 2y + z - 8 = 0$.

Координатами точки $B = \alpha \cap b$ является решение системы уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + z - 8 = 0, \\ x = 3 + t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 2 + t, \end{cases}$$

составленной из уравнений плоскости α и прямой b. Решая её, получаем: $B\left(\frac{23}{6}; \frac{2}{3}; \frac{17}{6}\right)$. Тогда

$$\rho(a; b) = \rho(A; B) = \sqrt{\left(\frac{23}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{17}{6} - 2\right)^2} = \frac{5\sqrt{30}}{6}.$$

7.179. Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(3; 8; 1)$ параллельно плоскости $2x + y + z = 0$ и пересекающей ось Oy.

Решение. Пусть α — данная плоскость $2x + y + z = 0$, $\vec{n}(2; 1; 1)$ — вектор её нормали. Допустим, что прямая b проходит через точку $M(3; 8; 1)$ и пересекает ось Oy в точке $A(0; a; 0)$. Тогда вектор $\overrightarrow{AM}(3; 8 - a; 1)$ является направляющим для прямой b. Так как $b \parallel \alpha$, то $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$. Значит, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$, т. е. $2 \cdot 3 + 1 \cdot (8 - a) + 1 \cdot 1 = 0$, откуда $a = 15$. Тогда вектор $\overrightarrow{AM}$ имеет координаты $(3; -7; 1)$, а параметрические уравнения прямой b записываются в виде:

$$\begin{cases} x = 3 + 3t, \\ y = 8 - 7t, \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

§ 26. Расстояние от точки до плоскости

Пользуясь формулой расстояния от точки до плоскости, можно находить расстояния между параллельными плоскостями, между параллельными прямой и плоскостью, между скрещивающимися прямыми.

Если прямые a и b скрещиваются, то для нахождения расстояния между ними достаточно составить уравнение плоскости β, проходящей через одну из них (например, через a) параллельно другой прямой (прямой b); при этом координаты вектора $\vec{n}$ нормали плоскости β определяются из условия его перпендикулярности направляющим векторам $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ данных прямых. Найдя расстояние от «начальной» точки прямой b до плоскости β, получаем искомое расстояние между прямыми a и b.

При изучении § 26 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

- понимать и объяснять определение расстояния от данной точки до данной плоскости;
- понимать и объяснять, что расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из данной точки на эту плоскость;
- понимать и объяснять формулу для вычисления расстояния от данной точки до данной плоскости;
- в координатной форме: выводить формулу для вычисления расстояния от данной точки до данной плоскости; вычислять расстояние: от данной точки до данной плоскости (прямой); между параллельными плоскостями; между параллельными прямой и плоскостью; между скрещивающимися прямыми;
- решать с помощью уравнений прямых и плоскостей метрические задачи стереометрии на построение, доказательство и вычисление, используя в качестве объектов изучения куб, прямоугольный параллелепипед, правильный тетраэдр, правильную пирамиду, правильную призму, сферу, при этом верно и наглядно выполняя рисунки и корректно аргументируя утверждения логического, конструктивного и вычислительного характера.

7.186. Написать уравнение плоскости, содержащей ось Oy, если расстояние от этой плоскости до точки $M(-3;\ 8;\ 1)$ равно 1.

Решение. Плоскость α, содержащая ось Oy, задаётся уравнением $Ax + Cz = 0$ $(B = D = 0)$. Так как $\rho(M;\ \alpha) = 1$, то получаем:

$$\frac{|-3A + C|}{\sqrt{A^2 + C^2}} = 1 \Leftrightarrow 9A^2 - 6AC + C^2 = A^2 + C^2 \Leftrightarrow A(4A - 3C) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0, \\ A : C = 3 : 4. \end{array}\right.$$ Это означает, что искомыми являются плоскости $z = 0$ и $3x + 4z = 0$.

7.188. Найти геометрическое место точек, удалённых от плоскости $x + 2y - 2z - 5 = 0$ на расстояние 2.

Решение. Пусть $x + 2y - 2z - 5 = 0$ — данная плоскость α, $M(a;\ b;\ c)$ — любая точка искомого множества точек. Тогда имеем:

$$\rho(M;\ \alpha) = 2 \Leftrightarrow \frac{|a + 2b - 2c - 5|}{3} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + 2b - 2c - 5 = 6, \\ a + 2b - 2c - 5 = -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + 2b - 2c = 11, \\ a + 2b - 2c = -1. \end{array}\right.$$

При $b = c = 1$ получаем $a = -1$ или $a = 11$. Значит, искомому множеству точек принадлежат точки $M_1(-1;\ 1;\ 1)$ и $M_2(11;\ 1;\ 1)$.

Так как множество всех точек пространства, равноудалённых от данной плоскости, представляет собой две плоскости, параллельные данной, то одна из них проходит через M_1, а другая — через M_2. Эти плоскости имеют уравнения:

$(x + 1) + 2(y - 1) - 2(z - 1) = 0$ или $x + 2y - 2z + 1 = 0$,
$(x - 11) + 2(y - 1) - 2(z - 1) = 0$ или $x + 2y - 2z - 11 = 0$.

Задачи к главе 7

Задачами к этой главе завершается изучение курса геометрии 10 класса координатным методом. Среди предлагаемых для решения задач встречаются задачи различной степени сложности. Большей математической подготовки учащихся требуют задачи **7.210, 7.211, 7.212, 7.213, 7.214, 7.216**.

7.194. Найти координаты центра и радиус сферы, описанной около тетраэдра, вершины которого имеют координаты $(0;\ 0;\ 0)$, $(8;\ 0;\ 0)$, $(0;\ -2;\ 0)$, $(0;\ 0;\ -6)$.

Решение. Центром сферы, описанной около тетраэдра, является точка пересечения плоскостей серединных перпендикуляров трёх любых рёбер тетраэдра, не лежащих в одной плоскости.

Пусть α, β, γ — плоскости серединных перпендикуляров рёбер соответственно AB, BC, AP тетраэдра $PABC$; K, H, M — середины соответственно этих рёбер, причём $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(8;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ -2;\ 0)$, $P(0;\ 0;\ -6)$.

Находим: $\overrightarrow{AB}(8;\ 0;\ 0)$, $\overrightarrow{CB}(8;\ 2;\ 0)$ и $\overrightarrow{PA}(0;\ 0;\ 6)$ — векторы, перпендикулярные соответственно плоскостям α, β и γ; $K(4;\ 0;\ 0)$, $H(4;\ -1;\ 0)$, $M(0;\ 0;\ -3)$. Тогда уравнения плоскостей α, β и γ соответственно таковы: $x - 4 = 0$, $4x + y - 15 = 0$, $z + 3 = 0$.

Решая систему уравнений $\begin{cases} x - 4 = 0, \\ 4x + y - 15 = 0, \\ z + 3 = 0, \end{cases}$ получаем искомые координаты $(4; -1; -3)$ центра S сферы. Тогда радиус $R = SA$ этой сферы равен $\sqrt{16 + 1 + 9} = \sqrt{26}$.

7.209. Найти все точки на оси Oz, через которые проходит хотя бы одна прямая, касающаяся сферы $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 2)^2 = 9$ в точке $P(3; -1; -4)$.

Решение. Пусть $M(0; 0; z)$ — искомая точка оси Oz. Так как прямая MP касается сферы с центром $A(1; -2; -2)$, то векторы $\overrightarrow{AP}(2; 1; -2)$ и $\overrightarrow{MP}(3; -1; -4 - z)$ перпендикулярны. Тогда: $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{MP} = 0 \Rightarrow 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-4 - z) = 0 \Rightarrow z = -6{,}5$. Таким образом, точка M имеет координаты $(0; 0; -6{,}5)$.

7.210. Из начала координат проведены всевозможные прямые, касающиеся сферы $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 + (z - 12)^2 = 144$. Найти уравнение плоскости, которой принадлежат все точки касания.

Решение. Пусть $M(x; y; z)$ — точка касания прямой, проходящей через начало координат, и сферы радиуса 12 с центром $A(4; 3; 12)$. Найдём уравнение, которому удовлетворяют координаты точки M.

Так как касательная к сфере прямая перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания, то треугольник OAM — прямоугольный с гипотенузой OA. Тогда

$$OM^2 = x^2 + y^2 + z^2 = OA^2 - AM^2 = 169 - 144 = 25.$$

Из условия $OM \perp AM$ следует $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$, т. е. $x(x - 4) + y(y - 3) + z(z - 12) = 0$. После преобразований, с учётом равенства $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, получаем искомое уравнение плоскости $4x + 3y + 12z - 25 = 0$, которому удовлетворяют координаты любой точки касания прямой OM и сферы.

7.211. Найти уравнения всех сфер с центром в начале координат, касающихся прямой

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = 5. \end{cases}$$

Решение. Радиус сферы, касающейся данной прямой с направляющим вектором $\vec{p}(-2; 1; 0)$, равен расстоянию от центра $O(0; 0; 0)$ сферы до этой прямой. Поэтому находим точку пересечения данной прямой и плоскости $2x - y = 0$, проходящей через центр шара перпендикулярно этой прямой. Координаты (1; 2; 5) этой точки являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = 5, \\ 2x - y = 0. \end{cases}$$

Тогда радиус сферы равен $\sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{30}$, а сфера, являющаяся единственной, удовлетворяющей условию задачи, имеет уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 30$.

7.212. В плоскости $x + y + 2z = 0$ найти все прямые, касающиеся сферы $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 8$ и проходящие через начало координат.

Решение. Параметрические уравнения любой прямой m, проходящей через начало координат $O(0; 0; 0)$, имеют вид:

$$\begin{cases} x = at, \\ y = bt, \quad t \in \boldsymbol{R}. \\ z = ct, \end{cases} \qquad (1)$$

Любой тройке чисел $(a; b; c)$ соответствует некоторая прямая семейства (1).

Требование «лежать в плоскости $x + y + 2z = 0$», накладываемое на прямую (1), означает выполнение равенства: $at + bt + 2ct = 0$, откуда получаем связь между a, b и c в виде $c = -\frac{a + b}{2}$. Таким образом, если прямая (1) лежит в плоскости $x + y + 2z = 0$, то её параметрические уравнения принимают вид:

$$\begin{cases} x = at, \\ y = bt, \\ z = -\dfrac{a + b}{2}\, t, \end{cases} \quad t \in \boldsymbol{R}. \qquad (2)$$

Далее, прямая семейства (2) касается сферы $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 8$, если система уравнений

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 8, \\ x = at, \\ y = bt, \qquad\qquad t \in \boldsymbol{R} \\ z = -\dfrac{a + b}{2}\, t, \end{cases}$$

имеет два совпавших решения, т. е. дискриминант квадратного уравнения

$$(at-2)^2+(bt-4)^2+\left(\frac{a+b}{2}t\right)^2=8$$

равен нулю.

После преобразований это уравнение приводится к виду:

$$\left(a^2+b^2+\frac{(a+b)^2}{4}\right)t^2-2(2a+4b)t+12=0.$$

Находим $\frac{D}{4}=(2a+4b)^2-3(4a^2+4b^2+(a+b)^2)=-11a^2+$ $+10ab+b^2$. Из условия $\frac{D}{4}=0$ решаем однородное уравнение $11a^2-10ab-b^2=0$. Если $\frac{a}{b}=u$, то получаем уравнение $11u^2-10u-1=0$, корнями которого являются $u_1=-\frac{1}{11}$, $u_2=1$. Тогда имеем соответственно: $b=-11a$, $c=5a$; $b=a$, $c=-a$.

Последние соотношения между a, b и c выделяют из множества всех прямых семейства (2) две прямые, которые проходят через начало координат, лежат в плоскости $x+y+$ $+2z=0$ и касаются сферы $(x-2)^2+(y-4)^2+z^2=8$. Параметрические уравнения этих прямых таковы:

$$\begin{cases}x=t,\\ y=-11t,\\ z=5t\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}x=t,\\ y=t,\\ z=-t;\end{cases}\quad t\in\boldsymbol{R}.$$

7.213. Написать уравнения проекций прямой

$$\begin{cases}x=3-2t,\\ y=1+3t,\\ z=5\end{cases}$$

на координатные плоскости.

Решение. Пусть m — данная прямая, $\vec{p}(-2;\ 3;\ 0)$ — её направляющий вектор, который перпендикулярен оси Oz. Если прямые a, b и c — проекции прямой m на координатные плоскости соответственно Oxy, Oxz и Oyz, то координатами направляющих векторов этих прямых являются соответственно тройки чисел: $(-2;\ 3;\ 0)$, $(-2;\ 0;\ 0)$ и $(0;\ 3;\ 0)$. Точки, являющиеся проекциями точки $A(3;\ 1;\ 5)$ данной прямой на координатные плоскости Oxy, Oxz и Oyz, имеют координаты соответственно (3; 1; 0), (3; 0; 5), (0; 1; 5). Тогда прямые a, b и c задаются соответственно следующими параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 1 + 3t, \ t \in \boldsymbol{R}; \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 - 2u, \\ y = 0, \qquad u \in \boldsymbol{R}; \\ z = 5, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 1 + 3v, \ v \in \boldsymbol{R}. \\ z = 5, \end{cases}$$

7.216. Найти геометрическое место центров таких шаров, что все точки прямых

$$\begin{cases} x = 3 - t, \\ y = 2 + 2t, \ t \in \boldsymbol{R} \\ z = 1 + t, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = 2 + 3u, \\ y = 2u, \qquad u \in \boldsymbol{R}, \\ z = 6, \end{cases}$$

для которых $t \in [-1; 3]$ и $u \in [0; 6]$, принадлежат шарам, а все другие точки этих прямых шарам не принадлежат.

Решение. Пусть уравнения

$$\begin{cases} x = 3 - t, \\ y = 2 + 2t, \ t \in \boldsymbol{R} \\ z = 1 + t, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = 2 + 3u, \\ y = 2u, \qquad u \in \boldsymbol{R} \\ z = 6, \end{cases}$$

задают прямые соответственно b и c.

Промежуток $t \in [-1; 3]$ задаёт на прямой b отрезок с концами $A(4; 0; 0)$ и $B(0; 8; 4)$, а промежуток $u \in [0; 6]$ задаёт на прямой c отрезок с концами $H(2; 0; 6)$ и $K(20; 12; 6)$.

Геометрическим местом центров всех сфер, проходящих через A и B, является плоскость её серединных перпендикуляров отрезка AB. Для всех шаров, определяемых этими сферами, все точки отрезка AB являются внутренними. Аналогично геометрическим местом центров всех сфер, проходящих через H и K, является плоскость β серединных перпендикуляров отрезка KH. Для всех шаров, определяемых этими сферами, все точки отрезка KH являются внутренними. Прямая $m = \alpha \cap \beta$ содержит центры всех тех шаров этих семейств, для каждого из которых являются внутренними либо все точки отрезка AB, либо все точки отрезка KH; остальные точки прямых b и c не принадлежат шарам этих семейств.

Найдём уравнения прямой m.

Плоскость α определяется точкой $P(2; 4; 2)$ — серединой отрезка AB — и вектором $\vec{n}_1(1; -2; -1)$, коллинеарным вектору $\overrightarrow{BA}(4; -8; -4)$, и имеет уравнение $x - 2y - z + 8 = 0$. Плоскость β определяется точкой $Q(11; 6; 6)$ — серединой отрезка KH — и вектором $\vec{n}_2(3;\ 2;\ 0)$, коллинеарным вектору $\overrightarrow{HK}(18;\ 12;\ 0)$, и имеет уравнение $3x + 2y - 45 = 0$. Тогда прямая m пересечения этих плоскостей может быть задана системой общих уравнений

$$\begin{cases} x - 2y - z + 8 = 0, \\ 3x + 2y - 45 = 0 \end{cases}$$

или параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 15 + 2t, \\ y = -3t, \qquad t \in \boldsymbol{R}, \\ z = 23 + 8t, \end{cases}$$

в которых координаты $(2;\ -3;\ 8)$ направляющего вектора $\vec{q}\,(a;\ b;\ c)$ прямой m являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} a - 2b - c = 0, \\ 3a + 2b = 0, \end{cases}$$

выражающих условия перпендикулярности направляющего вектора $\vec{q}\,(a;\ b;\ c)$ относительно векторов $\vec{n}_1(1;\ -2;\ -1)$ и $\vec{n}_2(3;\ 2;\ 0)$.

