Предисловие

Пособие адресовано учителю, который ведёт курс геометрии в 7—9 классах по учебнику И. Ф. Шарыгина «Геометрия. 7—9 классы», содержащему 13 глав и отражающему авторскую наглядно-эмпирическую концепцию построения курса, которая раскрыта в методических рекомендациях к главам и параграфам.

Курс геометрии 7 класса включает в себя первые четыре главы учебника.

Весь учебный материал курса геометрии 7 класса можно разделить на три части. *Первая часть*, включающая в себя главу 1, служит введением в «природу геометрии». Во *второй части* (главы 2, 3 и § 4.1, 4.2) излагается учебный программный материал. Концептуальной особенностью авторского подхода к изложению материала этой части является акцентирование внимания на изучении фигур — треугольников и окружности — и инструментария симметрии. *Третья часть* (§ 4.3—4.5) посвящена систематизации методов геометрии, с помощью которых уже проводились доказательства во второй части и которые в дальнейшем будут использоваться при изучении теории и решении задач.

Изучение материала, излагаемого в каждой части учебника, формирует три различных этапа обучения, которые в силу специфики заложенных целей требуют соответствующих форм организации урока.

Основная цель *первого этапа* — создание у учащихся устойчивого представления о предмете изучения геометрии и об основных фигурах геометрии: поверхности, линии, точке — как о естественной абстракции. Поэтому основной формой работы является *беседа*. Учитель раскрывает материал первой главы, привлекая учащихся к участию в ней через вопросы. В это время можно порекомендовать не проводить проверку домашнего задания.

На *втором этапе* основная часть уроков — это стандартные уроки объяснения нового материала и уроки решения задач.

На *третьем этапе* все уроки являются уроками систематизации и обобщения знаний, а значит, основная часть учебной деятельности учащихся является самостоятельной.

Курс геометрии 8 класса включает в себя главы 5—8 учебника. Кроме программного материала курс включает в себя и дополнительный материал, который значительно увеличивает номенклатуру содержания и повышает требования, предъявляемые как к уровню усвоения изучаемого материала, так и к уровню знаний и умений учащихся по сравнению с номенклатурой и уровнем требований, задаваемыми федеральным стандартом и примерной программой.

Именно в 8 классе сосредоточено основное содержание курса. Если в 7 классе цель автора была ***заинтересовать***, то цель 8 класса — ***научить***. Весь учебный материал курса 8 класса можно разделить на три части.

Первая часть включает главы 5 (§ 5.1, 5.2), 6 и 7. Концептуальной особенностью авторского подхода к изложению материала этой части является акцентирование внимания на продолжении изучения свойств основных фигур — треугольника и окружности. Следует обратить внимание на то, что свойства окружности как инструментария для решения задач используются очень активно по сравнению с другими известными курсами геометрии. Кроме того, здесь изучаются и другие фигуры планиметрии, прежде всего четырёхугольники специального вида.

Вторая часть, содержащая главу 8 (кроме § 8.7), посвящена систематизации методов геометрии, с помощью которых уже проводились доказательства в первой части и которые в дальнейшем будут использоваться при изучении теории и решении задач.

Третья часть (§ 8.7) содержит список задач для повторения и завершает курс геометрии.

Изучение материала каждой части учебника 8 класса формирует три различных этапа обучения, которые в силу специфики заложенных целей требуют соответствующих форм организации урока.

Основная цель первого этапа — формирование у учащихся устойчивых знаний и умений по курсу геометрии, определяемых стандартом и примерной программой. Поэтому основная часть уроков первого этапа — это стандартные уроки объяснения нового материала и решения задач.

На втором этапе все уроки являются уроками систематизации и обобщения знаний, значит, на каждом из них ведётся повторение пройденных методов. Однако в отличие от 7 класса здесь далеко не всегда можно вести уроки с большой долей самостоятельной работы учащихся. В то же время учащиеся накопили уже достаточно геометрических знаний для того, чтобы часть уроков при изучении главы 8 организовать в форме беседы.

На третьем этапе основным видом учебной деятельности учащихся является самостоятельная работа по решению задач.

Курс геометрии 9 класса включает в себя главы 9—13 учебника. Эти главы достаточно сильно отличаются одна от другой по своему методологическому и даже концептуальному значению.

Материал **главы 9** является необязательным для изучения, поэтому рекомендации к ней не представлены в настоящем пособии. Учитель самостоятельно определяет необходимость изучения и её методику.

В **главе 10**, по существу, завершается классическая евклидова геометрия. Эта глава даёт инструмент для повторения материала, изученного в 8 классе. В частности, можно почти дословно воспроизводить условия многих рассмотренных ранее задач, добавляя новое задание по нахождению площади фигуры. В результате концептуальное значение главы 10 возрастает: цель — научить, которая является ведущей при обучении геометрии, объединяется с задачей — повторить, играющей главное методическое значение в 9 классе.

Глава 11 находится несколько в стороне от магистральной линии учебника. Её роль почти чисто теоретическая, познавательная. Теоретическая часть главы достаточно чётко дифференцирована и делится на две части. *Первая часть* — основная. В ней большое значение имеет историко-культурологическая составляющая. Вопросы, связанные с нахождением длины окружности и площади круга, волновали человечество с древних времён. В учебнике автор пытается некоторым образом повторить путь учёных древности и, основываясь на здравом смысле, вывести соответствующие формулы.

Во *второй части*, ориентированной на углублённое изучение математики, предлагается более современный подход к решению указанных проблем с использованием основ теории пределов.

Глава 12 посвящена теории координатного и векторного методов. В соответствии с авторской классификацией оба метода являются общими и внешними методами геометрии.

Глава 13 занимает особое место в учебнике. Она вносит значительный вклад в эстетико-художественное оформление курса, придаёт ему законченный вид.

Существенной составной частью учебника является система задач. Именно в задачах, начиная с главы 2, продолжается тема трёхмерного пространства — основная тема первой главы. Пространственные тела, главным образом многогранники, выступают в качестве объектов для применения теорем планиметрии. Но не это основное. Главное — это создать своего рода «трёхмерный интерьер», не допустить деградации пространственного мышления школьников. Увеличить долю стереометрических задач учитель при желании может и самостоятельно. Но слишком увлекаться пространством тоже не следует: педагогические цели, преследуемые при обучении планиметрии и стереометрии, всё же не полностью совпадают и в чём-то даже противоречат друг другу.

Создание содержательной системы задач по программе геометрии 7 класса серьёзно затруднено ограниченностью теоретического материала. Автором было представлено достаточное количество содержательных задач на доказательство, с помощью которых можно начать учить основным подходам, приёмам, идеям и методам, используемым при решении геометрических задач, таким как перебор вариантов, доопределение условия, выделение ключевого треугольника, движение, чётность и т. д.

Большое количество вычислительных задач обусловлено их педагогической значимостью, традиционным преобладанием в большинстве списков геометрических задач, и в частности среди задач конкурсного типа. В основной своей массе вычислительные задачи, предлагаемые в учебнике, достаточно просты и направлены на отработку отдельных технических деталей, некоторых стандартов, типичных ситуаций и др., без чего не обходится решение большинства интересных и содержательных геометрических задач. Конечно, алгебраические возможности школьников пока ещё весьма ограниченны, и поэтому в курсе преобладают вычислительные задачи арифметического типа, решаемые поэтапно, по действиям. Невелико, к сожалению, число задач на составление уравнений: № 62, 75, 139, 360, 420, 421, 428.

В геометрии очень важно научиться видеть различные варианты реализации описанной геометрической ситуации и разумно перебирать эти варианты: № 49, 51, 53, 56, 60, 62, 70, 72, 73, 76, 145, 146, 153, 155, 354, 355, 360, 362, 376, 419, 420, 424.

С умением видеть и перебирать варианты формируется умение строить примеры, подтверждающие или опровергающие то или иное утверждение, это задачи: № 99, 106, 110, 192, 193, 202, 205, 220, 229, 250, 297, 434, 435, 437.

Нельзя научиться решать сколько-нибудь интересные и трудные геометрические задачи, не научившись правильно, грамотно и красиво делать геометрические чертежи. Типичными задачами такого рода являются задачи на геометрическое место точек (§ 4.1) и задачи на построение (§ 4.2), а также № 70—72, 76, 85, 201, 214, 215—219, 251, 288, 289, 292.

В учебнике приведено большое количество заданий, что даёт возможность учителю при планировании урока подбирать задачи, учитывая уровень подготовки класса.

Часть задач можно использовать позднее при подготовке к контрольным работам, как тематическим, так и итоговым.

Планирование учебного материала рассчитано на 2 ч геометрии в неделю.

Основное назначение методического пособия — помочь учителю в организации учебной деятельности школьников. В нём даются:

• по каждой главе — общая характеристика содержания, места и роли его в курсе, контрольная работа;

• по каждому параграфу — комментарий для учителя, включающий, если необходимо, общую характеристику содержания и методические рекомендации к изучению материала с разбивкой по отдельным вопросам; примерное планирование изучения материала параграфа; вопросы к домашнему заданию; указания к решению задач из учебного пособия; дополнительные задачи.

В разделе «Методические рекомендации к изучению материала» рассматриваются возможные методические подходы, рекомендуются упражнения для усвоения и закрепления материала. Для некоторых наиболее сложных теорем предлагаются примерные планы проведения их доказательств. Новый материал будет лучше усваиваться учащимися, если они под руководством учителя сделают краткие записи в тетрадях. Методические рекомендации должны быть адаптированы к конкретному классу и к уровню подготовки учащихся, что может привести к уменьшению числа решаемых задач, увеличению числа часов, отводимых на изучение той или иной темы, за счёт часов, отводимых на решение задач, или резерва.

В разделе «Примерное планирование изучения материала» к каждому уроку выделены по принципу их соответствия содержанию изучаемого на данном уроке теоретического материала задачи, а также включены задачи, которые лучше решить с классом не в процессе объяснения нового материала, а в процессе его закрепления. Одна из целей этапа закрепления состоит в том, чтобы научить школьников решать новые задачи, применяя только что полученные сведения, новый аппарат.

Как правило, именно эти задачи дублируются задачами домашнего задания.

При изучении каждой главы последние несколько уроков отводятся на решение задач, один урок — на контрольную работу и заключительный урок — на разбор ошибок в контрольной работе и подведение итогов. На уроках решения задач рекомендуется решить те номера, которые не разбирались в ходе изучения главы, и провести подготовку к контрольной работе. Для того чтобы сориентировать учеников, на что обратить внимание при самостоятельной работе дома, введён раздел «Вопросы к домашнему заданию».

В разделе «Указания к задачам учебника» приведены схемы решения основных (опорных) задач и решения наиболее трудных задач.

Раздел «Дополнительные задачи» образует некоторый резерв заданий для учителя. Одни из них должны помочь при закреплении нового материала, другие — подвести учащихся к решению задач из учебника, третьи — для индивидуальных заданий.

Целью контрольной работы является проверка усвоения учащимися основного материала изученной темы (иногда части темы). При этом результаты проверки контрольной работы позволяют зафиксировать не только достижение учащимися уровня обязательной подготовки, но также достижение повышенного уровня обученности. В работах проверяются умения: понимать условие задачи; владеть соответствующей терминологией и символикой; делать чертежи, сопровождающие условие задачи; выделять на чертеже необходимую при решении задачи конфигурацию.

Варианты контрольной работы содержат пять-шесть заданий. Задания с выбором ответа и со свободным ответом направлены на проверку достижения учащимися уровня обязательной подготовки. Краткие записи при решении этих задач не требуются. В заданиях № 5, 6 (сложных) решения записываются полностью с краткой записью условия и выполнением чертежа. Каждая контрольная работа рассчитана на один урок (45 мин). Аналогичную структуру имеют задания самостоятельных работ.

При изложении требований к результатам обучения автором настоящего пособия сделан акцент на достижение предметных результатов. Личностные и метапредметные результаты изучения геометрии отражены в рабочей программе «Геометрия. 5—9 классы» к линии учебников И. Ф. Шарыгина, размещённой на сайте издательства «Дрофа» www.drofa.ru. В помощь учителю в настоящем пособии, а также в рабочих тетрадях к УМК И. Ф. Шарыгина «Геометрия. 7—9 классы» специальными значками отмечены задания, направленные на формирование метапредметных умений и достижение личностных результатов.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

№ 157 — задача № 157 учебника.

№ 15ДЗ — № 15 раздела «Дополнительные задачи» текущего параграфа методического пособия.

№ 3В — вопрос № 3 из раздела «Вопросы к домашнему заданию» текущего параграфа методического пособия.

СР1 — самостоятельная работа № 1.

КР1 — контрольная работа № 1.

№ 57Т — задание № 57 рабочей тетради.

87У — рисунок 87 учебника.

Задача 2 — задача 2 из текста текущего параграфа учебника.