Таким образом, искомое геометрическое место точек есть прямая

$$\begin{cases} x = 15 + 2t, \\ y = -3t, \qquad t \in \boldsymbol{R}. \\ z = 23 + 8t, \end{cases}$$

Контрольные работы

К—0. Повторение курса 9 класса

Задачи для подготовки

1. Точки A, B, C и D последовательно расположены (при обходе по часовой стрелке) на окружности радиуса R так, что каждая из дуг DCB и CBA равна $80°$, а дуга DCA равна $100°$. Найдите углы четырёхугольника $ABCD$ и длину отрезка BC.

2. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CN к гипотенузе AB, при этом площади треугольников ACN и BCN равны соответственно 6 см^2 и 54 см^2. Найдите стороны треугольника ABC, а также радиусы вписанной и описанной окружностей для этого треугольника.

3. На сторонах AB, BC, CD и DA прямоугольника $ABCD$ выбраны точки соответственно E, F, M и P так, что $EFMP$ — ромб, а $AP : PD = 2 : 3$. Найдите отношение площадей прямоугольника и ромба, если $AD : AB = 5 : 3$.

4. Отрезок CH — биссектриса треугольника ABC. Точки F и D — основания перпендикуляров, опущенных из точки H на стороны AC и BC соответственно. Найдите стороны треугольника, если $AC = \frac{3}{4}BC$, $\angle ACB = 60°$, $HD = \frac{18\sqrt{3}}{7}$.

5. В прямоугольную трапецию с острым углом α вписана окружность радиуса R. Найдите площадь трапеции.

Вариант 1

1. На окружности радиуса R последовательно отмечены точки A, B, C и D так, что величины дуг AB и BC равны соответственно 50 и $80°$, а диагонали четырёхугольника $ABCD$ равны между собой. Найдите длину наибольшей стороны этого четырёхугольника.

2. Отрезок CH — высота прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$); отрезки HL и HK — биссектрисы треугольников соответственно BCH и ACH, причём $HL = 3HK$. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 2\sqrt{5}$.

3. На двух сторонах прямого угла с вершиной M выбраны точки D и K соответственно так, что $MD : MK = 7 : 1$. На биссектрисе угла DMK взята точка E, равноудалённая от D и K. Определите длину отрезка DK, если $ME = 4$.
4. Отрезок CM — биссектриса треугольника ABC. Точки K и P — основания перпендикуляров, опущенных из точки M соответственно на стороны AC и BC треугольника, при этом $\angle BCA = 60°$, $BC = \frac{2}{3}AC$, $MK = 2$. Найдите длину стороны AB и отношение площадей треугольников MCA и BMC.
5. Трапецию можно вписать в круг, радиус которого в $\frac{2}{3}\sqrt{7}$ раз больше радиуса круга, вписанного в эту же трапецию. Найдите все углы данной трапеции.

Вариант 2

1. На окружности радиуса r последовательно отмечены точки K, M, N и Q так, что величины дуг KM и MN равны соответственно 40 и 100°, а хорды KN и MQ пересекаются под углом 70°. Найдите длину наибольшей стороны четырёхугольника $KMNQ$.
2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведена высота CH. Отрезки AM и CP — медианы треугольников ACH и HCB соответственно, причём $3AM = 4CP$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если его площадь равна 96.
3. Угол ABC прямой, $AB = 4$, $BC = 3$. Найдите расстояние от B до точки K, лежащей на биссектрисе прямого угла, если точка K равноудалена от A и C.
4. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 равны соответственно 2 и 4; BN — биссектриса треугольника, при этом $AN = \frac{5}{3}$. Найдите длину отрезка NC и площадь треугольника ABC.
5. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Точки касания этой окружности со сторонами трапеции являются вершинами четырёхугольника, площадь которого в 4 раза меньше площади трапеции. Чему равен наименьший угол трапеции?

Вариант 3

1. Для четырёх точек A, D, F и N плоскости выполняется соотношение $\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{AF}$. Докажите, что точки D,

N и F принадлежат одной прямой. Найдите ND, если $NF = 12$.

2. На боковой стороне трапеции выбрана точка, делящая эту сторону в отношении $3 : 1$, считая от вершины меньшего основания. Прямая, проходящая через эту точку параллельно основаниям, делит площадь трапеции в отношении $2 : 1$, считая от меньшего основания. В каком отношении делит площадь трапеции её средняя линия?
3. Окружность радиуса R касается катета PM прямоугольного треугольника MPN в точке M, а также касается катета PN и пересекает гипотенузу треугольника, деля её в отношении $4 : 1$, считая от вершины M. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MPN.
4. В полукруг диаметра d помещены две равные касающиеся друг друга окружности. Определите длину одной из этих окружностей, если каждая из них касается также диаметра полукруга и его дуги.
5. Докажите, что геометрическое место всех точек плоскости, сумма квадратов расстояний каждой из которых до вершин квадрата равна сумме квадратов его диагоналей, есть описанная около этого квадрата окружность. (Возможно использование координатного метода.)

Вариант 4

1. Для четырёх точек A, B, C и D плоскости выполняется соотношение $5\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OC}$. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой. Найдите BC, если $AB = 24$.
2. На боковой стороне CD трапеции $ABCD$ выбраны точки M и L так, что $CM = ML = LD$, а на стороне AB выбраны точки N и P так, что $AP = PN = NB$. Отношение площадей четырёхугольников $BNMC$ и $APLD$ равно $1 : 3$. Чему равно отношение оснований AD и BC трапеции?
3. В треугольнике ADF стороны AD и DF равны. Окружность касается основания треугольника в точке A, касается также стороны DF, а сторону AD пересекает в такой точке M, что $AM : MD = 3 : 1$. Найдите длину основания треугольника ADF.
4. Две окружности, радиусы которых равны r и $0{,}5r$, касаются внутренним образом в точке D. Отрезок DP — диаметр окружности большего радиуса. Найдите радиус третьей окружности, если она касается двух данных окружностей и отрезка DP.

5. Докажите, что геометрическое место всех точек плоскости, сумма квадратов расстояний от каждой из которых до сторон квадрата в полтора раза больше площади этого квадрата, есть вписанная в этот квадрат окружность. (Возможно использование координатного метода.)

К—1. Введение в стереометрию. Аксиомы стереометрии

Задачи для подготовки

1. В треугольнике DEF $EF = 8$, $ED = 17$. Найдите площадь треугольника, если:

а) через прямую, содержащую сторону FD, и точку пересечения высот треугольника можно провести, по крайней мере, две различные плоскости;

б) через медиану DK и центр вписанной в треугольник окружности можно провести, по крайней мере, две различные плоскости;

в) существует прямая, не лежащая в плоскости DEF, пересекающая биссектрису DK и содержащая центр окружности, описанной вокруг треугольника KFD.

2. $EFGS$ — правильный тетраэдр, $EF = 12$. Точки L и N лежат на рёбрах SG и SE соответственно. $SL = 3$, $SN = 3$. Точка T — середина ребра SF. 1) Постройте: а) точку Y_1 пересечения прямой LT и плоскости EFG; б) точку Y_2 пересечения прямой NT и плоскости EFG; в) точку пересечения прямой NT и плоскости ELF; г) прямую пересечения плоскостей LY_1Y_2 и NFE. 2) Найдите: а) длину отрезка Y_1Y_2; б) отношение, в котором плоскость LY_1Y_2 делит отрезок SE (считая от точки S).

Вариант 1

1. В треугольнике ABC $AC = 12$, $BC = 5$. Найдите площадь треугольника, если:

а) через прямую AB и центр окружности, описанной около треугольника, можно провести, по крайней мере, две различные плоскости;

б) через прямую AK, перпендикулярную BC, и центр вписанной в треугольник окружности можно провести, по крайней мере, две различные плоскости;

в) существует прямая, которая не лежит в плоскости ABC, пересекает медиану BM и содержит центр окружности, проходящей через вершины B, C и середину стороны AC.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 8; точка M — середина AA_1; точка N лежит на ребре DD_1, $D_1N = 6$. 1) Постройте: а) точку X_1 пересечения MN и плоскости ACB; б) точку X_2 пересечения MN и плоскости $A_1B_1C_1$; в) точку X_3 пересечения BX_1 и плоскости DD_1C; г) общую прямую плоскостей $X_1X_2X_3$ и AA_1B. 2) Найдите: а) длину X_1X_2; б) в каком отношении точка X_3 делит отрезок DC (считая от D).

Вариант 2

1. В треугольнике KMP $KM = 4$, $KP = 5$. Найдите площадь треугольника, если:

   а) через прямую, содержащую сторону KP, и центр окружности, описанной около треугольника, можно провести, по крайней мере, две различные плоскости;

   б) через прямую AM, перпендикулярную KP, и центр окружности, вписанной в треугольник, можно провести, по крайней мере, две различные плоскости;

   в) существует прямая, не принадлежащая плоскости треугольника, пересекающая медиану PB и проходящая через центр окружности, вписанной в треугольник KMP.

2. $ABCD$ — правильный тетраэдр. Все рёбра имеют длину 8; точка M — середина AD; точка K — середина DB; точка P лежит на ребре DC; $DP = 6$. 1) Постройте: а) точку X_1 пересечения прямой MP и плоскости ABC; б) точку X_2 пересечения прямой KP и плоскости ABC; в) точку пересечения прямой MP и плоскости AKC; г) прямую пересечения плоскостей MX_1K и X_2DC. 2) Найдите: а) длину X_1X_2; б) в каком отношении плоскость MX_1X_2 делит отрезок DB (считая от B).

К—2. Взаимное расположение прямых в пространстве

Задачи для подготовки

1. В кубе $EFGHE_1F_1G_1H_1$ точки L, N и T — середины рёбер соответственно F_1G_1, G_1H_1 и H_1H, а диагонали грани EE_1F_1F пересекаются в точке K.

а) Заполните таблицу расположения прямых и углов между ними.

№	Прямые	Расположение прямых	Величина угла между прямыми
1	LN и EG		
2	F_1T и FH		
3	F_1N и KT		
4	TN и EG		
5	F_1T и KN		
6	KH_1 и LN		

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью KNT, если ребро куба равно a.

2. $ABCD$ — правильный тетраэдр, $AB = 7$. Точки M и K — середины рёбер DB и AC соответственно. Точка P делит ребро AC в отношении $5 : 2$, считая от точки C. Через точку P проведена прямая параллельно прямой KM. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого внутри тетраэдра.

3. Пусть точка M — середина ребра AB пирамиды $ABCD$, а точка N делит ребро AC в отношении $1 : 2$, считая от вершины A. Докажите, что в плоскости грани BCD нет ни одной прямой, параллельной прямой MN.

Вариант 1

1. Дан правильный тетраэдр $ABCD$, в котором точки K, F, P, M — середины рёбер соответственно AD, DC, BC и AB.

а) Заполните таблицу расположения прямых и углов между ними.

б) Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью KMF, если ребро тетраэдра a.

№	Прямые	Расположение прямых	Величина угла между прямыми
1	KF и MP		
2	KF и BC		
3	KP и MF		
4	BF и MP		
5	KP и BC		
6	CM и KF		

2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, диагональ B_1D которого равна 8. Точка K делит ребро B_1C_1 в отношении $3 : 5$, считая от B_1. Через точку K проведена прямая параллельно прямой B_1D. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого внутри куба.

3. Основание пирамиды $MABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Точка P — середина BC. Докажите, что в плоскости MDC не существует прямой, параллельной прямой AP.

Вариант 2

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a, в котором точки K и F — середины рёбер соответственно A_1B_1 и B_1C_1, а M и P — точки пересечения диагоналей граней соответственно A_1D_1DA и DCC_1D_1.

а) Заполните таблицу расположения прямых и углов между ними.

№	Прямые	Расположение прямых	Величина угла между прямыми
1	KF и MP		
2	KM и FP		
3	KF и BD		
4	DC_1 и KF		
5	FP и AD		
6	MP и B_1C		

б) Найдите длину наибольшей стороны многоугольника, являющегося сечением куба плоскостью, проходящей через точки M, F и K.

2. Дан тетраэдр $ABCD$, все рёбра которого равны 12. Точка M — середина ребра BD, точка P делит ребро AC в отношении $5 : 7$, считая от C. Найдите длину отрезка прямой, заключённого внутри тетраэдра, если эта прямая проходит через точку P параллельно прямой CM.

3. Точка K — середина ребра A_1B_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Докажите, что в плоскости BCC_1 не существует прямой, параллельной прямой AK.

К—3. Взаимное расположение прямой и плоскости. Перпендикулярность прямой и плоскости

Задачи для подготовки
(для контрольной работы используются аналоги заданий 4, 8 и 9)

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны a. Точка M лежит на AD, при этом $AM = x$. а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точку M параллельно прямым BD и A_1C. б) Найдите периметр сечения. в) Найдите площадь сечения.
2. В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром a точка M лежит на отрезке AC, при этом $MC = x$. а) Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через M параллельно прямым AB и CD. б) Найдите периметр сечения. в) Найдите площадь сечения.
3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны a, точка L — середина A_1B_1, а точка M лежит на AC, причём $MC = x$. а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через M параллельно прямым AB и CL. б) Определите площадь сечения.
4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором P, N, K, M — такие внутренние точки рёбер соответственно A_1B_1, A_1D_1, DD_1 и BB_1, что прямые PM и NK пересекаются. При этом прямые NK и AD пересекаются в точке Z_1, прямые PM и AB — в точке Z_2, прямые MK и BD — в точке Z_3. Найдите длину отрезка Z_2Z_3, если $Z_1Z_2 = 8$, $Z_1Z_3 = 13$.
5. Равнобокая трапеция $A_1B_1C_1D_1$ является изображением трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 10$, $BC = 5$. Найдите площадь трапеции $A_1B_1C_1D_1$, если около неё можно описать окружность с диаметром A_1D_1, при этом $A_1B_1 = 3$.
6. Трапеция $A_1B_1C_1D_1$ является изображением трапеции $ABCD$ с основаниями $AB = 2$ и $CD = 8$. Найдите площадь трапеции $A_1B_1C_1D_1$, если около неё можно описать круг с диаметром C_1D_1, при этом $A_1B_1 = \sqrt{6}$.
7. Равнобокая трапеция $A_1B_1C_1D_1$ является изображением трапеции $ABCD$ с основаниями $AB = 2$ и $CD = 8$. Найдите площадь трапеции $A_1B_1C_1D_1$, если в неё можно вписать круг с диаметром 9.

8. $ABCD$ — четырёхугольник, в котором диагонали AC и BD перпендикулярны и равны. Точка M не лежит в плоскости четырёхугольника, а прямая MA перпендикулярна этой плоскости. Известно, что $MA = MC = MD$. Найдите углы четырёхугольника $ABCD$.
9. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 2. Точка M — середина ребра B_1C_1. а) Докажите, что прямая B_1C_1 перпендикулярна плоскости AA_1M. б) Через точку пересечения диагоналей грани AA_1C_1C проведите прямую, перпендикулярную плоскости AA_1M. в) Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого внутри призмы. г) В каком отношении делит этот отрезок плоскость AA_1M? д) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середину отрезка CM перпендикулярно прямой BC.
10. Точка M — середина ребра BC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны между собой. Через точку N, лежащую на A_1M (где $A_1N = x$, $x \in (0;\ 7)$), проведено сечение, перпендикулярное прямой A_1M. Как меняется сумма внутренних углов проведённого сечения этой призмы плоскостью, если $A_1M = 7$?
11. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через внутреннюю точку M диагонали BD_1 проведено сечение перпендикулярно этой диагонали. Как меняется сумма внутренних углов сечения в зависимости от x (где $x = MB$, $x \in (0; 6)$), если диагональ куба равна 6?
12. Все рёбра тетраэдра $ABCD$ равны между собой. Через точку M (где $AM = x$, $x \in (0; 6)$), лежащую на медиане AK грани ABC, проведено сечение, перпендикулярное прямой AK. Как меняется сумма внутренних углов сечения тетраэдра этой плоскостью, если $AK = 6$?

Вариант 1

1. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой M, K, N и P — внутренние точки рёбер BB_1, B_1C_1, A_1C_1 и AA_1 соответственно — выбраны так, что прямые MN и KP пересекаются. Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке X_1, прямые NP и AC — в точке X_2, прямые MP и AB — в точке X_3. Найдите длину отрезка X_1X_3, если $X_1X_2 = 10$, $X_2X_3 = 12$.

2. Точка M выбрана вне плоскости ромба $ABCD$ так, что отрезки AM, BM и CM равны, а отрезок MD перпендикулярен плоскости ABC. Найдите углы ромба.
3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2. а) Докажите, что прямая A_1C_1 перпендикулярна плоскости BDD_1. б) Докажите, что плоскость A_1C_1D перпендикулярна прямой BD_1. в) Через точку K — середину C_1D_1 — проведите прямую, перпендикулярную плоскости A_1C_1D. г) Найдите длину отрезка проведённой прямой, расположенного внутри куба. д) В каком отношении, считая от точки K, плоскость A_1C_1D делит этот отрезок?

Вариант 2

1. Дан тетраэдр $ABCD$, в котором M, N и P — внутренние точки рёбер AD, DB и DC соответственно — выбраны так, что прямые MP и AC пересекаются в точке Y_1, прямые PN и BC — в точке Y_2, прямые MN и AB — в точке Y_3. Найдите длину отрезка Y_2Y_3, если $Y_1Y_2 = 3$, $Y_1Y_3 = 5$.
2. $ABCD$ — трапеция ($AB \parallel CD$), в которой $\angle ADC = 50°$. Точка M выбрана вне плоскости этой трапеции так, что отрезки MD, MC и MB равны, а отрезок MA перпендикулярен плоскости ABC. Найдите углы трапеции.
3. В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром 2 точка M — середина BD. а) Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости AMC. б) Через точку пересечения медиан треугольника ADC проведите прямую, перпендикулярную плоскости AMC. в) Найдите длину отрезка проведённой прямой, расположенного внутри тетраэдра. г) В каком отношении этот отрезок делит плоскость AMC? д) Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, проходящей через середину CM перпендикулярно прямой AC.

К—4. Угол между прямой и плоскостью. Параллельные плоскости

Задачи для подготовки
(для контрольной работы используются
аналоги № 1, 2, 6 и 10)

1. Отрезок AC — ортогональная проекция наклонной AB на плоскость ACD. Угол между лучами AC и AD равен 45°. Найдите угол между лучами AB и AD, если угол между прямой AB и плоскостью ACD равен 60°.

2. Сторона AB прямоугольника $ABCD$ лежит в плоскости ABM, а сторона BC образует с этой плоскостью угол φ. Какой угол образует диагональ BD с плоскостью ABM, если: а) $BD = 2AB$; б) $BC = 2AB$?

3. Из одной точки проведены две наклонные к плоскости, образующие с ней равные углы. Угол между наклонными равен φ, а угол между их проекциями на эту плоскость равен β. Найдите угол между плоскостью и каждой из наклонных.

4. Из одной точки проведены две наклонные к плоскости, образующие между собой угол β, а с плоскостью — углы, равные φ. Найдите угол между их проекциями на эту плоскость.

5. Две наклонные к плоскости, проведённые из одной точки, образуют с ней углы, равные φ. Проекции этих наклонных на плоскость образуют угол β. Найдите угол между наклонными.

6. Плоскости α и β параллельны, плоскость γ пересекает плоскость α по прямой a, а плоскость β — по прямой b. Плоскость δ пересекает плоскость γ по прямой c. Как могут быть расположены прямые a, b и c?

7. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны a. На ребре AB отмечена точка M так, что $AM : MB = 3 : 1$; точка N — середина ребра B_1C_1. а) Через точку M проведите сечение параллельно плоскости A_1BC. б) Найдите периметр сечения. в) Найдите площадь сечения. г) В каком отношении плоскость сечения делит отрезок AN, считая от A?

8. На ребре $A_1B_1 = a$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка M так, что $B_1M : A_1M = 2 : 1$. а) Через точку M проведите сечение параллельно плоскости AB_1C_1. б) Найдите периметр сечения. в) Найдите площадь сечения. г) В каком отношении плоскость сечения делит отрезок A_1C, считая от точки A_1?

9. Точка M — середина высоты DO правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром a. а) Через точку M проведите сечение, параллельное плоскости BCD. б) Найдите периметр сечения. в) Найдите площадь сечения. г) В каком отношении плоскость сечения делит высоту тетраэдра AF, считая от точки A?

10. Прямая DF пересекает параллельные плоскости α, β, γ соответственно в точках D, E и F, при этом $DF = 3$, $FE = 9$.

Прямая EG пересекает плоскости α и γ соответственно в точках G и H, при этом $EG = 12$. Найдите все значения, которые может принимать длина отрезка GH.

Вариант 1

1. Отрезок AC — ортогональная проекция наклонной AB на плоскость ACD. Лучи AD и AC образуют угол $30°$. Найдите угол между прямой AB и плоскостью ACD, если угол между прямыми AB и AD равен $60°$.
2. Сторона AB треугольника ABC лежит в плоскости ABM, а сторона BC образует с этой плоскостью угол φ. Какой угол образует с этой плоскостью сторона AC, если: а) треугольник ABC — равносторонний; б) $AB = AC$, $\angle CAB = 90°$?
3. Плоскость α_1 параллельна плоскости β_1, а плоскость α_2 параллельна плоскости β_2, при этом плоскости α_1 и α_2 пересекаются по прямой a, а плоскости β_1 и β_2 — по прямой b. Как могут быть расположены прямые a и b?
4. Прямая AB пересекает параллельные плоскости α, β, γ соответственно в точках A, B, C, причём $AB = 3$, $BC = 7$. Прямая MK пересекает эти же плоскости α, β, γ соответственно в точках M, K, P, причём $MP = 10$. Найдите все значения, которые может принимать длина отрезка MK.

Вариант 2

1. Отрезок AC — ортогональная проекция наклонной AB на плоскость ACD. Угол DAB равен $45°$. Найдите угол между лучами AD и AC, если угол между наклонной AB и плоскостью DAC равен $30°$.
2. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ лежит в плоскости ABM, а сторона BC образует с этой плоскостью угол φ. Какой угол образует с этой плоскостью диагональ BD, если: а) $ABCD$ — квадрат; б) $ABCD$ — ромб, в котором $\angle B = 120°$?
3. Прямые a и b параллельны. Прямая a параллельна плоскости α, прямая b параллельна плоскости β. Как могут быть расположены плоскости α и β?
4. Прямая AB пересекает параллельные плоскости α, β, γ соответственно в точках A, B, C, причём $AB = 14$, $BC = 4$. Прямая MK пересекает эти же плоскости α, β, γ соответственно в точках M, K, P, причём $MP = 10$. Найдите все значения, которые может принимать длина отрезка MK.

К—5. Угол между двумя плоскостями

Задачи для подготовки

1. $ABCD$ — ромб с углом 60°. Прямая MA перпендикулярна плоскости ромба, причём $AB = AM = a$. Найдите углы между плоскостями: а) AMB и ABC; б) AMB и AMD; в) MDC и ABC; г) MAD и MBC; д) MDC и BCM.
2. Плоскости ABC и ABD образуют угол 45°. Известно, что $AD = 3$, $AB = 5$, $BC = \sqrt{2}$, причём $DA \perp AB$, $CB \perp AB$. Найдите: а) CD; б) угол между прямой CD и плоскостью ABC.
3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение LPQ, где точка L — середина ребра BC, точка P лежит на ребре CD так, что $CP : PD = 1 : 5$, точка Q — на ребре CC_1 такая, что $CQ : QC_1 = 1 : 2$. Найдите угол между плоскостями LPQ и $A_1B_1C_1$.

Вариант 1

1. $ABCD$ — ромб, в котором $AB = a$, $\angle A = 60°$. Прямая MA перпендикулярна плоскости ромба и $AM = 2a$. Найдите углы между плоскостями: а) AMB и ABC; б) AMB и AMD; в) MDC и ABC; г) MAD и MBC; д) MDC и BCM.
2. Угол между плоскостями ABC и ABD равен 60°, при этом $DA \perp AB$, $CB \perp AB$ и $AD = 2$, $AB = 4$, $CB = 3$. Найдите: а) CD; б) угол между прямой CD и плоскостью ABC.
3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение MNK, где точка M — середина ребра AD, точка N лежит на ребре AB так, что $AN : NB = 1 : 13$, точка K — на ребре AA_1 такая, что $AK : KA_1 = 1 : 4$. Найдите угол между плоскостями MNK и $A_1B_1C_1$.

Вариант 2

1. $ABCD$ — ромб, в котором $AB = 2a$, $\angle A = 60°$. Прямая MA перпендикулярна плоскости ромба и $AM = a$. Найдите углы между плоскостями: а) AMB и ABC; б) AMB и AMD; в) MDC и ABC; г) MAD и MBC; д) MDC и MBC.
2. Плоскости ABC и ABD образуют угол 60°, при этом $DA \perp AB$, $CB \perp AB$ и $AD = 4$, $AB = 3$, $CB = 2$. Найдите: а) CD; б) угол между прямой CD и плоскостью ABC.
3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение FGT, где точка F — середина ребра B_1C_1, точка G лежит на ребре C_1D_1 так, что $C_1G : GD_1 = 1 : 10$, точка T — на ребре CC_1 такая, что $C_1T : TC = 1 : 9$. Найдите угол между плоскостями FGT и ABC.

Тестовая работа

Выберите верный ответ.

1. Медиана треугольника делит этот треугольник на два равнобедренных треугольника. Сколько плоскостей можно провести через эту медиану, ортоцентр и центр тяжести этого треугольника?

А) ни одной Б) одну В) бесконечно много

Г) это зависит от дополнительных условий

2. Два равнобедренных треугольника ABK и ABM имеют общее основание $AB = 24$, при этом $AK = BK = 13$, $AM = BM = 20$. Найдите сумму всех различных целых значений, которые может принимать длина отрезка MK.

А) 21 Б) 32 В) 176 Г) таких значений бесконечно много

3. Дан тетраэдр $DABC$, в котором $BC = 10$, $AD = 11$. Точка P лежит на ребре BC так, что $PC = 3$. Через точки C, P и B проведены параллельные плоскости α, β и γ, пересекающие прямую AD соответственно в точках A, L и K, причём $AL = 6$. Найдите DK, если точка L лежит на ребре AD.

А) 9 Б) 7 В) 11 Г) 0

4. Расстояние между параллельными плоскостями α и β равно 7, а расстояние между прямой a, принадлежащей α, и прямой b, принадлежащей β, равно 8. Каким может быть расположение прямых a и b?

А) параллельны или скрещиваются Б) параллельны
В) скрещиваются Г) данная ситуация невозможна

5. В тетраэдре $DABC$ $AC = BC = AB = 3$, $AD = 7$, $BD = 5$. Сколько плоскостей, перпендикулярных прямой DC, можно провести через прямую AB?

А) одну Б) ни одной В) бесконечно много

Г) это зависит от длины ребра DC

6. Вершины треугольника ABC удалены от плоскости α на расстояния 1, 5 и 8. Сколько различных значений может принимать расстояние от точки M пересечения медиан этого треугольника до плоскости α?

А) бесконечно много Б) одно

В) четыре Г) три

7. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с длиной ребра 6 точка K лежит на ребре B_1C_1 так, что $B_1K = 2$; точка M лежит на ребре AB, при этом $AM = 4$. Найдите угол между прямыми AC_1 и KM.

А) 0 Б) $\frac{\pi}{6}$ В) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{2}}{5}$ Г) верного ответа нет

8. В тетраэдре $DABC$ длины всех рёбер равны. Расстояние между прямыми DC и AB равно 6, точка P — середина ребра AD, точка M — середина ребра BC. Найдите расстояние между прямыми PM и AC.

А) $2\sqrt{3}$ Б) 0 В) $3\sqrt{3}$ Г) 3

9. Прямая MA составляет с плоскостью ABC угол 57° и перпендикулярна прямой AB; прямая KB составляет с плоскостью ABC угол 47° и также перпендикулярна прямой AB. Какие значения может принимать угол между прямыми MA и KB?

А) 10 или 104° Б) 10 или 76°

В) значения в диапазоне от 10 до 76° включительно

Г) значения в диапазоне от 0 до 90° включительно

10. Высота правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ равна 6 и образует с плоскостями граней углы 30°. Найдите расстояние от точки A до грани MBC.

А) $3\sqrt{3}$ Б) 6 В) $\approx 5{,}3$

Г) в условии мало данных

11. Внутри двугранного угла величиной в 60° лежит точка, удалённая от его граней соответственно на 5 и 2. Найдите расстояние от этой точки до ребра двугранного угла.

А) 7 Б) $2\sqrt{13}$ В) $10\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{51}}{7}$

Г) верного ответа нет

12. Точка M лежит внутри куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, что прямая AM составляет с плоскостями AA_1B_1 и ABC углы соответственно в 30 и 45°. Какой угол составляет эта прямая с плоскостью ADA_1?

А) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{5}$ Б) 45° В) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ Г) 30°

13. Два плоских угла трёхгранного угла равны $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$. Сколько целых значений может принимать третий плоский угол?

А) ни одного Б) 120 В) 3

Г) сколько угодно

14. Дан трёхгранный угол с вершиной M, все плоские углы которого — прямые. Прямая MK лежит внутри этого трёхгранного угла и составляет со всеми его гранями равные углы. Найдите величину этих углов.

А) $\operatorname{arctg} 2$ Б) 60° В) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$

Г) верного ответа нет

К—6. Расстояния в пространстве

Задачи для подготовки
(для контрольной работы используются аналоги заданий 4, 5 и 6)

1. Плоскость, пересекая отрезок AB, делит его в отношении $7 : 5$, считая от точки B. Найдите расстояние от точки A до плоскости, если расстояние от середины отрезка до этой плоскости равно 2.
2. Плоскость, пересекая отрезок AB, делит его в отношении $3 : 7$, считая от точки A. Расстояние от середины этого отрезка до плоскости равно 4. Найдите расстояние от точки B до этой плоскости.
3. Плоскость, пересекая отрезок AB, делит его в отношении $2 : 5$, считая от точки B. Найдите расстояние от середины этого отрезка до плоскости, если расстояние от точки B до этой плоскости равно 10.
4. Все вершины куба, кроме двух противоположных A и C_1 (лежащих на одной диагонали), одинаково удалены от некоторой плоскости. Найдите расстояния от каждой из этих вершин (не считая A и C_1) до этой плоскости, если ребро куба равно 6. (Рассмотрите два случая.)
5. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = a$, $\angle B = \alpha$. Расстояние от точки M до плоскости треугольника также равно a. Проекцией точки M на плоскость треугольника является точка M_1 пересечения медиан треугольника ABC. Найдите расстояния от точки M до вершин треугольника и до прямых, содержащих его стороны.
6. Точка M лежит внутри двугранного угла величиной $60°$ и удалена от его граней на расстояния 3 и 5. Найдите расстояние от точки M до ребра двугранного угла.

Вариант 1

1. Длины всех рёбер тетраэдра равны 6. Все вершины тетраэдра одинаково удалены от некоторой плоскости. Найдите расстояние от вершины тетраэдра до этой плоскости. (Рассмотрите два случая.)
2. $ABCD$ — ромб с острым углом $\angle A = \alpha$, $AB = a$. Расстояние от точки M до плоскости ромба равно a. Ортогональной проекцией точки M на плоскость ромба является точка M_1, лежащая на отрезке AC так, что $M_1A = 3M_1C$. Найдите расстояния от точки M до вершин ромба и до прямых, содержащих его стороны.

3. Точка M лежит внутри двугранного угла величиной $45°$ и удалена от его граней на расстояния 4 и $3\sqrt{2}$. Найдите расстояние от M до ребра двугранного угла.

Вариант 2

1. Длины всех рёбер тетраэдра равны между собой. Все вершины тетраэдра одинаково удалены от некоторой плоскости на расстояние, равное 6. Найдите длину ребра тетраэдра (два случая).
2. $ABCD$ — ромб с тупым углом $\angle A = \alpha$ и $AB = a$. Расстояние от точки M до плоскости ромба также равно a, при этом точка M_1 — проекция точки M на плоскость ромба — расположена на луче AC так, что $M_1A = \frac{3}{2}AC$. Найдите расстояние от M до вершин ромба и прямых, содержащих его стороны.
3. Точка M лежит внутри двугранного угла величиной $120°$ и удалена от его граней на расстояния соответственно 4 и 6. Найдите расстояние от M до ребра двугранного угла.