1050 — в учебнике задача № 1050 отмечена знаком (решение таких задач рекомендуется выполнять в электронном приложении к учебнику, размещённом на сайте издательства www.drofa.ru).

ГМТ — геометрическое место точек.

М — метапредметные результаты.

7 класс

Глава 1
Геометрия как наука. Первые понятия геометрии (5 ч)

Эта глава носит вводный характер. Во вступлении автор учебника И. Ф. Шарыгин подробно объясняет её место, цель и задачи. В методических рекомендациях ограничимся советами по проведению уроков, планированию и решению задач. В силу авторской концепции главная цель данной главы — заинтересовать учащихся новым предметом, поэтому учитель при желании может дополнить задачный материал учебника занимательными задачами из рабочей тетради и математической литературы.

В главе систематизируются и обобщаются знания и представления учащихся о простейших геометрических фигурах, накопленные ими в процессе изучения математики в 1—6 классах и жизненного опыта. Поэтому в методическом плане вводимые понятия достаточно просты и, в известной степени, знакомы учащимся, а значит, ни подготовительной работы, ни значительной отработки не требуют.

В процессе изучения данной главы полезно уделить внимание использованию электронного приложения, наглядным средствам обучения и решению задач по готовым чертежам.

При изучении главы 1 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— распознавать на чертежах, рисунках, моделях и в окружающем мире плоские и пространственные геометрические фигуры;

— распознавать развёртки куба, прямоугольного параллелепипеда, правильной пирамиды, цилиндра и конуса;

— строить развёртки куба и тетраэдра.

1.1. Геометрическое тело.
1.2. Поверхность (1 ч)

При изучении § 1.1, 1.2 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— изображать и распознавать на чертежах и рисунках известные им геометрические тела, устно их описывать;

— изображать и распознавать на чертежах и рисунках известные поверхности, устно их описывать;

— выполнять и распознавать на чертежах развёртки известных многогранников, цилиндра и конуса;

— формулировать, иллюстрировать и объяснять определение сферы;

— объяснять термины: геометрия, геометрическое тело, поверхность тела, плоскость;

— объяснять размерность геометрического тела, поверхности;

— решать задачи на изображение и распознавание геометрических тел, выполнение и распознавание развёртки известных учащимся многогранников.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

(1) При объяснении понятия «геометрическое тело» можно использовать геометрические знания учащихся, полученные ими при обучении в 1—6 классах, их прак-

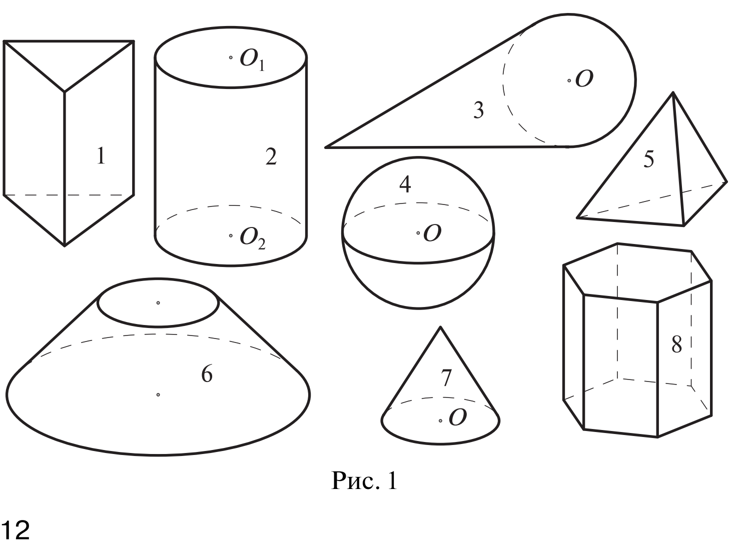


Рис. 1

тические знания и жизненный опыт. Здесь можно использовать плакаты такого типа, как на рисунке 1. При этом следует задавать следующие в о п р о с ы.

1. Какие пространственные фигуры изображены на рисунке?
2. Какие тела являются конусами?
3. Какие тела являются пирамидами?

Далее выполнить задания № 1—2Т.

При объяснении понятия геометрического тела следует обратить внимание учащихся на различие между геометрическим телом и физическим телом, на форму и размеры геометрического тела. В ходе беседы полезно использовать вопросы задач № 1, 2.

2 При объяснении понятия «поверхность тела» следует обратить внимание на число размеров поверхности, разнообразие поверхностей и обсудить вопрос о возможности существования поверхности тела отдельно от тела.

3 Для учащихся будет интересной демонстрация разрезания листа Мёбиуса в № 6. Полезно заранее приготовить несколько моделей листа Мёбиуса достаточно большого размера для наглядности.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На уроке: в классе — § 1.1 и 1.2; № 1, 2, 5, 8, 15, 17, 21; дома — № 3, 4, 6, 10, 13, 22 и № 1—7В.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Что такое геометрическое тело?
2. Объясните, что означает «тело имеет три измерения».
3. Что такое поверхность тела?
4. Что такое сфера?
5. Сколько измерений имеет поверхность?
6. Приведите пример поверхности, имеющей только одну сторону.
7. Объясните, что такое плоскость.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

Основная часть задач § 1.1 и 1.2 решается устно с выполнением чертежа на доске и в тетради. № 1, 5, 9, 17, 21 .

6. Одна из возможных пробок изображена на рисунке 2.

7. Решение понятно из рисунка 3.

9. Чтобы получить поверхность куба из развёртки, приведённой на рисунке 9У, *в*, согните по её пунктирным линиям, как на рисунке 4.

13. Решение приведено на рисунке 5.

15. Задача имеет много решений. На рисунке 6 изображён один из возможных вариантов развёртки треугольной пирамиды. Пунктирными линиями показаны линии сгиба.

17. При указанном в условии разрезе получится дважды перекрученное бумажное кольцо. Чтобы лист Мёбиуса распался на две части, можно провести разрез: отступить от края листа Мёбиуса на $\frac{1}{3}$ его ширины и разрезать его вдоль края, сохраняя выбранное расстояние. Обойдя дважды лист Мёбиуса, разрезать его на две части: большое, дважды перекрученное кольцо, с которым зацеплён меньшего размера лист Мёбиуса.

18. Всех этих измерений недостаточно: надо ещё убедиться, что изготовленная рамка плоская, т. е. все углы

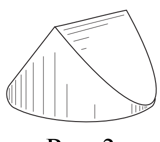


Рис. 2

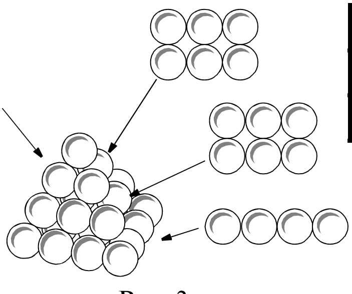


Рис. 3

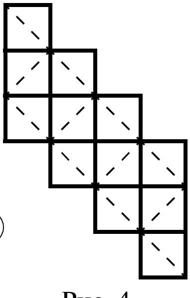


Рис. 4

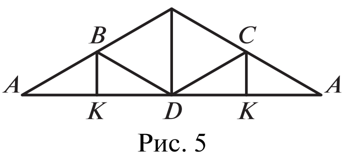


Рис. 5

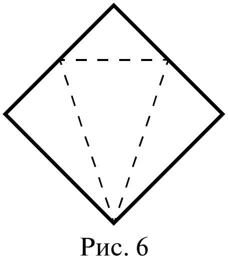


Рис. 6

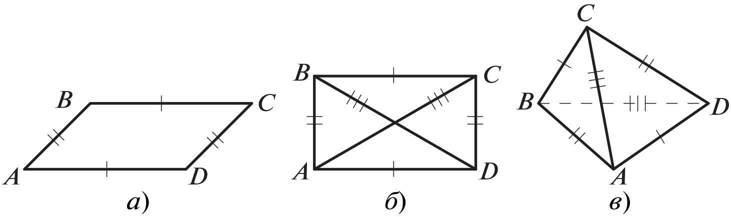


Рис. 7

рамки лежат в одной плоскости. При объяснении полезно сделать несколько рисунков: четырёхугольник с равными противоположными сторонами (рис. 7, *а*); четырёхугольник с равными противоположными сторонами и равными диагоналями (рис. 7, *б*); пирамида (рис. 7, *в*).

22. Нальём в ёмкость небольшое количество воды и постараемся найти такое положение ёмкости, чтобы вода закрывала всё дно. Если такого положения найти нельзя, то дно нельзя считать плоским. Чем меньшим количеством воды можно закрыть всё дно, тем ближе оно к части плоскости.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Длина кольца равна 11. Какова длина пути, который проползёт муравей, если он начнёт и закончит свой путь в точке A и ползти будет всё время по пунктирной линии (рис. 8)?

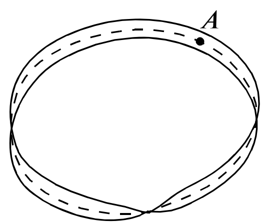


Рис. 8

1.3. Линия. 1.4. Точка (1 ч)

При изучении § 1.3, 1.4 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— изображать на чертежах и рисунках известные учащимся линии, устно их описывать;

— объяснять получение линии как результат пересечения поверхностей;

— объяснять получение прямой как результат пересечения плоскостей;

— объяснять получение точки как результат пересечения линий;

— объяснять размерность линии и точки;

— решать задачи на изображение и распознавание линий.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

(1) При обсуждении понятия «линия» следует обратить внимание учащихся на получение линии как места пересечения поверхностей, на размерность линии и обсудить вопрос о возможности существования линии отдельно от поверхности и от тела. В ходе беседы полезно привлечь учащихся, используя вопросы заданий № 1, 2 и 5 (§ 1.1).

(2) При обсуждении понятия «точка» следует обратить внимание учащихся на то, что точка есть последний шаг на пути от реальных тел к математическим абстракциям, путь последовательного уменьшения числа измерений от трёх (тело) до нуля (точка), и обсудить вопрос о возможности существования точки отдельно от линии, от поверхности и от тела.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На уроке: в классе — § 1.3 и 1.4; № 24, 26, 27, 28, 30, 33, 38; дома — № 25, 28, 30, 32 и № 1—5В.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Что такое линия?
2. Сколько измерений имеет линия?
3. Что такое прямая линия?
4. Что такое точка?
5. Сколько измерений имеет точка?

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

Все задания решаются устно с выполнением чертежей на доске и в тетради. № 32 .

23. Необходимо объяснить на примере модели любого геометрического тела, что значит вид спереди и вид сверху, а иногда дополнить и вид сбоку. *Ответ*: а) треугольная призма; б) шар; в) конус; г) четырёхугольная пирамида; д) цилиндр.

25. Ответ приведён на рисунке 9. Представлены (слева направо) вид спереди, вид сбоку, вид сверху геометрического тела, изображённого на рисунке 19У.

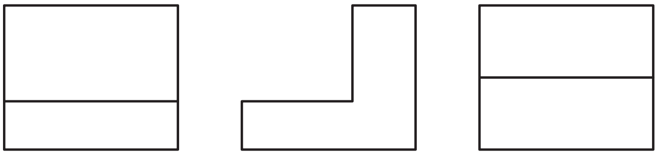


Рис. 9

26. На рисунке 10 изображена пирамида, развёртка которой приведена на рисунке 20У.

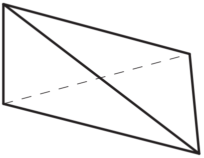


Рис. 10

27. В задании б) можно отметить прямую с помощью натянутой верёвки. В задании в) отметим две точки, через которые должна пройти указанная прямая, с помощью двух кольев. Займём позицию за одним из этих кольев, чтобы второй был невидим. Отмечая теперь другие невидимые точки, будем получать точки на одной прямой.

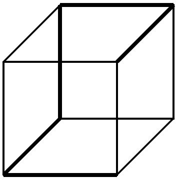


Рис. 11

29. Проведите с помощью этой линейки линию через какие-нибудь две точки дважды, причём второй раз линейку переверните. Получившиеся линии должны совпасть.

30. Линия сгиба фактически является линией пересечения двух плоскостей.

32. Например, как на рисунке 11.

1.5. От точки к телу.
1.6. Как изучать геометрию? (1 ч)

При изучении § 1.5, 1.6 учащиеся должны достичь предметных результатов:

— объяснять понятия «геометрическая форма» и «геометрическая фигура»; «геометрическое тело» как часть пространства; «плоскость», «линия», «точка» как результат пересечения геометрических форм более высокой размерности; «линия», «плоскость», «геометрическое тело» как результат движения геометрической формы более низкой размерности; «равенства фигур» (в том числе формулировать, иллюстрировать);

— решать задачи на равенство фигур.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

1 При объяснении понятия «равенство фигур» полезно выполнить вместе с учащимися № 43, обратить особое внимание на № 43 (е), который (и аналогичные ему) способствует развитию пространственных представлений.

2 По материалу § 1.6 можно провести беседу, причём сделать это в удобное для учебного процесса время.