К—7. Векторы в пространстве

Задачи для подготовки

1. Пусть $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{a}, \vec{c}) = 60°$, $\vec{b} \perp \vec{c}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 4$. Найдите:

   а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$; $\vec{b} \cdot \vec{c}$; б) $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c})$; в) $|3\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}|$;

   г) угол между векторами $3\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ и $(-\vec{b})$;

   д) все такие числа x, при которых векторы $3\vec{a} - x \cdot \vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{a} + \vec{b} - x \cdot \vec{c}$ ортогональны;

   е) такое значение y, при котором вектор $(y + 1)\vec{a} - 2\vec{b} + y \cdot \vec{c}$ имеет наименьшую длину;

   ж) длину проекции вектора $\vec{a}$ на плоскость, которой параллельны векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$.
2. MO — высота правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$, плоский угол при вершине M которой равен α, а боковое ребро равно m. Пусть $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MC} = \vec{c}$.

   а) Разложите векторы $\overrightarrow{MO}$ и $\overrightarrow{MD}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

   б) Найдите угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{MC}$.

в) Найдите угол между векторами $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{AK}$ (где K — точка пересечения медиан треугольника MDC).

3. Пространственный базис состоит из трёх единичных векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, угол между любыми двумя из которых равен 60°. Разложите в данном базисе единичный вектор $\overrightarrow{OD}$, образующий с этими векторами равные углы. (Рассмотрите все возможные случаи.)

Вариант 1

1. Пусть $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$; $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\angle(\vec{b}, \vec{c}) = 60°$. Найдите: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $\vec{a} \cdot \vec{c}$; $\vec{b} \cdot \vec{c}$; б) $|\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}|$; в) угол между векторами $\vec{x} = \vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{y} = \vec{b} - \vec{c}$; г) все такие числа α, при которых векторы $\vec{m} = 3\vec{a} + \alpha\vec{b} - \vec{c}$ и $\vec{x} = \vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ ортогональны; д) такие значения t, при которых длина вектора $\vec{p} = 3\vec{a} + 2t\vec{b} - (t + 1)\vec{c}$ наименьшая.
2. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой длины всех рёбер равны 1. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите:
а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB_1}$; б) $\angle(\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{CB_1})$; в) $\overrightarrow{A_1M} \cdot \overrightarrow{C_1B}$.
3. В четырёхугольной пирамиде $MABCD$ грань $ABCD$ — параллелограмм и $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MC} = \vec{c}$.
а) Разложите вектор $\overrightarrow{MD}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
б) Точка K — середина отрезка AM; P — такая точка отрезка MC, что $3MP = PC$; L — такая точка отрезка MB, что $ML = 3LB$. В каком отношении плоскость KLP делит отрезок MD, считая от точки M?

Вариант 2

1. Пусть $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$; $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\angle(\vec{b}, \vec{c}) = 120°$. Найдите: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $\vec{a} \cdot \vec{c}$; $\vec{b} \cdot \vec{c}$; б) $|\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}|$; в) угол между векторами $\vec{x} = \vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$ и $\vec{y} = 2\vec{b} + \vec{c}$; г) все такие числа α, при которых векторы $\vec{m} = 2\vec{a} - \alpha\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{x} = \vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$ ортогональны; д) такие значения t, при которых длина вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - 3(t + 1)\vec{b} + 2t\vec{c}$ наименьшая.
2. В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с основанием $ABCD$ длины всех рёбер равны 1. Точка K — середина отрезка MC, P — точка пересечения медиан тре-

угольника AMB. Найдите: а) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CA}$; б) $\angle(\overrightarrow{DK}, \overrightarrow{AB})$; в) $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{DP}$.

3. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки D и M — середины рёбер соответственно D_1K и B_1C_1. Пусть $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB_1} = \vec{c}$. Разложите векторы $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{KM}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

К—8. Координаты в пространстве

Задачи для подготовки

1. В пространстве заданы две точки $A(0; 1; -1)$ и $B(0; -1; 0)$. Найдите геометрическое место всех точек M пространства, для которых выполняется условие $AM = \frac{5}{3}BM$.

2. Основание ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны между собой, лежит в плоскости Oxy, причём $A(0; 1; 0)$, $B(0; -1; 0)$. Найдите координаты остальных вершин. (Рассмотрите все возможные случаи.)

3. В пространстве заданы четыре точки: $A(3; 2; 1)$, $B(1; 1; 0)$, $C(0; 0; 4)$, $D(-1; 0; 1)$. а) Напишите параметрические уравнения прямой BC. б) Напишите уравнение плоскости ABC. в) Напишите уравнение сферы, диаметром которой является отрезок AD. г) Определите взаимное расположение прямой BC и этой сферы. д) Напишите уравнение плоскости, касающейся этой сферы в точке D. е) Найдите расстояние между прямыми BC и AD.

Вариант 1

1. В пространстве заданы две точки $A(0; 2; 0)$ и $B(0; -6; 0)$. Найдите геометрическое место всех точек M пространства, для которых выполняется условие: $AM = 3MB$.

2. В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$, все рёбра которой равны между собой, известны координаты вершин A и C: $A(-2; 0; 0)$; $C(2; 0; 0)$. Найдите координаты остальных вершин пирамиды, если вершина P принадлежит оси Oz.

3. В пространстве заданы четыре точки: $A(1; 1; 1)$, $B(1; 2; -2)$, $C(9; 0 ;0)$, $D(2; 3; 4)$. а) Напишите параметрические уравнения прямой BC. б) Напишите уравнение плоскости ABC.

в) Напишите уравнение сферы, диаметром которой является отрезок AD. г) Определите взаимное расположение прямой BC и этой сферы. д) Напишите уравнение плоскости, касающейся этой сферы в точке A. е) Найдите расстояние между прямыми BC и AD.

Вариант 2

1. В пространстве заданы две точки $A(-6;\ 0;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ 0)$. Найдите геометрическое место всех точек M пространства, для которых выполняется условие: $AM = 2MB$.
2. Основание ABC правильного тетраэдра $ABCD$ лежит в плоскости Oxy, причём известны координаты вершин A и B: $A(1;\ 0;\ 0)$; $B(-1;\ 0;\ 0)$. Найдите координаты остальных вершин тетраэдра.
3. В пространстве заданы четыре точки: $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(2;\ 1;\ -3)$, $C(10;\ -1;\ -1)$, $D(3;\ 2;\ 3)$. а) Напишите параметрические уравнения прямой BC. б) Напишите уравнение плоскости ABC. в) Напишите уравнение сферы, диаметром которой является отрезок AD. г) Определите взаимное расположение прямой BC и этой сферы. д) Напишите уравнение плоскости, касающейся этой сферы в точке D. е) Найдите расстояние между прямыми BC и AD.

К—9. Итоговое повторение

Задачи для подготовки

1. В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ тангенс угла наклона апофемы к плоскости основания равен $\sqrt{2}$. Точка K лежит на стороне основания AB и делит её в отношении $1 : 5$, считая от точки A. Найдите угол между прямой KM и плоскостью DMC.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырёхугольная призма, ребро основания которой равно 15, а высота — $15\sqrt{3}$. Точка K лежит на ребре основания A_1D_1 и делит его в отношении $1 : 4$, считая от A_1, а точка P лежит на ребре основания D_1C_1 и делит его в отношении $1 : 2$, считая от D_1. а) Постройте сечение призмы плоскостью BKP. б) Найдите величину двугранного угла $B(KP)B_1$. в) Найдите площадь сечения.
3. $ABCD$ — квадрат со стороной 12. Точка K лежит на стороне CD так, что $CK = 3$. Прямая KM перпендикулярна плоскости квадрата, при этом длина отрезка KM равна

$4\sqrt{3}$. Найдите: а) угол между прямой BD и плоскостью MCD; б) расстояние между прямыми MK и AC; в) угол между прямыми MD и AC.

Вариант 1

1. В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ плоские углы при вершине M равны 60°. Точка K лежит на стороне AD основания и делит её в отношении 1 : 3, считая от точки A. Найдите угол между прямой KM и плоскостью DMC.
2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром b точка K лежит на ребре AD и делит его в отношении 1 : 2, считая от точки A; точка P — середина ребра DC.
   а) Постройте сечение куба плоскостью B_1KP. б) Найдите величину двугранного угла $B_1(KP)B$. в) Найдите площадь сечения.
3. В ромбе $ABCD$ сторона равна 6, а $\angle A = 60°$. Точка K лежит на стороне CD так, что $CK = 2$. Из точки K к плоскости ромба проведён перпендикуляр KM, длина которого равна 6. Найдите: а) угол между прямой AD и плоскостью MCD; б) расстояние между прямыми MK и BD; в) угол между прямыми MC и BD.

Вариант 2

1. В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен 45°. Точка K лежит на стороне основания CD и делит её в отношении 5 : 3, считая от точки C. Найдите угол между прямой KM и плоскостью DMA.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырёхугольная призма с ребром основания 8 см и высотой 8,8 см. Точка K лежит на ребре основания AD и делит его в отношении 5 : 3, считая от D; точка P — середина ребра AB.
   а) Постройте сечение куба плоскостью C_1KP. б) Найдите величину двугранного угла $C_1(KP)C$. в) Найдите площадь сечения.
3. В ромбе $ABCD$ сторона равна 8, а $\angle A = 120°$. Точка K лежит на стороне CD так, что $CK = 2$. К плоскости ромба проведён перпендикуляр KM, длина которого равна 4. Найдите: а) угол между прямой AD и плоскостью MCD; б) расстояние между прямыми MK и BD; в) угол между прямыми MC и BD.

Зачёты

Зачёт № 1. Введение в стереометрию. Аксиомы стереометрии. Взаимное расположение прямых в пространстве

(повторение темы «Треугольники»)

Билет № 1

1. Теорема о плоскости, проходящей через прямую и не лежащую на ней точку.
2. Теорема Пифагора. Обратная ей теорема.
3. По данным рисунка определите взаимное расположение и величину угла между данными в кубе прямыми.
4. В треугольник ABC со сторонами $AB = 10$, $AC = 11$ и $BC = 7$ вписана окружность, касающаяся стороны AC в точке K. В каком из треугольников, BCK или BAK, лежит центр этой окружности?

Билет № 2

1. Теорема о плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые.
2. Теоремы об окружности, вписанной в треугольник. Формулы для вычисления радиуса этой окружности. Частные случаи. Вневписанные окружности.
3. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через три данные на рисунке точки. Определите вид сечения.
4. Длины двух высот треугольника равны 5 и 17. В каких пределах может изменяться третья высота треугольника?

Билет № 3

1. Теорема о плоскости, проходящей через две параллельные прямые.
2. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике.
3. Определите взаимное расположение и величину угла между данными прямыми в правильной треугольной призме, все рёбра которой равны между собой.
4. Длины двух медиан треугольника равны 5 и 17. В каких пределах может изменяться третья медиана треугольника?

Билет № 4

1. Взаимное расположение прямой и плоскости. Выполнение простейших стереометрических чертежей (на примерах).
2. Теоремы об окружности, описанной около треугольника. Формулы для вычисления радиуса этой окружности. Частные случаи. Теорема синусов.
3. Постройте сечение правильного тетраэдра плоскостью, проходящей через три данные на рисунке точки. Определите вид сечения.
4. В треугольнике ABC $AB = 12$, $BC = 7$, $AC = 5$. На стороне AB выбрана внутренняя точка K так, что прямая CK отсекает от треугольника ABC треугольник, ему подобный. Найдите все возможные значения длины отрезка CK.

Билет № 5

1. Изображение и простейшие свойства стереометрических фигур: куба, параллелепипеда, призмы, пирамиды, сферы и шара. Построение сечений куба и тетраэдра.
2. Теорема косинусов.
3. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через три данные на рисунке точки. Определите вид сечения.
4. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной $8\sqrt{3}$. Расстояние от точки K до прямых AB и AC равны соответственно 3 и 4. Какие значения может принимать расстояние от точки K до прямой BC?

Билет № 6

1. Пересекающиеся и параллельные прямые в пространстве. Скрещивающиеся прямые. Признаки скрещивающихся прямых.
2. Признаки подобия треугольников.
3. Постройте сечение правильной треугольной пирамиды, все рёбра которой равны между собой, плоскостью, проходящей через три данные на рисунке точки. Определите вид сечения.
4. В треугольник ABC со сторонами $AB = 7$, $BC = 8$, $AC = 9$ вписана окружность, касающаяся сторон AB и BC соответственно в точках C_1 и A_1. В каком отношении делит площадь треугольника прямая A_1C_1? (Дайте тот ответ, в котором значение отношения больше 1.)

Билет № 7

1. Теорема о двух параллельных прямых, одна из которых пересекает плоскость.

2. Формулы для вычисления площади треугольника. Вывод формулы Герона.
3. Постройте сечение правильной треугольной призмы плоскостью, проходящей через три данные на рисунке точки. Определите вид сечения.
4. В треугольнике ABC $AB = 3$, $AC = 4$. Найдите длину третьей стороны, если угол C в два раза меньше угла B.

Билет № 8

1. Теорема о транзитивности параллельности прямых в пространстве.
2. Свойства медиан треугольника. Центроид (центр тяжести) треугольника.
3. По данным рисунка определите взаимное расположение и величину угла между данными в кубе прямыми.
4. Постройте треугольник по двум углам и радиусу описанной окружности.

Билет № 9

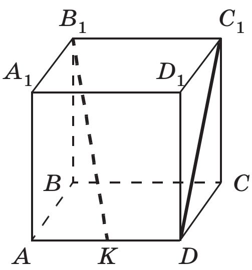
1. Направление в пространстве. Теорема о равенстве двух углов с сонаправленными сторонами. Определение угла между скрещивающимися прямыми.
2. Свойства биссектрис треугольника. Центр вписанной в треугольник окружности.
3. По данным рисунка определите взаимное расположение и величину угла между данными в правильном тетраэдре прямыми.
4. Постройте треугольник по данным стороне, высоте, опущенной на эту сторону, и медиане, проведённой к другой стороне.

Билет № 10

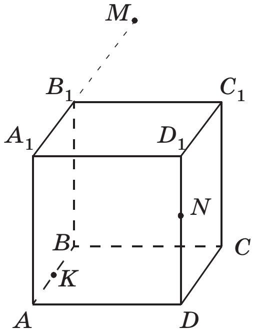
1. Простейшие задачи на построение в пространстве: проведение через точку прямой, параллельной данной; прямой, скрещивающейся с данной.
2. Свойство серединных перпендикуляров сторон треугольника. Центр описанной окружности и ортоцентр треугольника. Прямая Эйлера.
3. По данным рисунка определите взаимное расположение и величину угла между данными в кубе прямыми.
4. На плоскости даны три произвольные точки A_1, B_1 и C_1, являющиеся основаниями высот некоторого треугольника. Постройте этот треугольник.

Рисунки к зачёту № 1

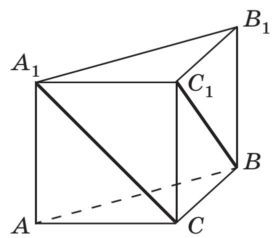
Б—1. Дан куб. Определите взаимное расположение и величину угла между прямыми C_1D и B_1K, где K — середина ребра AD.



К билету № 1



К билету № 2



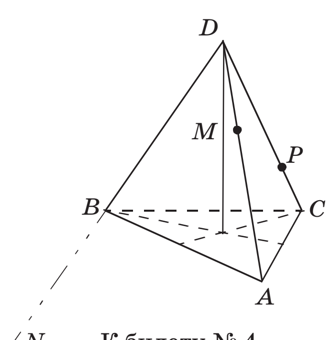
К билету № 3

Б—2. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через три точки M, N и K, где M — такая точка на луче A_1B_1, что B_1 — середина отрезка A_1M, N — середина отрезка DD_1, K — середина отрезка AB. Определите вид сечения.

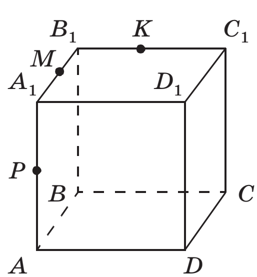
Б—3. Дана правильная треугольная призма, все рёбра которой равны между собой. Определите взаимное расположение и величину угла между прямыми A_1C и BC_1.

Б—4. Постройте сечение правильного тетраэдра плоскостью, проходящей через три данные на рисунке точки M, N и P. Определите вид сечения.

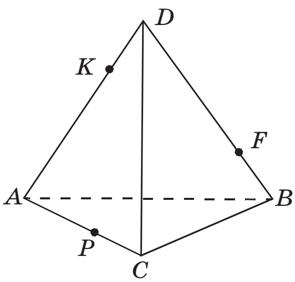
Б—5. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через три точки K, M и P. Определите вид сечения.



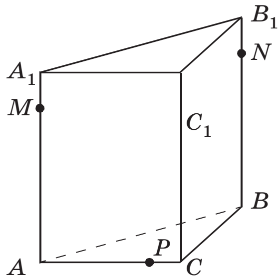
К билету № 4



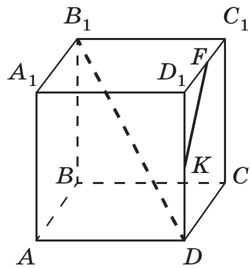
К билету № 5



К билету № 6



К билету № 7



К билету № 8

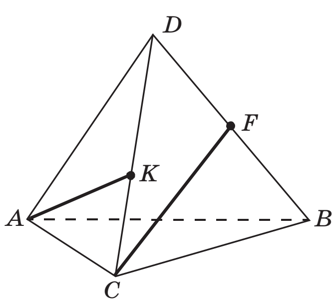
Б—6. Постройте сечение правильного тетраэдра плоскостью, проходящей через три данные на рисунке точки F, K и P. Определите вид сечения.

Б—7. Постройте сечение правильной треугольной призмы плоскостью, проходящей через три данные на рисунке точки M, N и P. Определите вид сечения.

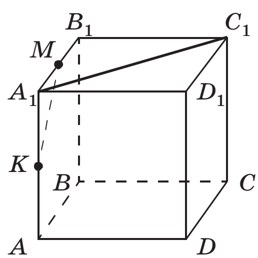
Б—8. По данным рисунка определите взаимное расположение и величину угла между данными в кубе прямыми B_1D и KF, где K и F — середины рёбер DD_1 и C_1D_1 соответственно.

Б—9. По данным рисунка определите взаимное расположение и величину угла между данными в правильном тетраэдре прямыми AK и CF, где K и F — середины рёбер CD и BD соответственно.

Б—10. По данным рисунка определите взаимное расположение и величину угла между данными в кубе прямыми A_1C_1 и KM, где K и M — середины рёбер AA_1 и A_1B_1 соответственно.



К билету № 9



К билету № 10

Зачёт № 2. Взаимное расположение прямой и плоскости, перпендикулярность прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью

(повторение темы «Окружность»)

Билет № 1

1. Параллельность прямой и плоскости. Признак параллельности прямой и плоскости.
2. Теоремы о касательной к окружности. Построение прямой, проходящей через данную точку и касающейся данной окружности (три случая).
3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина ребра B_1C_1, точка K — середина ребра CC_1. а) Определите взаимное расположение прямой AM и плоскости сечения BDK куба. б) На плоскости $A_1B_1C_1$ постройте такую точку P, чтобы прямая PK была перпендикулярна плоскости сечения BDK.
4. В окружности радиуса 10 проведена хорда длины 12, на которой взята точка P, делящая эту хорду в отношении $1 : 11$. Найдите расстояние от точки P до окружности.

Билет № 2

1. Теорема о линии пересечения двух плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную другой плоскости. Теорема о линии пересечения двух плоскостей, каждая из которых проходит через одну из параллельных прямых.
2. Теорема об отрезках касательных, проведённых к окружности из точки, лежащей вне круга данной окружности. Построение окружности данного радиуса, вписанной в данный угол.
3. Прямые AB, AC и AD образуют с плоскостью равностороннего треугольника BCD углы, равные α. Найдите величину угла между прямой AD и плоскостью ABC.
4. Через точку M, находящуюся на расстоянии 18 от окружности с центром O и радиусом 7, проведена прямая, касающаяся этой окружности в точке K. Найдите расстояние от точки K до середины отрезка OM.

Билет № 3

1. О плоскости, проходящей через одну из скрещивающихся прямых параллельно другой прямой.

2. Теорема о метрическом соотношении касательной и отрезков секущей, проведённых к окружности из одной точки.
3. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка M — середина ребра AD, точка K делит ребро DB в отношении $1 : 3$, считая от D, и является серединой отрезка DP. а) Определите взаимное расположение прямой MK и плоскости сечения APC тетраэдра. б) На плоскости сечения APC постройте такую точку T, чтобы прямая MT была перпендикулярна этой плоскости.
4. Через точку M проведены две равные хорды окружности радиуса R. Угол между прямыми, содержащими эти хорды, равен $60°$. Найдите наименьшее значение длин этих хорд.

Билет № 4

1. Решение простейших задач на построение в пространстве (проведение через данную точку прямой, параллельной данной плоскости, и плоскости, параллельной данной прямой).
2. Теорема об отрезках хорд окружности.
3. Прямая AK перпендикулярна плоскости квадрата $ABCD$, при этом $AK = AB$. Найдите угол между прямой BK и плоскостью AKM, если C — середина отрезка MD.
4. Через точку M проведены две равные хорды окружности радиуса R. Угол между прямыми, содержащими эти хорды, равен $60°$. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями расстояния между точками касания.

Билет № 5

1. Прямая, перпендикулярная плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.
2. Измерение углов, связанных с окружностью. (Центральный угол; вписанный угол; угол между двумя пересекающимися хордами; угол между хордой и касательной к окружности в одном из концов этой хорды; угол между двумя секущими, пересекающимися вне круга данной окружности.)
3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны между собой, точки N и M являются серединами рёбер соответственно AA_1 и BB_1. а) Определите взаимное расположение прямой NB_1 и плоскости сечения ACM призмы. б) На плоскости $A_1B_1C_1$ постройте такую точку Q, чтобы прямая MQ была перпендикулярна плоскости ACM.

4. Из бумажного круга вырезали три равных круга. Какой наименьший процент бумаги уйдёт в отходы?

Билет № 6

1. Перпендикуляр и наклонная. Теоремы о длинах перпендикуляра, наклонных и проекций.
2. Длина окружности, длина дуги, радианное измерение углов.
3. Гипотенуза AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC наклонена к плоскости ACM под углом $30°$. Прямые MC, MA и MB образуют с плоскостью треугольника ABC равные углы. Найдите величину этих углов.
4. В угол величиной $60°$ вписаны три попарно касающиеся друг друга окружности, сумма радиусов которых равна 8. Найдите радиус наибольшей из них.

Билет № 7

1. Теоремы о трёх перпендикулярах (прямая и обратная).
2. Площади круга и его частей.
3. Дана $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырёхугольная призма, у которой $ABCD$ — основание и $AA_1 = 2AB$. Точка M — середина ребра DC, K — точка пересечения диагоналей сечения призмы плоскостью MB_1C_1. а) Определите взаимное расположение прямой A_1D и плоскости MB_1C_1 сечения призмы. б) На плоскости ADA_1 постройте такую точку T, чтобы прямая KT была перпендикулярна плоскости MB_1C_1.
4. Три круга радиусов 5, 2 и 3 попарно касаются друг друга внешним образом. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках касания.

Билет № 8

1. Теорема о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости. Теорема о двух прямых, перпендикулярных плоскости.
2. Взаимное расположение двух окружностей. Формула для вычисления общей хорды двух окружностей через их радиусы R, r и расстояние между центрами d.
3. Квадрат $ABCD$ перегнули по его диагонали AC так, что прямая AB образовала с плоскостью треугольника ACD угол в $30°$. Чему в этом случае равен угол между прямыми AB и CD, если двугранный угол $B(AC)D$ — острый?

4. Две окружности радиусов 5 и 8 касаются друг друга в точке P, а общей их внешней касательной — соответственно в точках A и B. Найдите величину угла APB.

Билет № 9

1. Построение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой. Построение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной плоскости.
2. Общие касательные прямые двух окружностей. Вычисление длин отрезков общих касательных прямых двух касающихся друг друга окружностей через их радиусы R и r.
3. Дана $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырёхугольная призма, у которой $ABCD$ — основание и $AB = \sqrt{2} \cdot AA_1$. Точка M — середина ребра DD_1, точка K делит отрезок AC в отношении $1:3$, считая от A. а) Определите взаимное расположение и угол между прямой A_1K и плоскостью сечения AMC_1 призмы. б) На плоскости $A_1B_1C_1$ постройте такую точку E, чтобы прямая ME была перпендикулярна плоскости AMC_1.
4. В окружность радиуса R вписан одиннадцатиугольник, одна сторона которого равна R, а девять из десяти остальных сторон равны между собой. Найдите наибольшее значение, которое может принимать отношение площади этого одиннадцатиугольника к площади круга.

Билет № 10

1. Определение угла между наклонной и плоскостью. О величине угла между наклонной и плоскостью. Угол между прямой и плоскостью.
2. Метрические соотношения в правильных многоугольниках, вписанных в окружность и описанных около неё.
3. Прямые MK_1, MK_2, MK_3, ..., MK_{18} образуют равные углы с плоскостью ABC, в которой лежат все точки K_i ($i = 1, \ldots, 18$). Причём $BK_1 = BK_{11}$, а $AK_7 = AK_{15}$. Точки T и Q — середины отрезков соответственно K_1K_{11} и K_7K_{15}. Прямые BT и AQ пересекаются в точке L. Найдите угол между прямой ML и плоскостью ABC.
4. На хордах AB и CD окружности радиуса 7 выбраны такие точки K и M, что $AK \cdot KB = CM \cdot MD = 40$. Какое наибольшее значение может принимать длина отрезка KM?

Зачёт № 3. Параллельное проектирование. Параллельные плоскости. Угол между двумя плоскостями. Расстояния в пространстве

(повторение темы «Четырёхугольники»)

Билет № 1

1. Параллельное проектирование. Свойства параллельного проектирования. Ортогональное проектирование, его свойства.
2. Свойства параллелограмма.
3. Пусть точка K делит ребро AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в отношении $2:1$, считая от A. Через точку K проведите сечение куба, параллельное плоскости A_1C_1D, и постройте ортогональную проекцию этого сечения на грань $ABCD$.
4. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ разделила сторону BC в отношении $3:7$, считая от B. Найдите площадь параллелограмма, если его периметр 1 м и один из углов в два раза больше другого.

Билет № 2

1. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Параллельность плоскостей. Признаки параллельности двух плоскостей.
2. Признаки параллелограмма. Площадь параллелограмма.
3. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром a, K и F — середины рёбер DD_1 и C_1D_1 соответственно. Найдите расстояние между прямыми B_1D и KF.
4. Площадь равнобедренной трапеции равна 8, а угол между прямыми, содержащими диагонали трапеции, равен 30°. Чему равна высота трапеции?

Билет № 3

1. Теорема о линиях пересечения двух параллельных плоскостей с третьей плоскостью. Теорема о прямой, пересекающей одну из двух параллельных плоскостей.
2. Ромб. Свойства и признаки ромба. Формулы вычисления площади ромба.
3. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма с равными рёбрами (ABC — основание). Найдите угол между плоскостью сечения A_1BC и гранью BB_1C_1C.

4. В четырёхугольнике $ABCD$ величины углов A, B, C и D относятся как $2 : 3 : 4 : 3$, а вершина C удалена от прямых AB и AD соответственно на 5 и 16. Найдите диагонали четырёхугольника.

Билет № 4

1. Теорема о плоскости, пересекающей одну из двух параллельных плоскостей.
2. Прямоугольник, его признаки и свойства. Формулы вычисления площади прямоугольника.
3. На разных гранях двугранного угла величины $60°$ взяты точки A и B, при этом точки A_1 и B_1 — их соответствующие проекции на ребро двугранного угла; $A_1B_1 = 24$, $AA_1 = 5$, $BB_1 = 8$. Найдите расстояние между точками A и B.
4. Высоты параллелограмма относятся как $2 : 7$. В каком отношении делит площадь параллелограмма биссектриса его острого угла?

Билет № 5

1. Теорема о проведении плоскости, параллельной данной плоскости, через точку, не лежащую на ней. Единственность такой плоскости. Теорема о транзитивности параллельности плоскостей в пространстве.
2. Квадрат, его свойства и признаки. Формулы вычисления площади квадрата.
3. Пусть $ABCD$ — тетраэдр, а точки M, N, K находятся на его рёбрах AD, BD и AC соответственно. При этом $AM : MD = 2 : 3$; $BN : MD = 1 : 2$; $AK : KC = 3 : 1$, а расстояние от вершины D до плоскости сечения MNK равно 18. Найдите расстояния от остальных вершин тетраэдра до этого сечения.
4. Точки M, N, P и Q являются серединами сторон соответственно AB, BC, CD и AD четырёхугольника $ABCD$, причём $MP = NQ = 5$, а угол между прямыми MP и NQ равен $\arcsin 0{,}2$. Найдите площадь четырёхугольника $MNPQ$.

Билет № 6

1. Теорема о прямой, перпендикулярной к одной из двух параллельных плоскостей.
2. Площадь параллелограмма. Формулы вычисления площади параллелограмма.
3. Для правильной четырёхугольной пирамиды, у которой все рёбра равны, найдите: а) величину угла между несмеж-

ными боковыми рёбрами; б) величину угла между плоскостями, содержащими две соседние боковые грани.

4. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Площади треугольников ADO и BCO равны соответственно 49 и 4. Найдите площадь трапеции.

Билет № 7

1. Двугранный угол. Линейный угол двугранного угла. Теорема о линейном угле двугранного угла. Угол между двумя плоскостями.
2. Трапеция. Теорема о средней линии трапеции. Теорема о четырёх точках трапеции.
3. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром a. Докажите, что плоскости сечений AB_1D_1 и C_1BD параллельны, и найдите расстояние между ними.
4. Биссектрисы внутренних углов прямоугольника $ABCD$ образовали четырёхугольник площади 4. Найдите площадь прямоугольника, если его диагональ равна 10.

Билет № 8

1. Перпендикулярные плоскости. Признак перпендикулярности двух плоскостей. Теорема о прямой, перпендикулярной линии пересечения двух взаимно перпендикулярных плоскостей и лежащей в одной из них.
2. Прямая и обратная теоремы о четырёхугольнике, вписанном в окружность.
3. Внутри двугранного угла величины 60° взята точка M, удалённая от его граней на расстояния 5 и 16. Найдите расстояние от точки M до ребра двугранного угла.
4. Найдите угол между диагоналями трапеции, если отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен её средней линии.

Билет № 9

1. Теорема о прямой, перпендикулярной одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и имеющей со второй плоскостью общую точку. Теорема о линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей.
2. Прямая и обратная теоремы о четырёхугольнике, описанном около окружности.
3. Построить на гранях куба множество точек, удалённых от середины диагонали куба на расстояние, равное 67,5% длины ребра куба.

4. Точка O лежит внутри угла MTK. При помощи циркуля и линейки проведите через точку O прямую, пересекающую стороны угла TM и TK соответственно в точках A и B так, что O — середина AB.

Билет № 10

1. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние между прямой и плоскостью. Расстояние между двумя плоскостями. Расстояние между скрещивающимися прямыми.
2. Метрические соотношения в трапеции. Площадь трапеции.
3. Найдите расстояние между прямой, содержащей боковое ребро правильного тетраэдра, и скрещивающейся с ней прямой, содержащей медиану некоторой грани тетраэдра. (Длину ребра тетраэдра считать равной a.)
4. Стороны четырёхугольника $MKTB$ равны соответственно $MK = 7$; $KT = 7$; $TB = 15$. Какой наибольший радиус может иметь вписанная в этот четырёхугольник окружность?