После разбора № 46 выполнить № 9Т.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На уроке: в классе — параграф; № 43, 44, СР1; дома — № 39, 40, 41 и 1—5В.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Как происходит переход от реального мира к геометрическим абстракциям?
2. Что такое геометрическая форма?
3. Как можно получить геометрические формы как результат движения?
4. Что такое геометрическая фигура?
5. Что понимают под равенством геометрических фигур?

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

Все задачи § 1.5 решаются устно с выполнением чертежей на доске и в тетради. № 33, 43 .

43. Среди пар плоских фигур неравными будут фигуры, которые являются частью круга в г) и два четырёхугольника в в). Остальные три пары являются парами равных фигур. Что касается двух пирамид в е), то их с точки зрения определения, данного в учебнике, нельзя считать равными, так как совместить их в пространстве невозможно.

Решение следует из умения видеть пространственные тела. Возьмём прямоугольный параллелепипед и проведём в нём диагонали двух соседних боковых сторон, причём эти диагонали выходят из общей вершины, не принадлежащей основанию, затем проведём диагональ основания так, как показано на рисунке 12, *а*. Получили пирамиду (рис. 12, *б*). Зеркально отобразим пря-

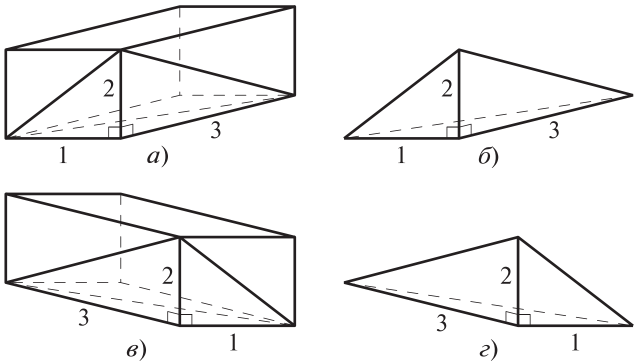


Рис. 12

моугольный параллелепипед и повторим ту же операцию, что и с первым прямоугольным параллелепипедом (рис. 12, *в*). Получили вторую пирамиду (рис. 12, *г*). Вторая пирамида имеет те же размеры рёбер, ребро 2 так же перпендикулярно рёбрам основания, при этом она является как бы зеркальным отображением первой пирамиды. Такие фигуры (тела) в математике иногда удобно рассматривать как равные.

Вместо предложенной самостоятельной работы можно выполнить контрольные задания в формате ЕГЭ по теме «Первые понятия геометрии» (с. 98—101 рабочей тетради).

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1

1. Нарисуйте прямоугольный параллелепипед и конус.

2. Какие пары фигур, изображённые на рисунке 13, равны? Перерисуйте равные фигуры в тетрадь.

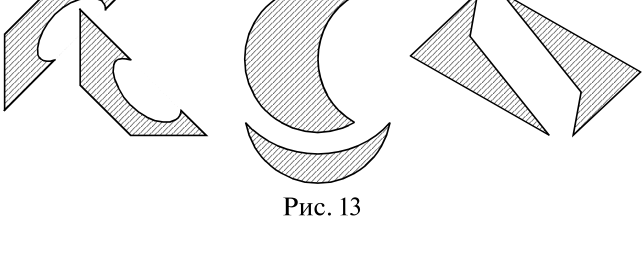


Рис. 13

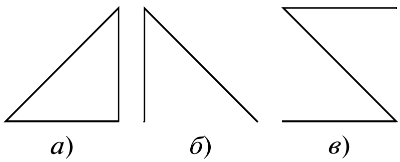


Рис. 14

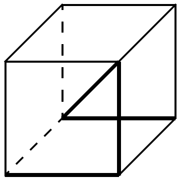


Рис. 15

3. Кусок проволоки изогнули в виде некоторой линии. На рисунке 14 показано, как выглядит этот кусок проволоки с трёх различных точек зрения: а) спереди; б) сбоку; в) сверху. Определите, как изогнули проволоку. ***Ответ***: рисунок 15.

Вариант 2

1. Нарисуйте пирамиду и цилиндр.

2. Какие пары фигур, изображённые на рисунке 16, равны? Перерисуйте равные фигуры в тетрадь.

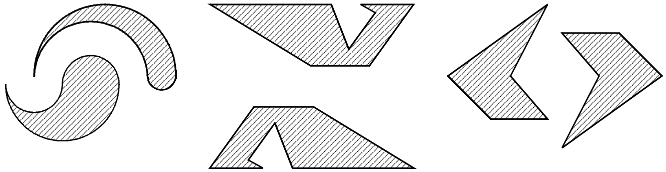


Рис. 16

3. Кусок проволоки изогнули в виде некоторой линии. На рисунке 17 показано, как выглядит этот кусок проволоки с трёх различных точек зрения: а) спереди; б) сбоку; в) сверху. Попробуйте определить, как изогнули проволоку. ***Ответ***: рисунок 18.

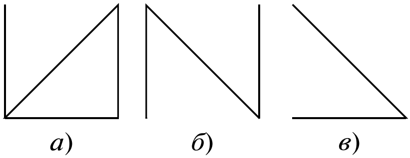


Рис. 17

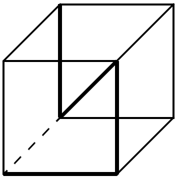


Рис. 18

Глава 2
Основные свойства плоскости (17 ч)

С этой главы начинается систематический курс геометрии. В главе систематизируются и обобщаются знания и представления учащихся о простейших геометрических фигурах, накопленные ими в процессе изучения математики в 1—6 классах и жизненного опыта.

Основной особенностью авторского подхода к изложению начальных понятий планиметрии является раннее введение понятий осевой и центральной симметрии, а также кривых и ломаных линий, многоугольников, окружности и круга.

Изучение главы должно также решить задачу введения терминологии, развития наглядных представлений и навыков изображения планиметрических фигур и простейших геометрических конфигураций по условию задач и в ходе их решения. Всё это необходимо для дальнейшего изучения геометрии, в силу чего важными аспектами изучения темы является работа с чертежами и рисунками. При решении задач следует, прежде всего, опираться на наглядные представления учащихся. Тем не менее решение задач следует использовать для постепенного формирования у учащихся первых навыков применения свойств геометрических фигур как опоры при решении задач. Можно предложить выполнять рисунок к каждой задаче, сопровождая каждый шаг логическими рассуждениями.

Изучение главы ставит перед учителем сложные методические задачи:

1) начать обучение школьников чётким геометрическим формулировкам и рассуждениям;

2) постепенно подводить учащихся к пониманию необходимости обоснования каждого утверждения, побуждая их вопросами: «Как?», «Почему?», «На каком основании?» и т. д.;

3) формировать у учащихся умение выделять из текста геометрической задачи: «Что дано?», «Что требуется найти (доказать)?», кратко и чётко записывать решение задачи;

4) отражать ситуацию, данную в условии задачи и возникшую в ходе её решения на рисунке.

Всему этому учащиеся будут обучаться на протяжении всего курса геометрии, но в этой главе закладываются основы будущих умений.

В главе приведено избыточное количество задач, что даёт возможность учителю при планировании уроков подбирать задачи, учитывая уровень подготовки класса. Часть задач можно использовать позднее при повторении материала перед изучением новых тем, а также при подготовке как к тематической контрольной работе, так и к итоговой.

Многие задачи используют стандартные приёмы решения или представляют собой стандартные задачи, которые в курсе геометрии будут использоваться как фрагменты или подзадачи более сложных задач. Эти задачи требуют внимания со стороны учителя. При этом особенно важно отрабатывать решение этих задач арифметическими (не алгебраическими) способами. Это позволит учащимся лучше справляться с техническими трудностями, возникающими при решении многоходовых геометрических задач. С другой стороны, надо подчеркнуть, что есть два подхода к решению вычислительных задач в геометрии: арифметический (поэтапное решение) и алгебраический (составление уравнений). На начальном этапе геометрического образования ощущается определённый дефицит задач на применение алгебраического метода. Поэтому по возможности полезно показывать оба метода: арифметический и алгебраический. Хотя в перспективе, когда рассматриваемые задачи превратятся в фрагменты более сложных задач, главным станет арифметический метод.

В процессе изучения полезно уделить внимание использованию мультимедийного приложения, наглядным средствам обучения и решению задач по готовым чертежам.

При изучении главы 2 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— распознавать и изображать на рисунках: прямые, лучи, отрезки, пересекающиеся, параллельные и перпендикулярные прямые;

— распознавать и изображать на рисунках: смежные и вертикальные углы, биссектрису угла;

— описывать ситуацию, изображённую на рисунке, и, наоборот, по описанию ситуации выполнять рисунок;

— иллюстрировать и объяснять основные свойства простейших геометрических фигур;

— формулировать, иллюстрировать и объяснять понятия «симметрия относительно точки», «симметрия относительно прямой»; теоремы о свойствах смежных и вертикальных углов;

— применять при решении задач на вычисление и доказательство свойства измерения отрезков и углов, теоремы о свойствах смежных и вертикальных углов, а также перпендикулярных прямых.

2.1. Геометрия прямой линии (2 ч)

В параграфе изучается материал, традиционно определяемый как начальные понятия планиметрии, за исключением понятия симметрии относительно точки.

При изучении § 2.1 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— изображать, обозначать и распознавать на рисунках прямые, лучи, отрезки;

— выделять в конфигурации, данной в условии задачи, прямые, лучи, отрезки, углы; пересекающиеся, параллельные и перпендикулярные прямые;

— формулировать, иллюстрировать и объяснять определение симметрии относительно точки; свойства длины отрезка;

— изображать, обозначать и распознавать на рисунках центрально-симметричные точки на плоскости;

— применять при решении задач на вычисление и доказательство свойства измерения отрезков; понятие симметрии относительно точки.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

(1) Из курса математики начальной школы и 5—6 классов учащимся известны понятия отрезка и луча, поэтому достаточно ввести определения и закрепить их с помощью работы по рисунку 19, ответив на в о п р о с ы.

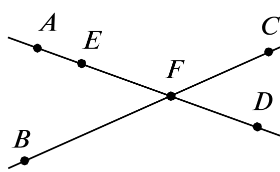


Рис. 19

1. Назовите точки, которые лежат между точками A и D.

2. Назовите все отрезки, у которых один конец находится: а) в точке F; б) в точке D.

3. Назовите все лучи с началом в точке *F*.

4. Назовите пары дополнительных лучей, используя для обозначения данные на рисунке точки.

Вместо предложенной работы с классом можно выполнить № 47. Затем устно решить № 42, 59 (а, б, в) с выполнением рисунков на доске.

Кроме заявленного обозначения луча прописными латинскими буквами, в учебнике будет использоваться также и обозначение строчной латинской буквой. Если прямая обозначается строчной латинской буквой a, а точка A разбивает прямую на два дополнительных луча, то их в учебнике довольно часто обозначают a_1 и a_2.

2 При объяснении понятий «длина отрезка», «равенство отрезков» и «отношение отрезков» полезно вспомнить с учащимися известные им единицы измерения длин.

Затем взять отрезок AB за единицу длины и измерить им отрезок CD (рис. 20). Повторить измерения, взяв за единицу длины отрезок MN (рис. 21). Число единиц длины меняется в зависимости от выбранной единицы измерения. В первом случае $CD = 4AB$, во втором $CD = 12MN$.

Теперь измерим отрезок GF в тех же единицах, т. е. в AB и MN (рис. 22). Получим $GF = 4AB$, $GF = 12MN$. Отрезки CD и GF равны. Равенство отрезков записывается $CD = GF$. Измерим отрезок KL, взяв за единицу длины отрезок MN (рис. 23), $KL = 24MV$, а отрезок $CD = 12MN$.

Измерим те же отрезки, т. е. в KL и CD, взяв за единицу длины отрезок PQ. Получим $KL = 2PQ$, а $CD = 6PQ$. Таким образом, получили, что при измерении, когда

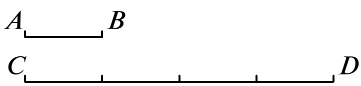


Рис. 20

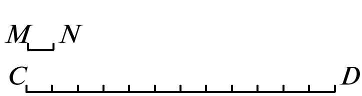


Рис. 21

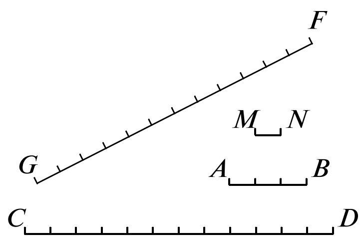


Рис. 22

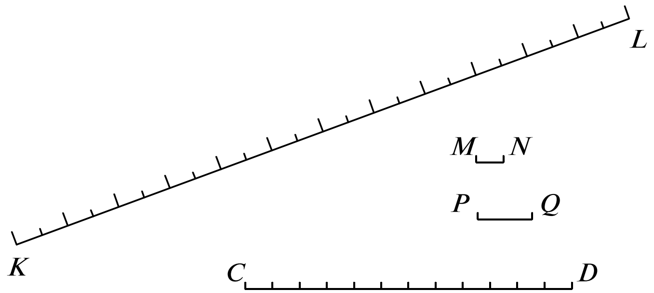


Рис. 23

за единицу длины взят отрезок PQ, отрезок KL в 2 раза больше отрезка CD, и в случае, когда за единицу длины взят отрезок MN, отрезок KL в два раза больше отрезка CD. Таким образом, равенство отрезков и отношение отрезков не зависят от выбранной единицы длины.

(3) После объяснения свойства длины отрезка на закрепление правила можно решить устно № 1—2ДЗ с выполнением рисунка на доске (задача № 56 обобщает их), затем решить устно № 56, 48. В № 48 достаточно ответа, что точка A лежит между точками B и C, так как из трёх точек на прямой только одна расположена между двумя другими и при этом выполняется равенство $BC = AB + AC$.

Полезно сообщить учащимся, что в формулировках различных задач часто встречаются обороты: ***«точка A принадлежит отрезку BC»***, ***«точка A разделяет точки B и C»***, ***«точки B и C лежат по разные стороны от точки A»***. Все они означают, что ***«точка A лежит между точками B и C»*** и при записи обозначается $A \in BC$. Запись $A \notin BC$ означает, что ***точка A не принадлежит отрезку BC***.

(4) Учащиеся уже умеют откладывать отрезки с помощью циркуля, поэтому полезно предложить им ответить на вопросы.

М 1. Сколькими способами можно отложить отрезок RP, равный 2 см, на прямой от точки R?

М 2. Сколькими способами можно отложить на луче с началом в точке R отрезок RP, равный 2 см?

Затем решить устно № 63 (а, б, в) с выполнением рисунка на доске.

(5) Объяснив учащимся понятие симметрии относительно точки на прямой, предложить следующее задание.

На прямой даны точки A и F.

1) Постройте точку F', симметричную точке F относительно точки A. 2) Какая точка симметрична точке F' относительно точки A?

После этого решить устно № 80, 81, 83 с выполнением рисунка на доске.

(6) В задачах параграфа есть серия № 85—87, здесь используются знания учащихся о координатной прямой из курса математики. При их решении обобщаются знания об отрезках и лучах, их полезно решить на уроке. Занимательные задачи — № 74, 89—92 развивают интерес школьников не только к геометрии, но и к математике вообще. В № 52, 53 задания, отмеченные одной буквой, лучше решать одновременно.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — параграф, кроме симметрии; № 48, 49, 52 (б), 53 (б), 56, 59 (а, б, в), 63 (а, б, в), 64; дома — № 52 (а), 53 (а), 60 (а, б), 61, 65 и № 1—6В.

На втором уроке: в классе — понятие симметрии; № 80, 81, 83, 85 (б, в), 86 (б), 87 (б); дома — № 85 (а, г), 86 (а, в, г), 87 (а, в), 88 и № 7—9В.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Объясните, что такое отрезок с концами в данных точках.
2. Что такое полупрямая или луч? Какие прямые называются дополнительными?
3. Что означает понятие «отношение отрезков»?
4. Какие отрезки называются равными?
5. Сформулируйте свойство длины отрезка.
6. Объясните, как откладывать отрезки с помощью циркуля.
7. Какие точки на прямой называются симметричными относительно данной точки?
8. Объясните, что такое центр симметрии.
9. Какими свойствами обладает любая точка прямой?

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

Основная часть задач параграфа решается устно с выполнением чертежа на доске и в тетради. № 48, 78, 90.

52. Обозначим BM через x, тогда $AM = 3 - x$, отсюда:

а) $3 - x = 2x$;
б) $2(3 - x) = 3x$;
в) $(3 - x) : x = 1 : 5$;
г) $(3 - x) : x = 3 : 4$;
д) $(3 - x) - x = 2$;
е) $3(3 - x) + 2x = 7$;
ж) $(3 - x)^2 - x^2 = 3$.

Для каждого пункта из решения соответствующего уравнения находим BM и AM. Такой подход позволяет в курсе геометрии применить и закрепить знания учащихся о линейных уравнениях, которые изучались в курсе алгебры. Задание № 52 (ж) следует оставить для повторения в конце года.

53. Предположим, что точка M находится на луче AB. Обозначим BM через x, тогда $AM = x + 3$, отсюда:

а) $x + 3 = 2x$;
б) $2(x + 3) = 3x$;
в) $(x + 3) : x = 1 : 5$;
г) $(x + 3) : x = 3 : 4$.

Из решения соответствующего уравнения каждого задания находим BM и AM. В заданиях в) и г) получим BM — отрицательное, значит, точка M находится на луче BA.

Замечание. Условия заданий а)—г) позволяют без решения уравнения определить, какому лучу принадлежит точка M.

56. Точку C можно расположить на прямой двумя способами: рисунок 24 к заданию а), рисунок 25 к заданию б). ***Ответ***: а) 9,9 и 1,5; б) 4,9 и 0,7.

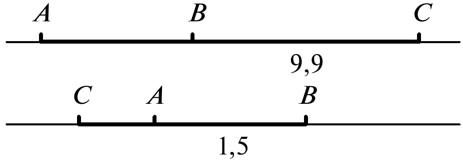


Рис. 24

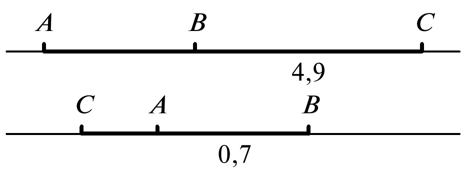


Рис. 25

58. в) Точки A, B, C и D являются концами отрезков AC и BD, при этом на прямой отрезки могут быть заданы как AC и BD, AC и DB, CA и BD, CA и DB. Достаточно рассмотреть два случая расположения точек A, B, C и D. Первый случай рассмотрен на рисунке 26, а второй случай на рисунке 27.

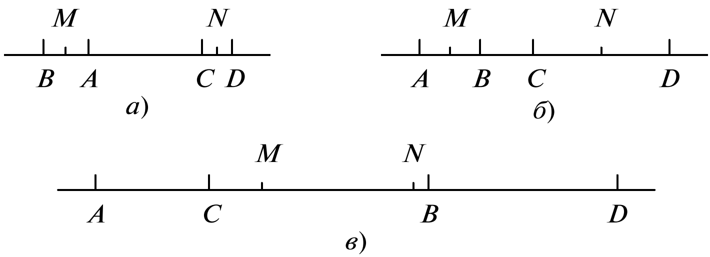


Рис. 26

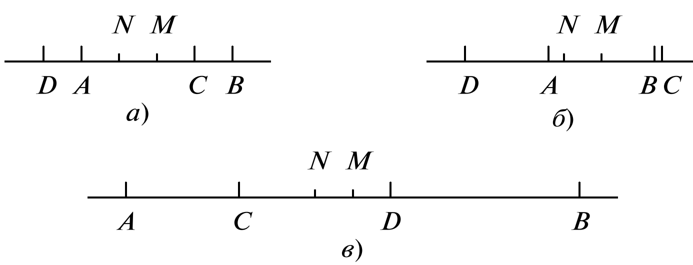


Рис. 27

Первая последовательностей расположения точек A, B, C и D задаётся взаимным расположением отрезков AC и BD. Для определённости пусть $AC < BD$, тогда $A \in BD$ и $C \in BD$, это первый случай (рис. 26, *а*). Сдвинем отрезок AC влево так, чтобы $A \notin BD$, а $C \in BD$, это первый случай (рис. 26, *б*). Ещё сдвинем отрезок AC влево так, чтобы $A \notin BD$ и $C \notin BD$, это первый случай (рис. 26, *в*).

Вторая последовательность расположения точек A, B, C и D задаётся взаимным расположением отрезков AC и DB. Так же как и в первом случае, во втором случае для определённости положим $AC < DB$, тогда $A \in DB$ и $C \in DB$, это второй случай (рис. 27, *а*). Сдвинем отрезок AC влево так, чтобы $A \notin BD$, а $C \in BD$, это второй случай (рис. 27, *б*). Ещё сдвинем отрезок AC влево так, чтобы $A \notin BD$, а $C \notin BD$, это второй случай (рис. 27, *в*). Точка M является серединой отрезка AB, а точка N — серединой отрезка CD.

Рассмотрим первый случай (см. рис. 26):

а) пусть $AB = x$, а $CD = y$, при этом $x + y = 2$, $MN = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 5 = 6$; б) пусть $BC = x$, тогда $AB = 5 - x$, а $CD = 7 - x$, отсюда $MN = \frac{1}{2}(5 - x) + \frac{1}{2}(7 - x) + x = 6$; в) пусть $BC = x$, тогда $AB = 5 + x$, а $CD = 7 + x$, $AD = 5 + 7 + x$, отсюда $MN = 5 + 7 + x - \frac{1}{2}(5 + x) + \frac{1}{2}(7 + x) = 6$.

Рассмотрим второй случай (см. рис. 27):

а) пусть $BC = x$, $AB = 5 + x$, а $CD = 7 - x$, $MN = 7 - \frac{1}{2}(5 + x) - \frac{1}{2}(7 - x) = 1$; б) пусть $BC = 5$, тогда $AB = 5 - x$, а $CD = 7 + x$, отсюда $MN = \frac{1}{2}(7 + x) - \frac{1}{2}(5 - x) - x = 1$; в) пусть $CD = x$, тогда $AB = 5 + 7 + x$, отсюда $MN = 5 + 7 + x - \frac{1}{2}(5 + 7 + x) - \frac{1}{2}x - 5 = 1$.

60. Поступим так же, как и в № 56. Возьмём две точки A и B. Тогда для точки C возможны два положения справа и слева от точки B. Затем, двигаясь вправо и влево от C, получим возможные положения точки D. Для каждого положения C возможны два положения точки D (рис. 28). К заданиям б) и в) рисунки аналогичны. В задании в) точки B и C меняются местами. Возможны следующие значения отрезка AD: а) 4,3; 0,9; 1,9; 1,5; б) 6,2; 1,6; 2,6; 2; в) 6,7; 0,7; 4,1; 1,9.

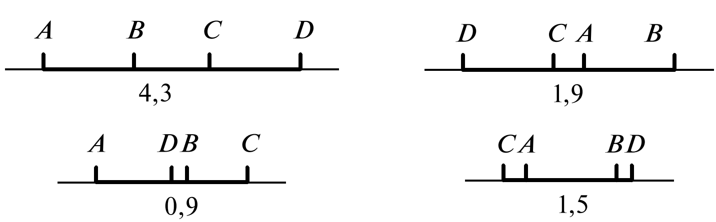


Рис. 28

62. Пусть $AM = x$. Тогда $MK = 2x$, $KB = 3x$. Поступая так же, как при решении № 10, т. е. двигаясь по прямой от A и отмечая последовательно точки M, K и B, получим для AB возможные значения: $AB = 6x$, $AB = 4x$, $AB = 2x$. (4-й случай оказывается невозможным, так как $AB = 0$.) Возможны три варианта ответа:

$KM = 1\frac{1}{3}$, $KM = 2$, $KM = 4$.

64. Возможны два решения (рис. 29, *а* и *б*).

а) *б*)

Рис. 29

В случае а) $CA = BC - AB = 2{,}1 - 1{,}2 = 0{,}9$.
В случае б) $CA = BC + AB = 2{,}1 + 1{,}2 = 3{,}3$.

70. В первом случае искомые точки являются внутренними точками отрезка, концами которого являются середины отрезков AB и BC. Во втором — луч с началом в середине отрезка BC, содержащего точку B.

71. Обозначим BM через x, тогда $AM = 1 - x$, где 1 — длина отрезка AB, отсюда: а) $1 - x > x$; б) $1 - x > 2$; в) $3(1 - x) \leqslant x$; г) $x < (1 - x) < 2x$; д) $2x \leqslant (1 - x) < 3x$; е) $x \leqslant 2(1 - x) \leqslant 4x$. Для каждого случая из решения соответствующего неравенства находим BM. По-видимому, случаи в) — е) следует оставить для повторения в конце года. На примере случая д) рассмотрим применение арифметического метода решения. Возьмём на отрезке AB точки K и P. $BK = \frac{1}{3}AB$, $BP = \frac{1}{4}AB$.

Точки M заполняют отрезок KP, при этом точка K удовлетворяет условию задачи, а точка P — нет.

72. а) Обозначим через K середину AB. Нам подходят точки луча KB, кроме точек K и B. б) Рассмотрим две точки на прямой AB: точку K на отрезке AB, $BK = \frac{1}{3}AB$, и точку P на продолжении отрезка AB за точку B, $BP = AB$. Точки M заполняют отрезок KP, исключая точку B. Концы отрезка включаются. е) Возьмём на прямой точки M_1, M_2, M_3 и M_4. Вместе с точками A и B они идут в следующем порядке: M_1, A, M_2, M_3, B, M_4.