Зачёт № 4. Векторы в пространстве. Координаты в пространстве

(повторение темы «Координаты на плоскости»)

Билет № 1

1. Вектор в пространстве. Коллинеарность двух векторов и компланарность трёх векторов. Угол между векторами. Линейные операции над векторами: сложение, вычитание, умножение вектора на число. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. О трёх некомпланарных векторах в пространстве. Разложение вектора по трём некомпланарным векторам. Векторный базис в пространстве. Координаты вектора в данном базисе пространства. Условие коллинеарности двух векторов и компланарности трёх векторов в координатах.
2. Окружность как геометрическое место точек. Уравнение окружности в координатах.
3. Пусть M — точка, лежащая внутри куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а M_1, M_2, M_3 — ортогональные проекции точки M на рёбра DC, A_1D_1 и BB_1 соответственно. Известно, что M_1 — середина DC, $A_1M_2 : M_2D_1 = 1 : 8$, $BM_3 : M_3B_1 = 1 : 2$. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ и найдите отношение длины вектора $\overrightarrow{AM}$ к длине ребра куба.

4. Прямая на координатной плоскости задана уравнением $3x + 4y + 12 = 0$. На параболе $y = x^2$ найдите ближайшую к этой прямой точку.

Билет № 2

1. Скалярное произведение векторов и его свойства. Формулы, связанные со скалярным произведением. Условие ортогональности двух векторов.
2. Уравнение прямой на плоскости. Виды уравнения прямой на плоскости.
3. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 2, а O — точка пересечения его диагоналей. Прямоугольная система координат с центром O определена таким образом, что положительное направление оси Ox — это луч OM, где M — точка отрезка B_1D_1 такая, что $OM \perp OB_1$; положительное направление оси Oy сонаправлено с лучом A_1C_1, а положительное направление оси Oz — это луч OB_1. Найдите координаты всех вершин куба.
4. Напишите уравнение окружности, симметричной окружности $x^2 + y^2 + 2x + 7y = 0$ относительно прямой $y - x = 0$.

Билет № 3

1. Ортонормированный базис в пространстве. Прямоугольная декартова система координат в пространстве. Координаты вектора, действия над векторами в координатах. Проекция вектора на ось в координатах. Условия коллинеарности и ортогональности двух векторов в координатах.
2. Формула расстояния между точкой и прямой в координатах на плоскости.
3. Пусть M — точка, лежащая внутри или на поверхности правильного тетраэдра $ABCD$, а B_1, C_1, D_1 — точки, полученные проектированием точки M на рёбра AB, AC и AD соответственно, — параллельно соответствующим граням, содержащим вершину A. Известно, что $AB_1 : B_1B = 1 : 5$, $AC_1 : C_1C = 1 : 2$, а D_1 — середина AD. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ и найдите отношение длины вектора $\overrightarrow{AM}$ к длине ребра тетраэдра.
4. Даны точки $A(-2; -5)$; $B(11; -13)$. При каких значениях параметра a отрезок AB не пересекает прямую $2x + 3y = a$?

Билет № 4

1. Координаты точки. Формулы нахождения: расстояния между двумя точками в координатах; координат середины отрезка и точки, делящей отрезок в данном отношении.
2. Угол между двумя прямыми, заданными своими уравнениями на плоскости.
3. Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром 5, а O — середина ребра AB. Прямоугольная система координат с центром O определена таким образом, что положительное направление оси Ox — это луч OA, оси Oy — луч OC, а положительное направление оси Oz сонаправлено с лучом HD, где H — основание высоты тетраэдра, опущенной из D. Найдите координаты всех вершин тетраэдра.
4. Найдите геометрическое место точек плоскости, расстояние от которых до начала координат равно расстоянию от прямой $x = 4$.

Билет № 5

1. Уравнение и неравенства, задающие множества точек в пространстве. Уравнение сферы и неравенство, задающее шар.
2. Парабола как геометрическое место точек. Уравнение параболы в координатах.
3. $ABCDS$ — правильная четырёхугольная пирамида с основанием $ABCD$, все рёбра которой равны между собой. Пусть точка N делит диагональ BD основания в отношении 1 : 3, считая от B, а M — середина отрезка NS. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AS}$ и найдите отношение длины вектора $\overrightarrow{AM}$ к длине ребра пирамиды.
4. Даны точки $A(-2;\ 0)$ и $B(1;\ 0)$. Найдите геометрическое место всех точек $C(x;\ y)$ плоскости, являющихся вершинами треугольника ABC с биссектрисой CO, где O — начало координат.

Билет № 6

1. Плоскость в пространстве в координатах. Уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно данному вектору. Общее уравнение плоскости и его частные случаи. Уравнение плоскости в отрезках; другие виды уравнений плоскости.
2. Условие принадлежности трёх точек одной прямой в координатах на плоскости.

3. Найдите геометрическое место всех точек пространства, сумма квадратов расстояний от каждой из которых до вершин правильной треугольной призмы равно 7, если каждое ребро призмы имеет длину 1.
4. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках $A(-7; 11)$, $B(8; 3)$ и $C(-1; -13)$.

Билет № 7

1. Формула нахождения угла между двумя плоскостями, заданными своими уравнениями; условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
2. Парабола как геометрическое место точек. Уравнение параболы.
3. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, все рёбра которой равны между собой. Пусть точка N делит ребро B_1C_1 в отношении $1 : 2$, считая от B_1, а M — середина отрезка AN. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AA_1}$ и найдите отношение длины вектора $\overrightarrow{AM}$ к длине ребра призмы.
4. При каких значениях параметра b прямая $5x + 12y = b$ имеет хотя бы одну общую точку с окружностью $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$?

Билет № 8

1. Различные виды уравнений прямой в пространстве. Угол между двумя прямыми, заданными своими уравнениями; условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве в координатах.
2. Разложение вектора плоскости по двум неколлинеарным векторам этой плоскости.
3. Тетраэдр $ABCD$ задан координатами своих вершин: $A(1; 1; 1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(0; 0; 7)$, $D(0; -6; 8{,}5)$. Докажите, что три вершины тетраэдра лежат в плоскости $x + 2y + 2z - 5 = 0$, и найдите длину высоты тетраэдра, опущенной на эту плоскость.
4. Найдите оси симметрии гиперболы $xy + 2x - 3y = 111$.

Билет № 9

1. Взаимное расположение прямой и плоскости в координатах. Угол между прямой и плоскостью, условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости в координатах.

2. Гипербола как геометрическое место точек плоскости. Уравнение гиперболы.
3. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — прямоугольный параллелепипед такой, что $AB : AD : AA_1 = 3 : 4 : 6$. Точка M лежит внутри этого параллелепипеда, а M_1, M_2, M_3 — ортогональные проекции точки M на рёбра AB, AD и AA_1 соответственно, причём $AM_1 : M_1B = 2 : 1$, $AM_2 : M_2D = 1 : 1$, $AM_3 : M_3A_1 = 1 : 5$. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ и найдите отношение длины вектора $\overrightarrow{AM}$ к длине ребра параллелепипеда.
4. Напишите уравнение прямой, симметричной прямой $3x + 4y = 0$ относительно точки $M(-3; 2)$, и найдите расстояние между этими прямыми.

Билет № 10

1. Формула расстояния от точки до плоскости в координатах. Методы вычисления расстояния между двумя параллельными плоскостями, между прямой и параллельной ей плоскостью, между двумя скрещивающимися прямыми, заданными своими уравнениями.
2. Эллипс как геометрическое место точек плоскости. Уравнение эллипса.
3. Найдите угол между плоскостями $2x + 2y - z + 7 = 0$ и $3x - 4y - 12z = 0$ и определите взаимное расположение прямой пересечения этих плоскостей и плоскости Oxy.
4. Начало координат O является центром окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC. Найдите координаты вершин треугольника, если $\angle B = 150°$, точка A лежит на оси ординат, координаты точки C положительны, а длина отрезка OC равна 2.

Билеты по геометрии для 10 класса

Билет № 1

1. Теорема о плоскости, проходящей через прямую и не лежащую на ней точку.
2. Теорема о перпендикуляре к одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей, имеющем с другой плоскостью общую точку.
3. Две стороны треугольника равны соответственно 5 и 8. При каких значениях третьей стороны этот треугольник может быть тупоугольным? Ответ: $(3; \sqrt{39}) \cup (\sqrt{89}; 13)$.
4. Найдите расстояние от точки (1; 2; 3) до прямой пересечения плоскостей $x - y = 0$ и $y - z = 0$. Ответ: $\sqrt{2}$.

Билет № 2

1. Теорема о плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые.
2. Теорема о линейных углах двугранного угла.
3. Боковые стороны трапеции равны соответственно 3 и 7, а прямые, содержащие эти стороны, перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если её основания относятся, как 1 : 2. Ответ: 31,5.
4. Квадрат $ACMD$ и правильный треугольник ABC расположены так, что двугранный угол $M(AC)B = 120°$. Найдите расстояния от точки B до плоскости квадрата и от точки M до плоскости треугольника, если $AC = 4$. Ответ: 3 и $2\sqrt{3}$.

Билет № 3

1. Теорема о плоскости, проходящей через две параллельные прямые.
2. Теорема об угле между наклонной и плоскостью.
3. Стороны треугольника равны соответственно 13, 14 и 15. Найдите острый угол между прямыми, содержащими соответственно меньшую и большую высоты этого треугольника. Ответ: $\arccos \frac{33}{65}$.

4. Найдите координаты всех точек M пространства, удалённых от плоскости $3x + 2y - 8z = 7$ на такое же расстояние, что и начало координат O, при этом выполняется условие: отрезок OM не имеет общих точек с данной плоскостью.
   Ответ: координаты точек M удовлетворяют уравнению $3x + 2y - 8z = 0$.

Билет № 4

1. Теорема о прямой, параллельной данной прямой и проходящей через данную точку пространства, не лежащую на данной прямой.
2. Теорема об общем перпендикуляре двух скрещивающихся прямых.
3. Найдите меньший угол прямоугольного треугольника, если радиус вписанной в него окружности составляет 40% радиуса описанной около него окружности.
   Ответ: $\operatorname{arctg} 0{,}75$.
4. Внутри двугранного угла взята точка, удалённая от граней этого угла на расстояния 12 и 15. Найдите расстояние от этой точки до ребра двугранного угла, если его величина равна $60°$. Ответ: $2\sqrt{183}$.

Билет № 5

1. Теорема о двух параллельных прямых, одна из которых пересекает данную плоскость.
2. Теорема о двух параллельных плоскостях, одна из которых перпендикулярна данной прямой.
3. В квадрате $ABCD$ на стороне BC отмечена такая точка K, что $BK = 4$, $KC = 2$; точка M — середина DC. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, K и M.
   Ответ: $\frac{13\sqrt{5}}{8}$.
4. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно 6. Точки K, H и P лежат соответственно на рёбрах AD, BD и CD так, что $AK = 3$, $BH = 4$ и $CP = 2$. Постройте на прямой AC такую точку T, что прямые PE и KT пересекаются. Вычислите расстояние от точки T до вершины D. Ответ: $6\sqrt{3}$.

Билет № 6

1. Признаки скрещивающихся прямых (2 теоремы).
2. Признак параллельности двух плоскостей.

3. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, CC_1 и биссектрисы AA_2, CC_2. При этом оказалось, что точка C_1 — середина AC_2, а точка A_1 — середина CA_2. Найдите углы треугольника ABC. Ответ: величины углов A, C и B соответственно равны $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$ и $\frac{\pi}{5}$.
4. Два равных равнобедренных прямоугольных треугольника ABC и ABP лежат в разных гранях двугранного угла величины 60°. Найдите длину отрезка CP, если длина катета AB равна $4\sqrt{2}$. Ответ: 8 или $4\sqrt{2}$.

Билет № 7

1. Теорема о транзитивности параллельности прямых в пространстве.
2. Теоремы о трёх перпендикулярах (прямая и обратная) или обобщённая теорема о трёх перпендикулярах.
3. Касающиеся друг друга внешним образом две окружности радиусов 3 и 12 касаются прямой, по одну сторону от которой они располагаются. Найдите радиусы каждой из окружностей, касающихся данных двух окружностей и прямой. Ответ: $\frac{4}{3}$ и 12.
4. $MABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида, все рёбра которой равны 10. Найдите расстояние между прямой AC и медианой MK грани MDC. Ответ: $\sqrt{10}$.

Билет № 8

1. Теорема об углах между сонаправленными лучами.
2. Теорема о проведении прямой, перпендикулярной данной плоскости.
3. Сколько процентов составляет сумма квадратов медиан любого треугольника от суммы квадратов его сторон? Ответ: 75%.
4. Лучи AB, AC и AM образуют острые углы BAC, BAM и CAM, равные α. Луч AK образует с каждым из данных лучей равные тупые углы. Найдите величину этих тупых углов. Ответ: $\pi - \arccos\sqrt{\frac{1+2\cos\alpha}{3}}$.

Билет № 9

1. Признак параллельности прямой и плоскости.
2. Теорема о линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей плоскости.

3. Окружности радиусов 14 и 77 касаются друг друга внешним образом. Определите сторону правильного треугольника, две вершины которого лежат по две на каждой из данных окружностей. Ответ: 22.
4. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середины трёх попарно скрещивающихся рёбер куба, и найдите угол между плоскостью этого сечения и плоскостью одной из граней куба. Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Билет № 10

1. Теорема о линии пересечения двух плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную другой плоскости.
2. Признак перпендикулярности двух плоскостей.
3. В трапецию вписана окружность радиуса 2. Точка касания окружности с нижним основанием трапеции делит это основание на отрезки длины 3 и 4. Найдите стороны и площадь трапеции. Ответ: 7; 5; $\frac{7}{3}$; $\frac{13}{9}$; $\frac{56}{3}$.
4. Точки A и B лежат на разных гранях двугранного угла, величина которого равна $60°$; A_1 и B_1 — проекции точек A и B на ребро двугранного угла. Найдите длину отрезка AB, если $AA_1 = A_1B_1 = BB_1 = 2$. Ответ: $2\sqrt{2}$.

Билет № 11

1. Теорема о линии пересечения двух плоскостей, каждая из которых проходит через одну из двух параллельных прямых.
2. Уравнения плоскости.
3. Дана окружность радиуса R. Прямоугольный треугольник с острым углом α расположен так, что его гипотенуза является хордой данной окружности, а вершина прямого угла лежит на диаметре, параллельном этой хорде. Найдите площадь этого треугольника. Ответ: $\frac{R^2 \sin 2\alpha}{1 + \sin^2 2\alpha}$.
4. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точку пересечения диагоналей грани $ABCD$ параллельно прямым AB_1 и BK (точка K — середина ребра CC_1). Сколько процентов составляет площадь сечения от площади поверхности куба? Ответ: 12,5%.

Билет № 12

1. Теорема о проведении плоскости, перпендикулярной данной прямой.

2. Параметрические уравнения прямой.
3. На сторонах прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 построены квадраты, лежащие вне треугольника. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах этих квадратов. Ответ: 49.
4. Точка K — середина стороны AD квадрата $ABCD$. Квадрат перегнули по прямой KC так, что образовался двугранный угол величиной $60°$. Найдите отношение длины отрезка BD к длине диагонали квадрата. Ответ: $\sqrt{0{,}4}$.

Билет № 13 (Счастливый!)

Вытащивший его ученик отвечает любой по его выбору билет из остальных 19.

Билет № 14

1. Теорема о линиях пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.
2. Теоремы о перпендикуляре и наклонной, об ортогональных проекциях равных наклонных, проведённых к плоскости из одной точки.
3. В угол вписаны две окружности радиусов 1 и r, касающиеся друг друга. Найдите все возможные значения r, если величина данного угла α. Ответ: $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right)$ или $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi+\alpha}{4}\right)$.
4. Точка O не лежит в плоскости треугольника ABC и $\overrightarrow{OK} = 3\cdot\overrightarrow{OA} + 2\cdot\overrightarrow{OB} + 7\cdot\overrightarrow{OC}$. Точка T лежит на прямой OK, и плоскость ABC проходит через середину отрезка OT. Разложите вектор $\overrightarrow{OT}$ по векторам $\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OC}$. Ответ: $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{7}{6}\cdot\overrightarrow{OC}$.

Билет № 15

1. Теорема о прямой, пересекающей одну из параллельных плоскостей.
2. Теорема о двух прямых, перпендикулярных данной плоскости.
3. Точки C и T расположены так на дуге AB окружности диаметра $AB = 6$, что дуги AC и BT равны, при этом $\angle CAT = 20°$. Найдите площадь фигуры, которая лежит во внутренней области угла CAT и ограничена хордами AC, AT и дугой CT. Ответ: π.