При этом выполняются равенства $M_1A = AB$, $AM_2 = \frac{1}{3}AB$, $AM_3 = \frac{2}{3}AB$, $AM_4 = 2AB$. Подходят все точки прямой, кроме внутренних точек отрезков M_1M_2 и M_3M_4.

73. Задача имеет два решения: точка M может быть серединой AB, а также лежать на луче BA так, что $BM = 3$.

74. Если точки движутся в одном направлении, то середина отрезка переместится на величину $\frac{3+1}{2} = 2$. Если точки движутся в разных направлениях, то середина отрезка переместится на величину $\frac{3-1}{2} = 1$. Вообще говоря, решение видно из рисунка 30, поэтому на данном этапе обучения достаточно сделать на доске и в тетрадях соответствующие рисунки.

Рис. 30

75. $\frac{BM}{MC} = \frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$. Пусть $BM = x$. Тогда $MC = 1 - x$, $AM = 1 + x$, $DM = 3 - x$. Условие задачи даёт нам уравнение $\frac{x}{1-x} = \frac{x}{3-x}$, откуда найдём $x = \frac{1}{3}$.

76. а) Самый большой отрезок CD, при этом точка C является серединой отрезка AD. Предположим, что точка M принадлежит отрезку BC. Обозначим длину отрезка MC через x, $BM = 2 - x$, тогда $1 + 2 - x + 2 - x = x + 3$, отсюда $MC = \frac{1}{2}$. Точка M лежит на отрезке BC, причём $BM = 1\frac{1}{2}$ (рис. 31, *а*). б) Решение аналогично заданию а). Подходят все точки отрезка BC, включая его концы.

Рис. 31

78. Если длину первого прыжка принять за единицу, то получится, что первый прыжок имеет нечётную длину, а все последующие — чётную.

В развитие этой задачи решить № 43Т.

83. Полезно рассмотреть несколько случаев расположения точки на прямой AB: точка M лежит внутри AB, M вне AB, но близко к точке A и др. Проследите за её перемещением после каждой симметрии, сделайте соответствующие рисунки.

85—88. Решение видно из рисунка, поэтому кажущийся большим объём заданий на самом деле не требует больших временных затрат.

85. *Ответ*: а) отрезок вместе с концами; б) луч, исключая его начало; в) отрезок без его левого конца; г) отрезок, исключая его концы.

86. Во всех случаях координата x' точки A' задаётся формулой $x' = x_2 + (x_2 - x_1) = 2x_2 - x_1$.

89. После первой минуты червяку остаётся 1 м, после второй — $\frac{1}{2}$ м, затем $\frac{1}{4}$ м, $\frac{1}{8}$ м. Каждое следующее расстояние в два раза меньше предыдущего. Если считать червяка точкой, то он никогда не доберётся до конца ветки.

91. Общая длина семнадцати отрезков не меньше 12. Значит, хотя бы один из них не меньше $\frac{12}{17} = 0{,}7058 > 0{,}7$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Точка B лежит между точками A и F. Известно, что AB = 3 см, BF = 7 см. Определите: а) длину отрезка AF; б) длину отрезка BF.

2. Точка K принадлежит отрезку LM, равному 23 см. Найдите длины отрезков KL и KM, если отрезок KL на 5 см короче отрезка KM.

3. Точка Q принадлежит отрезку PR, равному 21 см. Найдите отрезки QP и QR, если длины отрезков QP и QR относятся как 4 : 3.

2.2. Основные свойства прямой на плоскости (2 ч)

В параграфе изучается материал, традиционно определяемый как основные свойства прямой на плоскости, за исключением понятия симметрии относительно прямой.

При изучении § 2.2 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— формулировать и иллюстрировать определение параллельных прямых;

— формулировать, иллюстрировать и объяснять определение симметрии относительно прямой; три основных свойства плоскости;

— изображать, обозначать и распознавать на рисунках точки, симметричные относительно прямой;

— применять при решении задач на вычисление и доказательство три основных свойства плоскости; определение параллельных прямых.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

1 Формулируя первое основное свойство плоскости, следует обратить внимание учащихся на то, что в нём содержится два утверждения: существование прямой (через любые две точки можно провести прямую) и её единственность (и притом только одну). Кроме введённого в параграфе обозначения прямой двумя прописными латинскими буквами, в учебнике будет использоваться также и обозначение строчной латинской буквой. На закрепление *первого основного свойства плоскости* можно предложить учащимся следующие вопросы.

М 1. Всегда ли можно провести прямую через точки A и B?

2. Сколько прямых можно провести через точки A и B?

(2) При объяснении теоремы 2.1 проводится первое доказательное рассуждение методом от противного, однако не следует на этом факте акцентировать внимание учащихся. Говорить о значении этого метода на уроке преждевременно, и неуместным представляется даже сам термин «метод от противного». А пока же представляется единственно возможной в этом отношении задача — научить школьников первоначальным навыкам рассуждений от противного на примерах простых задач. Полезнее решить устно № 1, 3ДЗ с выполнением рисунка на доске. Это позволит повторить рассуждения, аналогичные доказательству теоремы.

(3) Понятие «параллельные прямые» не является для учащихся новым, оно известно из курса математики. Полезно напомнить учащимся, что для обозначения параллельности прямых используется знак ‖.

(4) *Второе основное свойство плоскости* дано в краткой формулировке, удобной для запоминания. При решении задач учащиеся будут пользоваться её описанием: «Две точки плоскости A и B, не лежащие на прямой a этой плоскости, будут располагаться в разных или в одной полуплоскости относительно прямой a в зависимости от того, будет отрезок AB пересекаться с прямой a или нет». На закрепление — вопросы.

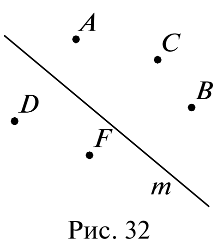


Рис. 32

1. На рисунке 32 постройте такие отрезки, у которых один конец находится в точке A, а другой в одной из обозначенных на рисунке точек, и которые при этом не пересекают прямую m.

2. На рисунке 32 постройте такие отрезки, у которых один конец находится в точке A, а другой в одной из обозначенных на рисунке точек и которые при этом пересекают прямую m.

После этого решить устно № 105, 106 с выполнением рисунка на доске, затем № 5ДЗ.

(5) При объяснении учащимся понятия *центральной симметрии на плоскости* сначала попросить их ответить на вопросы.

1. Какие точки на прямой называются симметричными относительно данной точки?

2. Что такое центр симметрии?

После введения понятия выполнить з а д а н и я.

1. Дана точка O. Постройте точку A', симметричную данной точке A относительно точки O.

2. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Назовите точку, симметричную точке A (точке B, точке C, точке D) относительно точки O.

6 Понятие *осевой симметрии* вводится на наглядно-интуитивном уровне, поэтому при подготовке к уроку полезно сделать, а в процессе объяснения использовать модель плоскости с двумя кругами (рис. 47У). Обратить внимание на усвоение учащимися с в о й с т в осевой симметрии, которые будут использоваться при доказательстве теорем в следующем параграфе, а именно:

1) точки оси симметрии переходят сами в себя;

2) фигуры, симметричные относительно данной прямой, равны.

Далее выполнить № 110, 117 и № 52—53Т.

7 В № 115, как и в № 78, используется понятие чётности, полезно их решить на одном уроке.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — пункты: первое основное свойство плоскости, параллельные прямые, второе основное свойство плоскости; № 105, 106, 109; дома — № 95, 99, 103, 108 и № 1—4В.

На втором уроке: в классе — пункты: центральная и осевая симметрии, третье основное свойство плоскости, № 110, 113, 115, 117 и 78; дома — № 112, 114, 116 и № 5—11В.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Сформулируйте первое основное свойство плоскости.
2. Сформулируйте и докажите теорему 2.1.
3. Какие прямые называются параллельными?
4. Сформулируйте второе основное свойство плоскости.
5. Объясните, как построить точку, симметричную данной на плоскости.
6. Сформулируйте третье основное свойство плоскости.
7. Какие точки называются симметричными относительно данной прямой?

8. Какие фигуры называются симметричными относительно данной прямой?

9. В какие точки при симметрии относительно данной прямой переходят точки оси симметрии?

10. Что такое ось симметрии фигуры?

11. Каким свойством обладают фигуры, симметричные относительно данной прямой?

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

Основная часть задач параграфа решается устно с выполнением рисунка на доске и в тетради. № 105, 109, 116, 117.

105. Плоскость может быть разделена на пять частей (все четыре прямые параллельны); восемь частей (три прямые параллельны, а четвёртая их пересекает; либо все прямые проходят через одну точку); девять частей (две пары параллельных прямых, либо три прямые проходят через одну точку, а четвёртая параллельна одной из них); десять частей (одна пара параллельных прямых, но никакие три в одной точке не пересекаются; либо нет параллельных, но какие-то три проходят через одну точку); одиннадцать частей (никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку).

109. Если один из братьев пересекал дорогу x раз, то другой $(x + 3)$ раза. А так как x и $(x + 3)$ — числа разной чётности, значит, братья находятся по разные стороны дороги.

113. Пусть B — точка пересечения отрезка AA' с прямой a. По свойству симметрии $AB = BA'$.

114. Пусть M — точка пересечения прямых AB и a. При симметрии относительно a прямая AB переходит в прямую $A'B'$, а прямая $A'B'$ в прямую AB. Точка M остаётся на месте, значит, M есть точка пересечения прямых AB и A_1B_1.

115. Если бы прямая a не проходила ни через одну из отмеченных точек, то их можно было бы разбить на пары точек, симметричных относительно a. Но 1995 — число нечётное.

116. Каждая последовательность символов получается из последовательности цифр 1, 2, 3, 4 присоединением к каждой цифре фигуры, симметричной этой цифре относительно некоторой оси.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Точка A принадлежит прямой CB. Различны ли прямые AB и CB?

2. Различные прямые f и e пересекаются в точке G. Прямая f проходит через точку B. Проходит ли прямая e через точку B?

3. Одна из двух пересекающихся прямых проходит через точку B, принадлежащую другой прямой. Различны ли точка B и точка пересечения данных прямых?

4. На сколько частей разделят плоскость три прямые, пересекающиеся в одной точке?

М **5.** Торт, украшенный семью розочками, тремя прямолинейными разрезами разделили на куски так, что на каждом куске оказалось ровно по одной розочке. Покажите на рисунке, как это можно сделать (рис. 33).

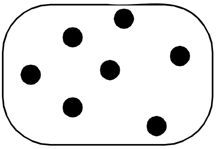


Рис. 33

2.3. Плоские углы (2 ч)

В параграфе изучается материал, традиционный для любого курса планиметрии: определение угла, измерение углов, смежные и вертикальные углы и их свойства, прямой, тупой и острый углы, биссектриса угла и её свойства, перпендикулярные прямые.

При изучении § 2.3 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— формулировать, иллюстрировать и объяснять определения смежных и вертикальных углов, биссектрисы угла;

— распознавать на рисунках смежные и вертикальные углы, биссектрису угла;

— выделять в конфигурации, данной в условии задачи, смежные и вертикальные углы, биссектрису угла;

— формулировать, иллюстрировать и доказывать теоремы о свойствах смежных и вертикальных углов; теоремы о свойствах перпендикулярных прямых;

— формулировать, иллюстрировать и объяснять определение перпендикулярных прямых;

— формулировать и иллюстрировать следствия из теоремы о единственности перпендикуляра;

— строить прямую, перпендикулярную данной;

— применять при решении задач на вычисление и доказательство свойства измерения отрезков и углов; теоремы о свойствах смежных и вертикальных углов, перпендикулярных прямых; понятие симметрии относительно прямой.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

1 Из курса математики начальной школы и 5—6 классов учащимся известно понятие угла, поэтому достаточно ввести все определения, связанные с этим понятием, и закрепить их по рисунку 52У и № 1—5В.

Кроме обозначения угла — $\angle AOB$ (§ 2.3) в литературе часто используется и другое обозначение $\angle O$, т. е. при знаке угла ставится буква, обозначающая вершину угла.

2 Напомнив учащимся понятие «градусная мера угла», полезно выполнить на доске и в тетрадях упражнение: «Начертите неразвёрнутый угол. С помощью транспортира определите величину этого угла, обозначьте угол и запишите его градусную меру».

В учебнике приводится конструктивное доказательство единственности угла заданной градусной меры («Рассмотрим какой-нибудь угол. Пусть одна его сторона неподвижна, а другая вращается около вершины...» и т. д.), которое будет использоваться в доказательстве теоремы 2.4. При его объяснении использовать модель (рис. 34) для лучшего усвоения материала.

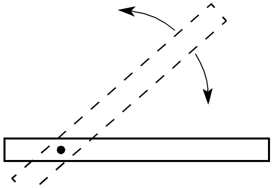


Рис. 34

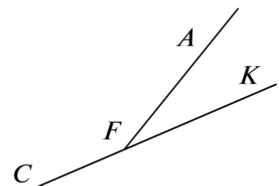


Рис. 35

3 Понятие «смежные углы» в соответствии с идеологией учебника полезно сначала ввести на наглядном уровне. Проведём прямую CK и отметим точку F, лежащую между точками C и K (рис. 35). Проведём луч FA. Получим два угла: $\angle CFA$ и $\angle AFK$. Такие углы называют *смежными*. Теперь с целью подведения учащихся к определению смежных углов предложить им вопросы.

1. Назовите стороны каждого из углов.
2. Как связаны между собой стороны смежных углов?

Затем предложить работу по готовым чертежам (рис. 36), включив в их набор контрпример е), для проверки правильности усвоения учащимися понятия и умения находить их в стандартных ситуациях.

1. На рисунке найдите и запишите пары смежных углов.
2. Почему эти углы являются смежными?
3. Являются ли углы (рис. 36, *е*) смежными? Почему?

Вместо работы с плакатом (см. рис. 36) можно предложить учащимся устно выполнить № 119, в котором углы в случаях а), б) и в) (рис. 65У) являются контрпримерами к определению смежных углов.

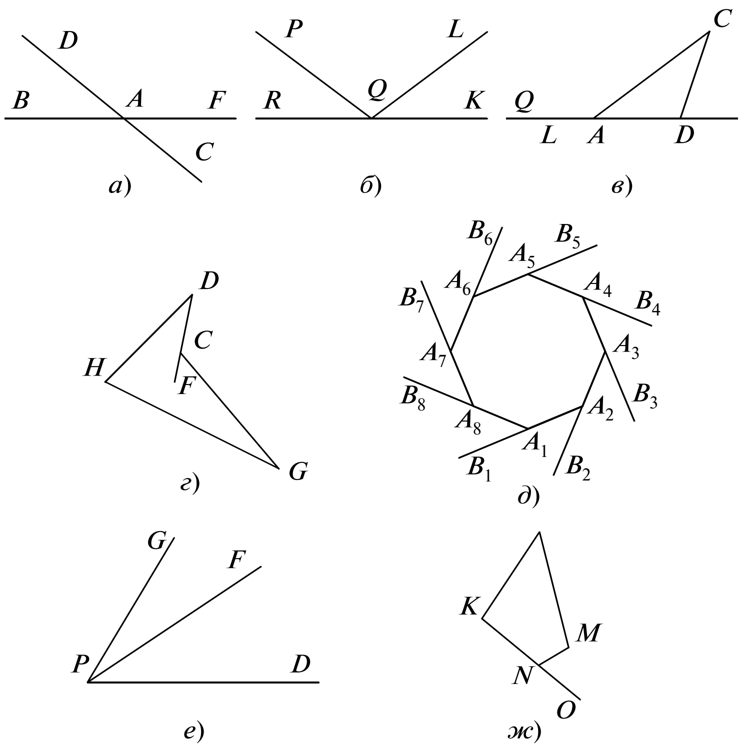


Рис. 36

Дополнительно к данному в учебнике понятию смежных углов дать также конструктивное определение смежных углов, т. е. показать учащимся, что смежный угол можно построить путём дополнения одного из лучей, являющихся стороной угла до прямой. Для этого можно устно выполнить № 122.

Традиционная теорема о сумме смежных углов в учебнике является их свойством. Его объяснение можно провести с опорой на рисунок 54У. Углы x и y смежные. В сумме они образуют развёрнутый угол, значит, $x° + y° = 180°$.

(4) После введения определений прямого, тупого и острого углов предложить учащимся решить № 3—4 ДЗ, которые связывают понятия смежных углов и определения прямого, тупого и острого углов.

(5) Понятие «вертикальные углы» в учебнике дано конструктивно. При пересечении двух прямых CD и AB (F — точка их пересечения) образуются четыре угла. Рассмотрим $\angle AFC$, ответив на вопросы.

1. Назовите стороны этого угла.
2. Как связаны между собой стороны углов $\angle AFC$ и $\angle DFB$?
3. Какие ещё углы образуются при пересечении двух прямых?

Ответ на последний вопрос («любые два угла, которые получаются при пересечении двух прямых, либо смежные, либо вертикальные») довольно часто используется при решении задач как один из логических шагов.

Для проверки правильности усвоения учащимися понятия «вертикальные углы» и умения находить их в стандартных ситуациях предложить работу по готовым чертежам (рис. 37) с контрпримером (б) с помощью вопросов.

1. На рисунке найдите и запишите пары вертикальных углов.
2. Объясните, почему эти углы являются вертикальными.
3. Определите, являются ли углы на рисунке 37, *б* вертикальными и почему.

Полезно показать учащимся, что вертикальный угол можно построить путём дополнения лучей, являющихся

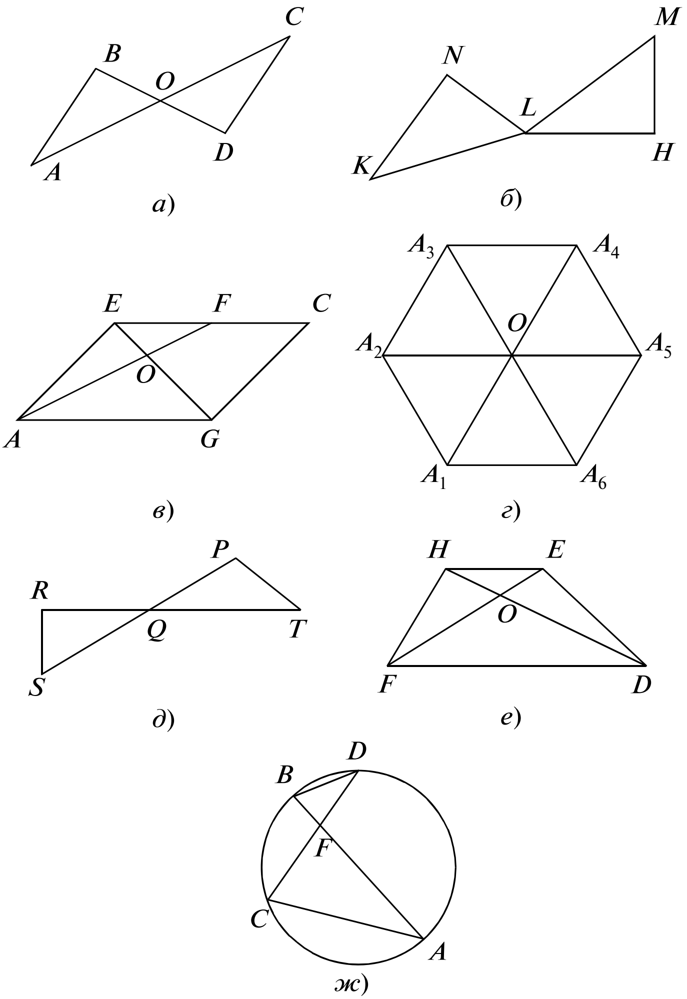


Рис. 37

сторонами данного угла, до прямых, используя *упражнение*: «Дан $\angle CGD$. Начертите угол, вертикальный углу CGD. Сколько таких углов можно построить?»

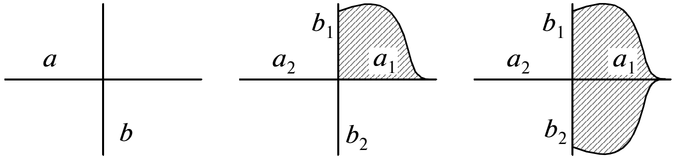
Вместо работы с плакатом (см. рис. 37) можно устно выполнить № 140, в котором углы а), б) и в) являются контрпримерами к определению смежных углов. На закрепление определений смежных и вертикальных углов, свойства смежных углов и теоремы о вертикальных углах полезно устно решить № 128, 129, 133, 144 с выполнением чертежа на доске, или № 64, 65, 66Т, или часть из них.

(6) Понятие «перпендикулярные прямые» не является для учащихся новым — известно из курса математики. В учебнике знак $\perp$, используемый для обозначения перпендикулярности прямых, вводится в § 3.3. Однако учащимся оно знакомо и поэтому его полезно напомнить для применения при записи решения задач.

(7) Так как доказательства теорем 2.3 и 2.4 достаточно трудны для восприятия учащихся, то лучше провести его полностью учителю. Включение учащихся во фронтальную работу при первичном разборе теорем может привести не только к значительным потерям времени, но и к тому, что от них ускользнёт основная идея доказательства — логическая последовательность рассуждений.

Рассмотрим доказательство теоремы 2.3. На рисунке 38, *а* даны перпендикулярные прямые a и b. После симметрии относительно прямой a угол, сторонами которого являются лучи a_1 и b_1 (рис. 38, *б*), переходит в равный ему угол в силу свойства симметрии («при симметрии любая фигура переходит в равную ей фигуру»). Таким образом, луч b_1 переходит в луч, перпендикулярный прямой a, так как угол, сторонами которого являются лучи a_1 и b_1, — прямой. Причём в полуплоскости, где лежит луч b_2, прямой угол единственный. Луч b_2 так же перпендикулярен прямой a. Значит, луч b_1 переходит в своё продолжение — луч b_2 (рис. 38, *в*).

Формулируя теорему 2.4, обратить внимание учащихся на то, что в ней содержится два утверждения: су-



а) *б*) *в*)

Рис. 38

ществование прямой, перпендикулярной данной (через любую точку плоскости проходит) и её единственность (единственная прямая).

Важнейшими следствиями из теоремы 2.4 являются доказательство существования параллельных прямых и определяется способ построения прямой, перпендикулярной данной и проходящей через точку вне данной прямой.

На закрепление рекомендуются задачи 165, 166, 168.

(8) После введения понятия биссектрисы угла предложить учащимся выполнить следующие задания.

1. Чему равен угол между биссектрисой и стороной данного угла, равного: а) 40°; б) 84°; в) 92°; г) 76°?

2. Найдите угол, если его биссектриса образует со стороной угол, равный: а) 17°; б) 53°; в) 29°; г) 41°.

На закрепление определения № 130, 137.

Полезно сообщить учащимся, что в формулировках различных задач (не обязательно из данного учебника) довольно часто встречается оборот: «луч проходит между сторонами угла», что означает «луч лежит между сторонами угла».

При работе над понятием «биссектриса угла» основное внимание следует уделить её свойству: «прямая, на которой лежит биссектриса угла, является осью симметрии угла», так как оно будет активно использоваться в дальнейшем. На закрепление № 145.

(9) Теорема 2.4, как сказано в учебнике, подсказывает способ построения прямой, перпендикулярной данной, и проходящей через точку вне данной прямой. Учащиеся ещё не умеют строить точки, симметричные данным относительно прямой, поэтому в условии всех задач § 2.2 и 2.3 все симметричные точки заданы.

(10) В «Примерном планировании» как для работы на уроке, так и для работы дома дано большое число задач, для решения многих из них достаточно нарисовать правильный чертёж, после чего само решение становится очевидным. Полезно решать их устно с выполнением чертежа на доске и в тетрадях. Это позволит рассмотреть большое количество геометрических ситуаций, изображая которые учащиеся будут усваивать новые понятия и

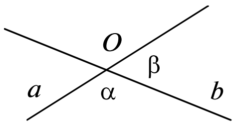


Рис. 39

их свойства. Но можно начать обучение записи решений задач, обращая внимание на умение выделить из формулировки задачи условие и заключение.

Пример одной из возможных записей решения задачи: «Разность двух углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равна 36°. Найдите эти углы».

Дано: $\alpha - \beta = 36°$.

Найдите: α и β.

Решение. Два угла, которые получаются при пересечении двух прямых, либо смежные, либо вертикальные углы (рис. 39).

Углы α и β не могут быть вертикальными, так как по условию они не равны: их разность равна 36°. Значит, α и β — смежные углы.

По свойству смежных углов $\alpha + \beta = 180°$, а по условию задачи $\alpha - \beta = 36°$:

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 36°, \\ \alpha + \beta = 180°; \end{cases}$$

$$\alpha = 36° + \beta;\ 36° + \beta + \beta = 180°;\ 2\beta = 144°;\ \beta = 77°.$$

$$\alpha = 36° + \beta = 36° + 77°,\ \alpha = 113°.$$

Ответ: $\alpha = 113°$ и $\beta = 77°$.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — пункты: определение угла, развёрнутый угол, измерение углов, вертикальные углы, угол между прямыми; устно № 119, 122, 128, 129, 133, 144; дома — № 1—12В, 118, 121, 134, 141.

На втором уроке: в классе — пункты: перпендикулярные прямые, биссектриса угла; 130, 137, 145, 150, 151, 156, 165, 166 и 168; дома — № 13—18В, № 153, 154, 155, 156, 167, 170.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Объясните, какая фигура называется углом.
2. Объясните, какие точки называются внутренними точками угла.