4. В правильном тетраэдре с ребром 4 проведено сечение плоскостью, равноудалённой от всех вершин данного тетраэдра. Найдите площадь этого сечения. Ответ: $\sqrt{3}$ или 4.

Билет № 16

1. Теорема об отрезках параллельных прямых, заключённых между двумя параллельными плоскостями.
2. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.
3. AT — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AT^2 = AB \cdot AC - BT \cdot CT$.
4. Через вершину A в кубе проведено сечение $AKTPM$ так, что $AK = AM$ и $KT = PM$. Угол KAM равен α. Найдите остальные углы пятиугольника $AKTPM$ и допустимые значения α. Ответ: два угла по $180° - \alpha$ и два угла по $90° + 0{,}5\alpha$; $60° < \alpha < 90°$.

Билет № 17

1. Теорема о проведении плоскости параллельно данной плоскости через точку пространства, не лежащую на данной плоскости.
2. Уравнение сферы.
3. Стороны AB и AD параллелограмма $ABCD$ равны соответственно 6 и 11, а диагональ BD равна 13. Окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD, касаются диагонали BD в точках M и K. Найдите длину MK. Ответ: 5.
4. Отрезок AB — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AK и BT, при этом $AB = AK = BT = a$. Найдите угол и расстояние между прямыми TK и AB, если AK и BT перпендикулярны. Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ и $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Билет № 18

1. Теорема о транзитивности параллельности плоскостей.
2. Теорема о двух плоскостях, перпендикулярных одной прямой.
3. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 5. Точки K и T таковы, что $AK^2 + BK^2 + CK^2 + DK^2 = 99$, а $AT^2 + BT^2 + CT^2 + DT^2 = 101$. Имеет ли отрезок KT общие точки с описанной около квадрата окружностью? Ответ: да.
4. Два равных прямоугольных треугольника с катетами 3, 4 и гипотенузой 5 имеют общую гипотенузу. Плоскости треугольников взаимно перпендикулярны. Найдите все зна-

чения, которые может принимать расстояние между вершинами прямых углов. Ответ: $2{,}4\sqrt{2}$; $0{,}2\sqrt{337}$.

Билет № 19

1. Теорема о плоскости, пересекающей одну из двух параллельных плоскостей.
2. Теорема о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна данной плоскости.
3. Сумма квадратов медиан прямоугольного треугольника равна 6. Найдите гипотенузу этого треугольника. Ответ: 2.
4. Точки $A(1; -1; 1)$, $B(1; 3; 1)$ и $C(4; 3; 1)$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты точки D, углы параллелограмма и длину диагонали BD. Ответ: $(4; -1; 1)$; все углы по $90°$; $BD = 5$.

Билет № 20

1. Теорема о свойстве плоских углов трёхгранного угла.
2. Скалярное произведение векторов и его свойства. Доказательство двух свойств на выбор учащегося.
3. Окружность радиуса 2 касается дуги и диаметра полукруга радиуса 4. Найдите радиус окружности, касающейся дуги полукруга, диаметра полукруга и окружности радиуса 2. Ответ: 1.
4. Точки M, K и T отмечены на рёбрах AB, AD и AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, что $AK : KB = 1 : 2$, M — середина AD и $AT = 3FA_1$. Плоскость MKT пересекает диагональ куба AC_1 в точке E. Найдите длину отрезка AE, если длина диагонали куба 19 м. Ответ: 3 м.

Устные вопросы к итоговому испытанию по геометрии в 10 классе

1. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудалённых от двух данных точек.
2. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудалённых от вершин данного треугольника.
3. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудалённых от вершин данного прямоугольника.
4. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудалённых от двух данных параллельных плоскостей.
5. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудалённых от двух данных пересекающихся плоскостей.
6. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудалённых от двух данных параллельных прямых.
7. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудалённых от двух данных пересекающихся прямых.
8. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудалённых от трёх прямых, содержащих стороны данного треугольника.
9. Найдите геометрическое место точек пространства, удалённых от данной точки пространства на данное расстояние.
10. Найдите геометрическое место точек пространства, из каждой из которых данный отрезок виден под прямым углом.
11. Найдите геометрическое место точек пространства, удалённых от сферической поверхности радиуса R на расстояние R.
12. Найдите геометрическое место точек пространства, удалённых от сферической поверхности радиуса R на данное расстояние $a > 0$ (рассмотрите всевозможные случаи соотношения R и a).
13. Через данную точку вне данной плоскости проведены всевозможные прямые, параллельные этой плоскости. Найдите поверхность, образованную этими прямыми.

14. Через данную точку проведены всевозможные прямые, перпендикулярные данной прямой. Найдите поверхность, образованную этими прямыми.

15. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудалённых от трёх данных попарно пересекающихся плоскостей, перпендикулярных некоторой данной плоскости.

16. Как расположены прямые a и b, если они обе:
а) параллельны некоторой данной прямой;
б) параллельны некоторой данной плоскости;
в) перпендикулярны некоторой данной прямой;
г) перпендикулярны некоторой данной плоскости?

17. Как расположены плоскости α и β, если они обе:
а) параллельны некоторой данной прямой;
б) параллельны некоторой данной плоскости;
в) перпендикулярны некоторой данной прямой;
г) перпендикулярны некоторой данной плоскости?

18. Как расположены прямая a и плоскость α, если они обе:
а) параллельны некоторой данной прямой;
б) параллельны некоторой данной плоскости;
в) перпендикулярны некоторой данной прямой;
г) перпендикулярны некоторой данной плоскости?

19. Как расположены две сферы радиусов R_1 и R_2, если расстояние между их центрами равно $a > 0$ и $R_1 > R_2$?

20. Как расположены плоскость α и сфера радиуса R, если расстояние от центра сферы до плоскости равно a? (Рассмотрите всевозможные случаи соотношения R и a.)

21. Может ли в сечении куба плоскостью получиться: а) правильный треугольник; б) правильный четырёхугольник; в) правильный пятиугольник; г) правильный шестиугольник; д) неправильный семиугольник?

22. Вне плоскости α лежат две точки A и B. Найдите на плоскости α все точки, равноудалённые от точек A и B. (Рассмотрите случаи: отрезок AB перпендикулярен плоскости α; отрезок AB не перпендикулярен плоскости α.)

23. На поверхности куба найдите все такие точки, из каждой из которых диагональ данной грани куба видна под прямым углом.

24. Точка M лежит внутри куба с ребром длины a. Найдите сумму расстояний от этой точки до всех граней куба.

25. Точка M лежит внутри правильного тетраэдра с ребром длины a. Найдите сумму расстояний от этой точки до всех граней тетраэдра.

26. Шар радиуса R касается граней прямого двугранного угла. Найдите расстояние от центра шара до ребра этого двугранного угла.

27. Шар радиуса R касается граней двугранного угла. Найдите расстояние от центра шара до ребра этого двугранного угла, если величина двугранного угла α.

28. Где располагаются центры всех сфер, проходящих через: а) данную точку; б) две данные точки; в) три данные точки; г) четыре данные точки?

29. Могут ли куб и сфера иметь ровно: а) одну общую точку; б) две общие точки; в) три общие точки; г) четыре общие точки; д) семь общих точек?

30. Куб пересечён плоскостью, которая пересекает все его боковые рёбра в их внутренних точках и образует с плоскостью основания угол $30°$. Найдите ребро куба, если площадь полученного сечения равна $6\sqrt{3}$.

31. Найдите угол между скрещивающимися диагоналями двух граней куба: а) соседних; б) противоположных.

32. Высота четырёхугольной пирамиды равна 6. Найдите расстояние от основания пирамиды до: а) середины бокового ребра; б) точки пересечения медиан боковой грани.

33. Сколько существует плоскостей, равноудалённых от всех вершин куба?

34. Сколько существует плоскостей, равноудалённых от всех вершин тетраэдра?

35. Справедлива ли теорема: «Равные отрезки, заключённые между параллельными плоскостями, лежат на параллельных прямых»?

36. Справедлива ли теорема: «Равные отрезки, заключённые между параллельными плоскостями, имеют равные ортогональные проекции на эти плоскости»?

37. Справедлива ли теорема: «Если отрезки двух параллельных прямых, заключённые между плоскостями, равны, то плоскости параллельны»?

38. Справедлива ли теорема: «Если отрезки двух любых параллельных прямых, заключённые между плоскостями, равны, то плоскости параллельны»?

39. Справедлива ли теорема: «Если каждая из двух точек прямой равноудалена от вершин треугольника, то прямая перпендикулярна плоскости этого треугольника»?

40. Справедлива ли теорема: «Если каждая из двух точек прямой равноудалена от прямых, содержащих стороны данного треугольника, то прямая перпендикулярна плоскости этого треугольника»?

В заданиях 41—49 вместо отточий вставьте одно из трёх сочетаний: «необходимо», «достаточно», «необходимо и достаточно» или укажите на невозможность ни одного из этих сочетаний.

41. Для того чтобы расстояние между двумя параллельными плоскостями равнялось ρ, ..., чтобы расстояние между двумя их скрещивающимися прямыми равнялось ρ.

42. Для того чтобы расстояние между двумя прямыми, лежащими в параллельных плоскостях, равнялось расстоянию между этими плоскостями, ..., чтобы эти прямые были скрещивающимися.

43. Для того чтобы около четырёх точек можно было описать сферу, ..., чтобы эти точки не лежали в одной плоскости.

44. Для того чтобы через прямую можно было провести плоскость, параллельную данной плоскости, ..., чтобы эта прямая была параллельна данной плоскости.

45. Для того чтобы через прямую можно было провести единственную плоскость, перпендикулярную данной плоскости, ..., чтобы эта прямая была параллельна данной плоскости.

46. Для того чтобы через прямую можно было провести не менее двух плоскостей, перпендикулярных данной плоскости, ..., чтобы эта прямая была перпендикулярна данной плоскости.

47. Для того чтобы через прямую можно было провести плоскость, параллельную данной прямой, ..., чтобы эта прямая была параллельна данной прямой.

48. Для того чтобы в данной плоскости существовала прямая, параллельная данной прямой, ..., чтобы данная плоскость была параллельна данной прямой.

49. Для того чтобы в данной плоскости существовала прямая, перпендикулярная данной прямой, ..., чтобы данная плоскость была перпендикулярна данной прямой.

Ответы

Контрольные работы

К—0

ЗДП. 1. 40°, 140°, 140°, 40°; $BC = R$. **2.** $2\sqrt{10}$; $6\sqrt{10}$, 20 (см); радиус описанной окружности 10 см; радиус вписанной окружности $(4\sqrt{10} - 10)$ см. **3.** 9 : 5. **4.** $AB = \sqrt{117}$; $BC = 12$; $AC = 9$. **5.** $\frac{2R^2(\sin\alpha + 1)}{\sin\alpha}$.

В—1. 1. $2R$ или $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}R$. **2.** 3. **3.** 5. **4.** 1,5; $\frac{10}{9}\sqrt{21}$. **5.** 60°, 60°, 120°, 120°.

В—2. 1. $2r$ или $r\sqrt{3}$. **2.** 10. **3.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. **4.** $\frac{10}{3}$; $\frac{4}{3}\sqrt{21} - 2$. **5.** 30°.

В—3. 1. 9. **2.** 11 : 7. **3.** $\frac{3-\sqrt{5}}{2}R$. **4.** $\pi(\sqrt{2} - 1)d$.

В—4. 1. 6. **2.** 7. **3.** $\frac{\sqrt{15}}{3}R$. **4.** $\frac{4}{9}r$.

К—1

ЗДП. 2. 2) а) $Y_1Y_2 = 6$; б) 1 : 3.

В—1. 2. 2) а) $8\sqrt{17}$; б) 1 : 1.

В—2. 2. 2) а) 4; б) 1 : 1.

К—2

ЗДП. 1. а)

№	Прямые	Расположение прямых	Величина угла между прямыми
1	LN и EG	Скрещиваются	90°
2	F_1T и FH	Пересекаются	$\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{2}}$
3	F_1N и KT	Параллельны	0°
4	TN и EG	Скрещиваются	60°
5	F_1T и KN	Пересекаются	$\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$
6	KH_1 и LN	Скрещиваются	30°

б) $\frac{9a^2}{8}$. **2.** $2\sqrt{2}$.

В—1. 1. а)

№	Прямые	Расположение прямых	Величина угла между прямыми
1	KF и MP	Параллельны	$0°$
2	KF и BC	Скрещиваются	$60°$
3	KP и MF	Пересекаются	$90°$
4	BF и MP	Скрещиваются	$\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$
5	KP и BC	Пересекаются	$90°$
6	CM и KF	Скрещиваются	$30°$

б) $\frac{a^2}{4}$. **2.** 5.

В—2. 1. а)

№	Прямые	Расположение прямых	Величина угла между прямыми
1	KF и MP	Параллельны	$0°$
2	KM и FP	Параллельны	$0°$
3	KF и BD	Скрещиваются	$90°$
4	DC_1 и KF	Скрещиваются	$60°$
5	FP и AD	Пересекаются	$\operatorname{arctg}\sqrt{2}$
6	MP и B_1C	Скрещиваются	$60°$

б) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **2.** $3{,}5\sqrt{3}$.

К—3

ЗДП. 1. б) $x(\sqrt{5}+\sqrt{2})$; в) $\frac{x^2\sqrt{6}}{4}$. **2.** б) 2α; в) $x(a-x)$. **3.** б) $\frac{1}{4}(a^2-x^2)\sqrt{7}$. **4.** 5 или 21. **5.** $\frac{27\sqrt{3}}{4}$. **6.** $\frac{15\sqrt{15}}{2}$. **7.** $101\frac{1}{4}$. **8.** 60°; 75°; 150°; 75°. **9.** в) 1; г) 1 : 1; д) $\sqrt{3}$. **10.** Сумма углов равна 180°, если $x \in (0; 4]$; 360°, если

$x\in(4;\ 7)$. **11.** 180°, если $x\in(0;\ 2]$; 720°, если $x\in(2;\ 4)$; 180°, если $x\in[4;\ 6)$. **12.** 180°, если $x\in(0;\ 4]$; 360°, если $x\in(4;\ 6)$.

В—1. 1. 2 или 22. **2.** 60°; 120°; 60°; 120°. 3. г) $\sqrt{3}$; д) 1; 2.

В—2. 1. 2 или 8. **2.** 50°; 130°; 65°; 115°. **3.** в) $\frac{2}{3}$; г) 1 : 1; д) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

К—4

ЗДП. 1. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. **2.** а) $\arcsin\frac{\sqrt{3}\sin\varphi}{2}$; б) $\arcsin\frac{2\sin\varphi}{\sqrt{5}}$.

3. $\arccos\dfrac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$. **4.** $2\arcsin\dfrac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\varphi}$. **5.** $2\arcsin\left(\cos\varphi\cdot\sin\frac{\beta}{2}\right)$. **6.** Прямые a и b параллельны, а прямая c либо параллельна им, либо их пересекает. **7.** б) $\frac{3a}{4}(2\sqrt{2}+1)$; в) $\frac{9a^2\sqrt{7}}{64}$; г) 3 : 5. **8.** б) $\frac{2a}{3}(3+\sqrt{2})$; в) $\frac{1}{3}a^2\sqrt{2}$; г) 1 : 5. **9.** б) $2{,}5a$; в) $\frac{25a^2\sqrt{3}}{144}$; г) 5 : 1. **10.** 3 либо 6.

В—1. 1. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **2.** а) φ; б) $\arcsin(\sqrt{2}\sin\varphi)$. **3.** $a \parallel b$. **4.** 3; $\frac{15}{2}$.

В—2. 1. $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$. **2.** а) $\arccos\sqrt{\frac{1+\cos^2\varphi}{2}}$; б) φ. **3.** $\alpha \parallel \beta$. **4.** $7\frac{7}{9}$; 14.

К—5

ЗДП. 1. а) 90°; б) 60°; в) $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$; г) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $2\arcsin\frac{2}{\sqrt{7}}$.

2. а) $CD=\sqrt{30}$; б) $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{10}$. **3.** $\arccos\frac{3}{7}$.