3. Объясните, что называется вершиной и стороной угла.
4. Как обозначается угол?
5. Объясните, какой угол называется развёрнутым углом.

М 6. В каких единицах измеряется угол и с помощью какого инструмента? Объясните, как им пользоваться.

7. Какие углы называются смежными углами?
8. Чему равна сумма смежных углов?
9. Какой угол называется прямым, тупым и острым?
10. Какие углы называются вертикальными углами?
11. Сформулируйте и докажите теорему о вертикальных углах.
12. Объясните, какой угол называется углом между прямыми.
13. Какие прямые называются перпендикулярными?
14. Сформулируйте и докажите теорему 2.3.
15. Сформулируйте и докажите теорему 2.4.
16. Докажите, что две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны.

М 17. Объясните, как провести прямую, перпендикулярную данной, через данную точку вне данной прямой.

18. Объясните, какой луч называется биссектрисой угла.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

Основная часть задач решается устно с выполнением чертежа на доске и в тетради. № 118, 148, 149 и 153 .

119. а) Углы *1* и *2* имеют общую сторону, но другие стороны не дополняют друг друга до прямой; б) углы *1* и *2* не имеют общую сторону; в) углы *1* и *2* не имеют общую сторону.

137. Даны смежные углы (a_1b) и (ab), а c_1 и c — их биссектрисы (рис. 40). Обозначим угол (ab) через x, тогда угол (a_1b) равен $180° - x$. Лучи c_1 и c лежат в разных полуплоскостях относительно луча b. Лучи c_1, c и b исходят из одной точки O. Откуда луч b проходит между сторонами угла (c_1c), значит, $\angle(c_1c) = \angle(c_1b) + \angle(cb)$. А так как c_1 и c — биссектрисы соответственно углов (a_1b) и (ab), то $\angle(c_1b) = \frac{1}{2}(180° - x)$, а $\angle(cb) = \frac{1}{2}x$. Отсюда $\angle(c_1c) = 90°$.

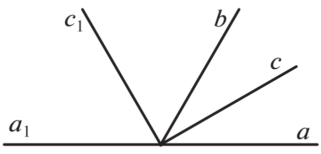


Рис. 40

140. а), б) Углы *1* и *2* не получены при пересечении двух прямых; в) углы *1* и *2* являются смежными.

150. 1) Если данные углы, являясь соседними, идут в указанном (или противоположном) порядке, то углы между прямыми равны следующим величинам: 52°, 86°, 16°, 18°, 34°, 70°. 2) Если данные углы идут в порядке 94°, 52°, 16° (рис. 41), то углы между прямыми равны 86°, 52°, 16°, 18°, 34°, 68°. 3) Если данные углы идут в порядке 94°, 16°, 52°, то углы между прямыми равны 86°, 16°, 52°, 18°, 70°, 68°.

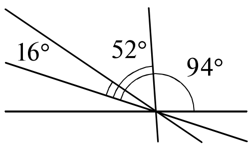


Рис. 41

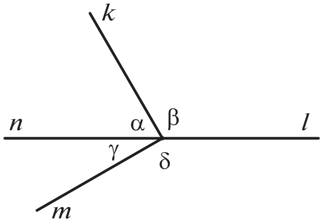


Рис. 42

151. Пусть из одной точки выходят четыре луча k, l, m и n. Для определённости предположим, что лучи l и n лежат на одной прямой (рис. 42). Тогда каждая пара углов α и β, γ и δ, образованных этими лучами, смежные углы. В каждой паре один угол — тупой, второй — острый, для определённости это углы α и γ. Сумма двух острых углов $(\alpha + \gamma)$ может быть острым углом, прямым углом и тупым углом. Случаи $(\alpha + \gamma) < 90°$ и $(\alpha + \gamma) = 90°$ не подходят по условию. Если $(\alpha + \gamma) > 90°$, т. е. три тупых угла β, δ и $(\alpha + \gamma)$, сторонами которых являются три луча k, l и m.

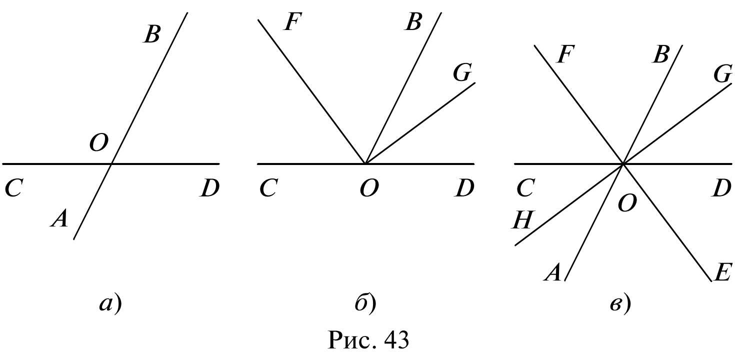


Рис. 43

155. Даны пересекающиеся прямые AB и CD (рис. 43, *а*). Рассмотрим смежные углы $\angle DOB$ и $\angle BOC$ (рис. 43, *б*), для которых OG и OF являются биссектрисами. Пусть $\angle BOD = \alpha$, тогда $\angle BOC = 180° - \alpha$, $\angle BOG = \frac{1}{2}\alpha$, $\angle BOF = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{1}{2}\alpha$. Значит, $\angle GOF = 90°$ и $OG \perp OF$. Продолжим лучи OG и OF за точку O (рис. 43, *в*). В силу теоремы о вертикальных углах луч OH, лежащий на одной прямой с лучом OG, является биссектрисой $\angle AOC$, а луч OE лежит на одной прямой с лучом OF и является биссектрисой $\angle AOD$. Так как $OG \perp OF$, то $HG \perp EF$.

165. Решение задачи следует из рисунка 44. Пусть γ — угол между данными прямыми a и b, α и β — уг-

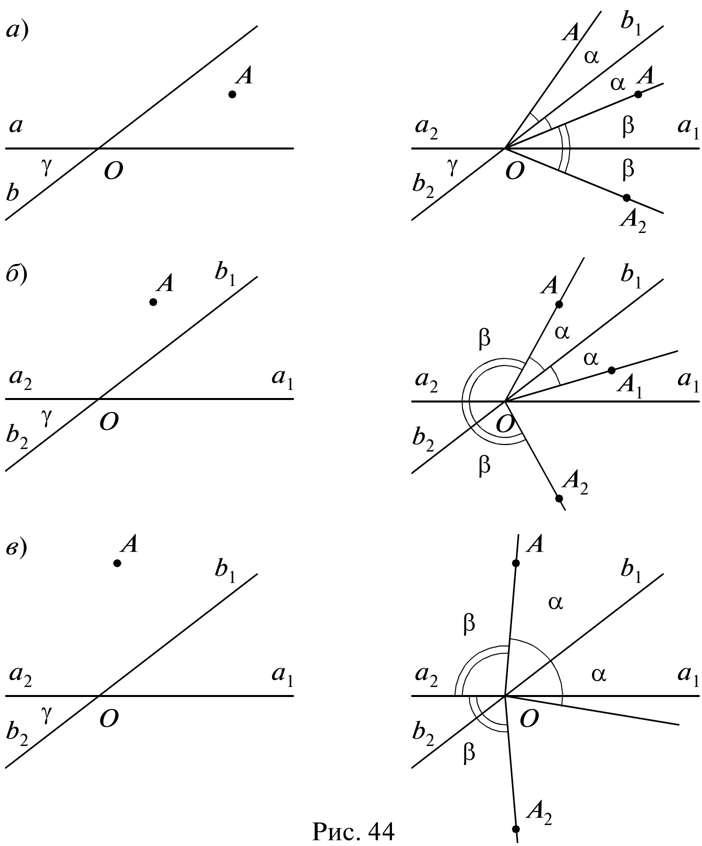


Рис. 44

лы, на которые луч OA разбивает угол, содержащий точку A.

В случае а) точка A принадлежит острому углу между данными прямыми, $\alpha + \beta = \gamma$, $\angle A_1OA_2 = \alpha + \alpha + \beta + \beta = 2\gamma$. В случае б) точка A принадлежит углу, смежному с углом между данными прямыми. Точки A_1 и A_2 лежат в одной полуплоскости относительно прямой b, $\alpha + \beta = 180° - \gamma$; угол между лучами b_2 и OA_2 равен $\beta - \gamma$, а между лучами b_1 и OA_1 равен α; $\angle A_1OA_2 = 180° - (\beta - \gamma) - \alpha = 2\gamma$. В случае в) точка A принадлежит тупому углу между данными прямыми. Точки A_1 и A_2 принадлежат углу между лучами b_2 и a_1: $\alpha + \beta = 180° - \gamma$; угол между лучами a_2 и OA_2 равен β, а между лучами a_1 и OA_1 равен $\alpha - \gamma$; $\angle A_1OA_2 = 180° - \beta - (\gamma - \alpha) = 2\gamma$.

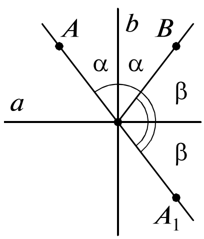


Рис. 45

166. Для того чтобы доказать, что точки A_1 и A (рис. 45) симметричны относительно точки O, необходимо убедиться в выполнении двух условий: 1) точки A_1 и A лежат на одной прямой; 2) $OA = OA_1$. Найдём угол между лучами OA_1 и OA. $\alpha + \beta = 90°$, так как $a \perp b$. $\angle A_1OA_2 = \alpha + \alpha + \beta + \beta = 180°$. Значит, точки A_1 и A лежат на одной прямой. $OA = OB$ и $OB = OA_1$ в силу свойств осевой симметрии.

167. Из № 166 следует, что центральную симметрию можно заменить на две последовательно выполненные осевые симметрии, оси которых взаимно перпендикулярны. А как известно, при осевой симметрии фигура переходит в равную ей фигуру.

168. Задача решается методом от противного, который применялся при доказательстве теоремы 2.1. Пока представляется преждевременным употреблять термин «метод от противного». Пусть в результате симметрии относительно точки O прямая l переходит в прямую l' (точка O не лежит на прямой l). Предположим, что прямые l и l' пересекаются в точке M, тогда они должны пересечься и в точке M', симметричной M относительно точки O. Значит, точка O должна лежать на прямой l.

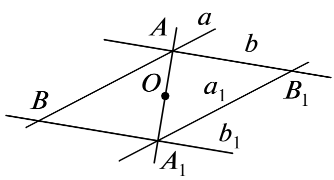


Рис. 46

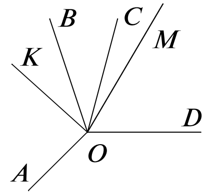


Рис. 47

Но по условию точка O не лежит на прямой l. Следовательно, прямые l и l' не пересекаются.

169. При симметрии относительно O точки A и A_1 переходят друг в друга (прямая a переходит в прямую a_1, а прямая b переходит в прямую b_1). Точно так же друг в друга переходят точки B и B_1 (рис. 46).

170. Пусть A_1 любая точка на прямой a, O — середина отрезка AA_1. При симметрии относительно точки O прямая a перейдёт в прямую a_1, параллельную a и проходящую через точку A.

171. Рассмотрим случай, когда луч OB расположен внутри угла AOC, а луч OC внутри угла BOD (рис. 47). Пусть $\angle AOB = 2\alpha$, $\angle BOC = 2\beta$, $\angle COD = 2\gamma$. По условию $2\alpha + 2\gamma = 180°$. Отметим точки K и M на биссектрисах углов AOC и BOD соответственно. Имеем $\angle KOC = \alpha + \beta$, $\angle BOM = \beta + \gamma$. Теперь получаем $\angle KOM = \angle KOC + \angle BOM - \angle BOC = (\alpha + \beta) + (\beta + \gamma) - 2\beta = \alpha + \gamma = 90°$, что и требовалось доказать. Разберите так же и другие случаи расположения лучей, например: OA, OC, OB и OD.

172. Возьмём какую-либо точку O и построим прямые, симметричные данным относительно точки O (рис. 48).

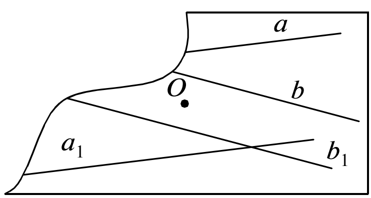


Рис. 48

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Углы DAB и DAF — смежные. Угол DAB равен 57°. Чему равен $\angle DAF$?

2. Докажите, что если два угла равны, то смежные с ними углы равны.

3. Докажите, что если один из смежных углов — острый, то другой угол — тупой.

4. Могут ли быть смежными прямой и острый углы?

5. Могут ли быть смежными прямой и тупой углы?

6. Сумма двух углов равна 148°. Докажите, что эти углы не могут быть смежными.

7. Разность двух углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равна 36°. Найдите эти углы.