В—1. 1. а) 90°; б) 60°; в) $\operatorname{arctg}\frac{4}{\sqrt{3}}$; г) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4}$; д) $2\arcsin\sqrt{\frac{7}{19}}$.

2. а) $CD=\sqrt{23}$; б) $\arcsin\sqrt{\frac{3}{23}}$. **3.** $\arccos\frac{1}{3}$.

В—2. 1. а) 90°; б) 60°; в) 30°; г) $\pi-2\arcsin\frac{\sqrt{13}}{4}$; д) 60°.

2. а) $CD=\sqrt{21}$; б) $\arcsin\frac{2}{\sqrt{7}}$. **3.** $\arccos\frac{2}{3}$.

К—6

ЗДП. 1. 12. **2.** 14. **3.** 7,5. **4.** $\sqrt{3}$ и 3. **5.** $MA = MC = \frac{a}{3}\sqrt{10 + 8\sin^2\frac{\alpha}{2}}$; $MB = \frac{a}{3}\sqrt{9 + 4\cos^2\frac{\alpha}{2}}$; $\rho(M;\ AB) = \rho(M;\ BC) = \frac{a}{3}\sqrt{9 + \sin^2\alpha}$; $\rho(M; AC) = \frac{a}{3}\sqrt{9 + \cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **6.** $\frac{14\sqrt{3}}{3}$.

В—1. 1. $\sqrt{6}$ и $\sqrt{4{,}5}$. **2.** $MA = \frac{a}{2}\sqrt{9 + 4\cos^2\frac{\alpha}{2}}$; $MC = \frac{a}{2}\sqrt{4 + \cos^2\frac{\alpha}{2}}$; $MB = MD = \frac{a}{2}\sqrt{5 + 3\sin^2\frac{\alpha}{2}}$; $\rho(M;\ BC) = \rho(M;\ CD) = \frac{a}{4}\sqrt{16 + \sin^2\alpha}$; $\rho(M; AB) = \rho(M; AD) = \frac{a}{4}\sqrt{16 + 9\sin^2\alpha}$. **3.** $2\sqrt{29}$.

В—2. 1. $6\sqrt{6}$ и $12\sqrt{2}$. **2.** $MA = a\sqrt{1 + 9\cos^2\frac{\alpha}{2}}$; $MC = a\sqrt{1 + \cos^2\frac{\alpha}{2}}$; $MB = MD = a\sqrt{2 + 3\cos^2\frac{\alpha}{2}}$; $\rho(M; BC) = \rho(M; CD) = \frac{a}{2}\sqrt{4 + \sin^2\alpha}$; **3.** $4\sqrt{\frac{7}{3}}$.

Тестовая работа

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
В	В	А	Б	Б	В	В	Г	Б	Б	Б	Г	В	А	Б	А	В	Г

К—7

ЗДП. 1. а) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3$; $\vec{a}\cdot\vec{c} = 4$; $\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$; б) -13; в) $\sqrt{67}$; г) 90°; д) $x = \frac{5}{8}$; е) $y = -\frac{1}{14}$; ж) $\sqrt{2}$. **2.** а) $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$; $\overrightarrow{MD} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$; б) $\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$; в) $\arccos\frac{4 - 5\cos\alpha}{\sqrt{17 - 16\cos\alpha}}$. **3.** $\overrightarrow{OD} = \frac{\sqrt{6}}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{6}}{6}\overrightarrow{OB} + \frac{\sqrt{6}}{6}\overrightarrow{OC}$ или $\overrightarrow{OD} = -\frac{\sqrt{6}}{6}\overrightarrow{OA} - \frac{\sqrt{6}}{6}\overrightarrow{OB} - \frac{\sqrt{6}}{6}\overrightarrow{OC}$.

В—1. 1. а) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$; $\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$; $\vec{b}\cdot\vec{c} = 3$; б) $\sqrt{31}$; в) $\arccos\left(-\frac{9}{\sqrt{217}}\right)$;

г) $\alpha = \frac{4}{3}$; д) $t = -\frac{3}{13}$. 2. а) $\frac{1}{2}$; б) $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$; в) 1. 3. а) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; б) 3 : 11.

В—2. 1. а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$; $\vec{b} \cdot \vec{c} = -3$; б) $\sqrt{67}$; в) $\arccos \frac{12}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{67}}$; г) $\alpha = -\frac{2}{3}$; д) $t = -\frac{1}{2}$. **2.** а) -1; б) $30°$; в) $-\frac{1}{3}$. **3.** $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$; $-\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{7}{4}\vec{c}$.

К—8

ЗДП. 1. Сфера радиуса $\frac{15\sqrt{5}}{16}$ с центром $\left(0; -2\frac{1}{8}; \frac{9}{16}\right)$. **2.** Возможны четыре случая: 1) $C(\sqrt{3}; 0; 0)$, $A_1(0; 1; 2)$, $B_1(0; -1; 2)$, $C_1(\sqrt{3}; 0; 2)$; 2) $C(\sqrt{3}; 0; 0)$, $A_1(0; 1; -2)$, $B_1(0; -1; -2)$, $C_1(\sqrt{3}; 0; -2)$; 3) $C(-\sqrt{3}; 0; 0)$, $A_1(0; 1; 2)$, $B_1(0; -1; 2)$, $C_1(-\sqrt{3}; 0; 2)$; 4) $C(-\sqrt{3}; 0; 0)$, $A_1(0; 1; -2)$, $B_1(0; -1; -2)$, $C_1(-\sqrt{3}; 0; 2)$. **3.** а) $\begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = 4 - 4t, \end{cases}$ $t \in \boldsymbol{R}$; б) $5x - 9y - z + 4 = 0$; в) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 5$; г) прямая пересекает сферу; д) $2x + y + 2 = 0$; е) $\frac{1}{9}$.

В—1. 1. Сфера радиуса 3 с центром $(0; -7; 0)$. **2.** Возможны четыре случая: 1) $B(0; 2; 0)$, $D(0; -2; 0)$, $P(0; 0; 2)$; 2) $B(0; -2; 0)$, $D(0; 2; 0)$, $P(0; 0; 2)$; 3) $B(0; 2; 0)$, $D(0; -2; 0)$, $P(0; 0; -2)$; 4) $B(0; -2; 0)$, $D(0; 2; 0)$, $P(0; 0; -2)$. **3.** а) $\begin{cases} x = 9 + 8t, \\ y = -2t, \\ z = 2t, \end{cases}$ $t \in \boldsymbol{R}$; б) $x + 6y + 2z - 9 = 0$; в) $(x - 1{,}5)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2{,}5)^2 = 3{,}5$; г) прямая не имеет общих точек со сферой; д) $x + 2y + 3z - 6 = 0$; е) $\frac{38}{\sqrt{227}}$.

В—2. 1. Сфера радиуса 6 с центром $(6; 0; 0)$. **2.** Возможны четыре случая: 1) $C(0; \sqrt{3}; 0)$, $D\left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$; 2) $C(0; \sqrt{3}; 0)$, $D\left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$; 3) $C(0; -\sqrt{3}; 0)$, $D\left(0; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$; 4) $C(0; -\sqrt{3}; 0)$, $D\left(0; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$. **3.** а) $\begin{cases} x = 2 + 8t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = -3 + 2t, \end{cases}$ $t \in \boldsymbol{R}$; б) $x + 6y + 2z - 2 = 0$; в) $(x - 2{,}5)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1{,}5)^2 = 3{,}5$; г) прямая не имеет общих точек со сферой; д) $x + 2y + 3z - 16 = 0$; е) $\frac{38}{\sqrt{227}}$.

К—9

ЗДП. 1. $\arcsin \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{31}}$. **2.** б) 60°; в) 390. **3.** а) 45°; б) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; в) $\arccos \frac{9}{\sqrt{201}}$.

В—1. **1.** $\arcsin \sqrt{\frac{6}{13}}$. **2.** б) 45°; в) $\frac{5b^2\sqrt{2}}{6}$. **3.** а) 60°; б) $2\sqrt{3}$; в) $\arccos \frac{1}{2\sqrt{10}}$.

В—2. 1. $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{7}$. **2.** б) 45°; в) $58\sqrt{2}$. **3.** а) 60°; б) 3; в) $\arccos \frac{\sqrt{15}}{10}$.

Зачёты

Зачёт № 1

Б—1. 4. В треугольнике ABK. *Указание*. Докажите, что основание P биссектрисы AP лежит внутри отрезка AK.
Б—2. 4. Длина третьей высоты может принимать любое значение из промежутка $\left(3\frac{19}{32};\ 7\frac{1}{12}\right)$. *Указание*. Если h — третья высота, а S — площадь треугольника, то на основании неравенств треугольника $\frac{2S}{5} - \frac{2S}{17} < \frac{2S}{h} < \frac{2S}{5} + \frac{2S}{17}$.
Б—3. 4. Длина третьей медианы может принимать любое значение из промежутка (12; 22). *Указание*. Воспользуйтесь тем фактом, что существует треугольник, стороны которого параллельны и равны соответствующим медианам данного треугольника.
Б—4. 4. В каждом из двух возможных случаев $CK = 3{,}5$.
Б—5. 4. 5; 11; 13; 19.
Б—6. 4. $\frac{9}{47}$.
Б—7. 4. $BC = 2\frac{1}{3}$.
Б—8. 4. *Указание*. Можно начертить окружность данного радиуса, а по данным двум углам определить соответствующие хорды, являющиеся сторонами искомого треугольника.
Б—9. 4. *Указание*. Воспользуйтесь методом «удвоения медианы». А именно пусть ABC — искомый треугольник, а AM — его медиана. При анализе построения треугольника ABC продлите AM и отложите на луче AM отрезок MA_1, равный отрезку AM. Рассмотрите затем четырёхугольник ABA_1C (в частности, докажите, что это параллелограмм).
Б—10. 4. *Указание*. Воспользуйтесь тем фактом, что точка пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$ является также и точкой пересечения высот искомого треугольника.

Б—1. 3. Прямая AM пересекает плоскость BDK. *Указания.* Рассмотрите среднюю линию ON в треугольнике AMC, где O — точка пересечения диагоналей основания $ABCD$, а N — середина MC. Докажите, что ON пересекает плоскость BDK. Для построения точки P достаточно рассмотреть сечение AA_1C_1C. В плоскости этого сечения можно построить перпендикуляр PK к прямой OK (точка P лежит на A_1C_1). **4.** $\sqrt{89}$.

Б—2. 3. $\arcsin \dfrac{3\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{4-3\cos^2\alpha}}$. **4.** 12,5.

Б—3. 3. $MK \parallel (ACP)$. *Указание.* Докажите, что середина отрезка AP является искомой точкой T. **4.** R.

Б—4. 3. $\arcsin \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **4.** $R(\sqrt{3}-1)$.

Б—5. 3. $B_1N \parallel (ACM)$. *Указания.* В плоскости сечения BB_1K_1K достаточно построить прямую $MQ \perp MK$ (K и K_1 — середины рёбер AC и A_1C_1 соответственно). Точка Q, лежащая на B_1K_1, является искомой. (Другой способ: докажите, что $B_1Q : QK_1 = 1:2$.)

4. $\dfrac{4\sqrt{3}-2}{4\sqrt{3}+7} \cdot 100\%$.

Б—6. 3. $\operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** $\dfrac{72}{13}$.

Б—7. 3. $A_1D \parallel (MB_1C_1)$. *Указания.* Рассмотрите плоскость сечения DA_1B_1; докажите, что прямые A_1D и B_1M пересекаются. Докажите, что искомая точка T лежит на средней линии прямоугольника ADD_1A_1, параллельной AA_1, и делит её в отношении $13:19$, считая от прямой A_1D_1. **4.** $\dfrac{15\sqrt{3}}{7}$.

Б—8. 3. $\arccos \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$. **4.** 90°.

Б—9. 3. Прямая A_1K пересекает плоскость AMC_1 под прямым углом. *Указание.* Точку E можно построить, например, следующим образом. Пусть C_2 такая точка, что C является серединой отрезка BC_2. (Очевидно, что ACC_2D — параллелограмм.) Пусть точка F делит отрезок DC_2 в отношении $1:3$, считая от D. Искомая точка E — это середина отрезка DF. **4.** $\dfrac{10+\sqrt{3}}{4\pi}$.

Б—10. 3. 90°. *Указание.* Докажите, что все точки K_i лежат на одной окружности, а L — её центр. **4.** 6.

Зачёт № 3

Б—1. 4. $\frac{15\sqrt{3}}{676}$.

Б—2. 3. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **4.** $2(\sqrt{3}-1)$.

Б—3. 3. $\operatorname{arcctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **4.** $AC = \frac{38\sqrt{3}}{3}$; $BD = 19$.

Б—4. 3. $AB = 25$. **4.** $1 : 6$.

Б—5. 3. $\rho(A; MNK) = 12$, $\rho(B; MNK) = 9$, $\rho(C; MNK) = 4$. **4.** 2,5.

Б—6. 3. а) $90°$; б) $\arccos\frac{1}{3}$. **4.** 81.

Б—7. 3. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **4.** 46.

Б—8. 3. $\frac{38\sqrt{3}}{3}$. **4.** $90°$.

Б—9. 3. Совокупность шести равных окружностей радиуса $\frac{a\sqrt{329}}{40}$ (a — ребро куба), каждая из которых находится строго внутри квадрата соответствующей грани куба (центр квадрата является центром окружности).

Б—10. 3. $a\sqrt{\frac{2}{11}}$. **4.** $\frac{105}{22}$.

Зачёт № 4

Б—1. 3. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9}\cdot\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AA_1}$; $\frac{11}{18}$. **4.** Точка с координатами $\left(-\frac{3}{8}; \frac{9}{64}\right)$.

Б—2. 3. $A\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}; -\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $B\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}; 0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,

$C\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}; \sqrt{2}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $D(0; 0; \sqrt{3})$, $A_1\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}; -\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

$B_1(0; 0; \sqrt{3})$, $C_1\left(\frac{\sqrt{6}}{3}; \sqrt{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $D_1\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}; 0; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Указание. Воспользуйтесь следующими свойствами: точка O и середины шести рёбер (A_1D_1, D_1C, CC_1 и т. д.) лежат в одной плоскости, параллельной плоскостям A_1BC_1 и AD_1C, кроме того, эти плоскости перпендикулярны диагонали B_1D, а сечения A_1BC_1 и AD_1C пересекают эту диагональ в точках, делящих её на три равных отрезка. **4.** $x^2 + y^2 + 7x + 2y = 0$.

Б—3. 3. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD}$; $\frac{5}{6}$.

4. $a \in (-\infty; -19) \cup (-17; +\infty)$.

Б—4. 3. $A(2{,}5;\ 0;\ 0)$, $B(-2{,}5;\ 0;\ 0)$, $C\left(0;\ \frac{5\sqrt{3}}{2};\ 0\right)$, $D\left(0;\ \frac{5\sqrt{3}}{6};\ 5\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

4. Парабола $x = -\frac{1}{8}y^2 + 2$.

Б—5. 3. $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{8} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{8} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AS}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **4.** Окружность радиуса 2 с центром (2; 0), за исключением точек (0; 0) и (4; 0). (Окружность Аполлония.)

Б—6. 3. Сфера радиуса $\sqrt{\frac{7}{12}}$ с центром в середине отрезка OO_1, где O и O_1 — центроиды оснований призмы. **4.** 39.

Б—7. 3. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AA_1}$; $\frac{2}{3}$. **4.** $-32 \leqslant b \leqslant 98$.

Б—8. 3. 3. **4.** $x - y - 5 = 0$; $x + y - 1 = 0$.

Б—9. 3. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{6} \cdot \overrightarrow{AA_1}$; $\frac{1}{2}$. **4.** $3x + 4y + 2 = 0$; 0,4.

Б—10. 3. Угол между плоскостями равен $\arccos \frac{10}{39}$. Их общая прямая пересекает плоскость Oxy в точке с координатами $(-2;\ -1{,}5;\ 0)$ и наклонена к этой плоскости под углом $\arcsin \frac{2}{\sqrt{29}}$. (Параметрические уравнения общей прямой: $x = -2 + 4t$; $y = -1{,}5 - 3t$; $z = 2t$; $t \in R$.) **4.** $A(0;\ 2)$, $B(1;\ \sqrt{3})$, $C(\sqrt{3};\ 1)$.

Содержание