8. Разность двух углов равна 78°. Докажите, что эти углы не могут быть вертикальными.

9. Луч BD проходит между сторонами угла ABC, градусная мера которого равна 2α. Найдите градусную меру угла, образованного биссектрисами углов ABD и DBC.

10. Лучи BD и BF проходят между сторонами угла ABC, градусная мера которого равна 70°. Угол, образованный биссектрисами углов ABD и FBC, равен 47°. Найдите градусную меру угла DBF.

2.4. Плоские кривые, многоугольники, окружность (2 ч)

В параграфе систематизируется материал, известный учащимся из курса математики начальной школы и 5—6 классов, а также из жизненного опыта. Весь теоретический материал параграфа является пропедевтическим, его можно дать в ознакомительном плане. Основное внимание следует сосредоточить на решении задач на развитие пространственного представления учащихся.

При изучении § 2.4 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— формулировать, иллюстрировать и объяснять определения: многоугольника и его элементов, окружности и её элементов, круга;

— распознавать на чертежах и рисунках многоугольник и его элементы, окружность и её элементы, круг;

— выделять в конфигурации, данной в условии задачи, многоугольник и его элементы, окружность и её элементы, круг;

— формулировать, иллюстрировать и доказывать теорему об осях симметрии окружности;

— применять при решении задач на вычисления и доказательство: определения многоугольника и его элементов, окружности и её элементов, круга; понятия симметрии относительно точки и относительно прямой.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

(1) Учащимся уже известны виды различных линий, поэтому при их введении можно воспользоваться плакатом (подготовленными рисунками на доске), как на рисунке 49, или устно выполнить № 173—176 и ответить на вопросы.

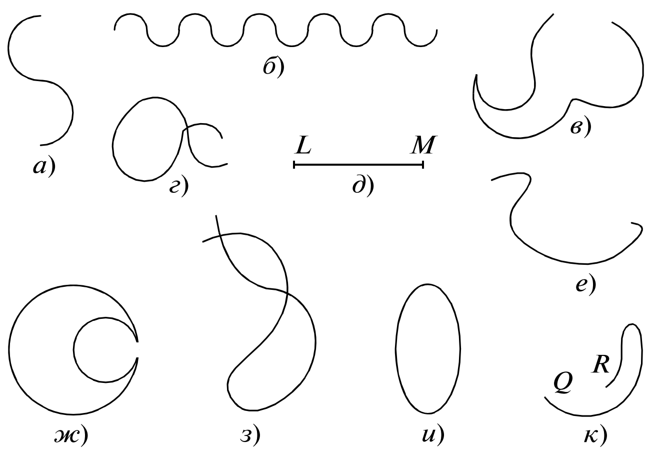


Рис. 49

1. Какие кривые на рисунке — конечные (бесконечные)?
2. Какие кривые на рисунке — замкнутые (незамкнутые)?
3. Какие кривые на рисунке — самопересекающиеся (несамопересекающиеся)?
4. Какой кривой является окружность?

(2) При введении понятия ломаной и всех определений, связанных с этим понятием, можно воспользоваться

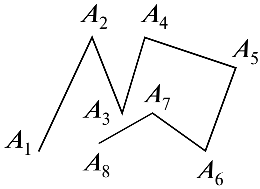


Рис. 50

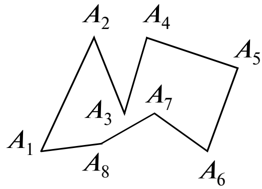


Рис. 51

зоваться рисунком, подобным рисунку 50, и ответить на в о п р о с ы.

1. Назовите вершины ломаной.
2. Назовите звенья ломаной.

③ Знакомство учащихся с понятием внешней и внутренней областей можно провести по рисунку и в ходе устного решения № 178 и 180.

④ Понятие многоугольника и определения его элементов вводятся с опорой на рисунок (рис. 51) и в о п р о с ы.

1. Назовите вершины многоугольника.
2. Назовите стороны многоугольника.
3. Назовите диагонали многоугольника.
4. Назовите углы многоугольника.

Учащиеся хорошо знакомы с треугольниками и четырёхугольниками, другие многоугольники им знакомы меньше, поэтому желательно потратить некоторое время на то, чтобы нарисовать несколько разных многоугольников, число сторон которых больше четырёх. При решении № 191 и 193 такое упражнение очень полезно.

⑤ Для закрепления понятия «периметр многоугольника» полезно решить № 190 (в, г) и 191 с краткой записью на доске и в тетрадях.

⑥ При введении понятия «выпуклые многоугольники» можно воспользоваться плакатом (подготовленными рисунками на доске) (рис. 52). Любой треугольник является выпуклым многоугольником.

⑦ Учащимся уже известны такие фигуры, как окружность и круг, поэтому при их введении можно вос-

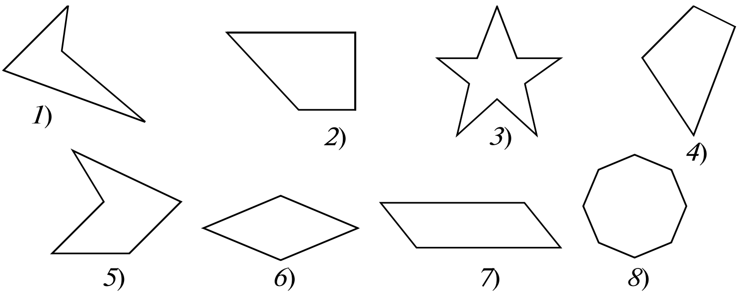


Рис. 52

пользоваться рисунками 81—82У. Чтобы подчеркнуть принципиальное отличие окружности от прямой, предложить учащимся устно выполнить № 194 и 200.

В определении окружности основное внимание уделить тому, что все радиусы одной окружности равны. Это свойство окружности будет активно использоваться в дальнейшем. Одновременно с понятием окружности вводятся понятия, связанные с окружностью: «хорда», «диаметр», «центр окружности», которые также будут широко использоваться.

На применение и закрепление теоремы 2.5 устно решить № 220, используя электронное приложение .

(8) На втором уроке решить наиболее трудные и интересные задачи № 191, 193, 200, 202 устно. Задачи № 223—225 выводят из плоскости в пространство.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — параграф; № 173, 174, 175, 176, 178, 180 (а), 190 (в, г), 191, 220; дома — № 1—10В; № 180 (б), 187, 188, 189, 190 (а, д).

На втором уроке: в классе — № 193, 194, 201, 202, 209, 219, 224; дома — № 205, 210, 211, 213, 222, 223.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Объясните, какая фигура называется ломаной.
2. Объясните, какая область является внешней, а какая — внутренней по отношению к данной фигуре.
3. Какая фигура называется многоугольником?

4. Объясните, что называется периметром многоугольника.

5. Объясните, что называется углом многоугольника.

6. Какой многоугольник называется выпуклым?

7. Объясните, какие треугольники являются выпуклыми многоугольниками.

8. Объясните, какая фигура называется окружностью.

9. Объясните, какая фигура называется кругом.

М 10. Сформулируйте и докажите теорему 2.4.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

Основная часть задач решается устно с выполнением чертежа на доске и в тетради. № 180, 202, 208, 209, 213, 215, 217, 218, 219, 221, 223, 226 и 227.

180. Решение задачи просматривается из рисунков 53 и 54.

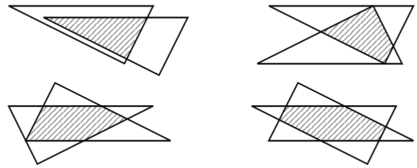


Рис. 53

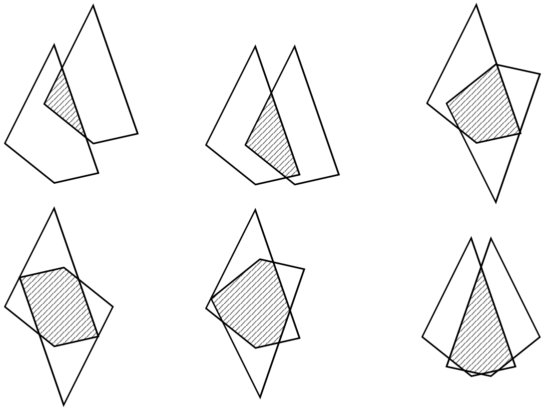


Рис. 54

193. Обозначим стороны четырёхугольника через a, b, c, d, а диагональ через x. Тогда $a + b + c + d = 118$, $a + b + x = 77$, $c + d + x = 83$. Отсюда $x = 21$.

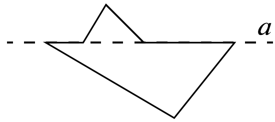


Рис. 55

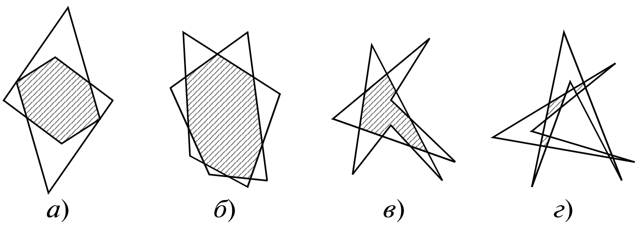


Рис. 56

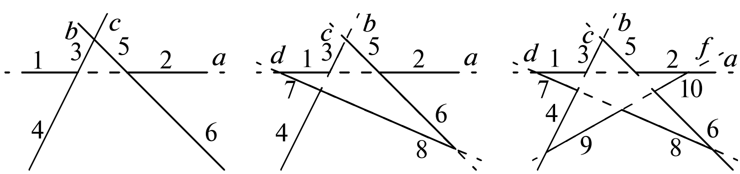


Рис. 57

194, 195, 200. Задачи имеют аналогичные конструктивные решения. Решение № 194 (рис. 55), № 195 (рис. 56), № 200 (рис. 57).

202. Точки *B* и *D* находятся во внешней области, а точка *C* во внутренней. Если мы соединим точки *A* и *B*, то пересечём границу трижды, значит, *A* и *B* расположены в разных частях (аналогично пары *A* и *C*, *A* и *D*).

205. Возможны два объяснения: одна из черепах ошибается, либо они ползут по окружности (или другой замкнутой кривой).

208. Лучи света — прямые. Для того чтобы свет достигал всех уголков комнаты (рис. 58, *а*), нужно выделить все точки, откуда лучи доходят всюду. Это место — общая часть всех углов комнаты. Потому что внутри каждого угла из любой точки можно провести лучи до вершины угла и всех точек этого угла. Для построения общей части всех углов комнаты продолжим стороны комнаты «внутрь», т. е. продолжим стороны углов до пересечения с какой-нибудь стороной (рис. 58, *б*). Они

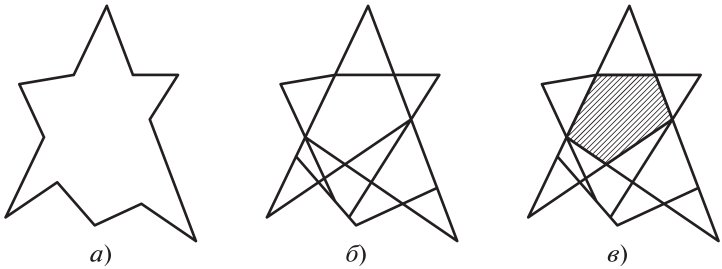


Рис. 58

ограничат многоугольник, внутри которого следует расположить источник света (рис. 58, *в*).

209, 210. Любая комната имеет знакомую для учащихся форму прямоугольника. Нарисуем такой прямоугольник. Теперь подправим его так, чтобы создать «укромные» уголки. Один из возможных вариантов дан на рисунке 59. Решение № 210 аналогично (рис. 60).

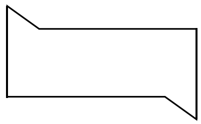


Рис. 59

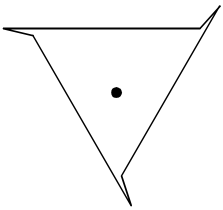


Рис. 60

211. Предположим, что в треугольнике ABC два прямых угла, для определённости пусть это будут $\angle ABC$ и $\angle ACB$. Отсюда следует, что через точку A к прямой, содержащей сторону BC, проведены два перпендикуляра AB и AC, что противоречит теореме 2.4.

212. Противолежащие вершины при центральной симметрии должны переходить друг в друга. Отсюда следует, что диагонали точкой пересечения должны делиться пополам.

213, 214. Число диагоналей, которые выходят из каждой вершины многоугольника, на три меньше числа вершин. Значит, для n-угольника число диагоналей равно $\frac{1}{2}n(n-3)$. Отсюда следуют решения задач.

218, 219. Эти задачи полезно использовать для пропедевтики решения № 221 и 222. Поэтому выполнить симметрию относительно точки O в двух вариантах. В одном точка O взята внутри треугольника (четырёхугольника, окружности), в другом — вне фигуры.

220. Проведите прямую, проходящую через центры окружностей.

221. Построим треугольник, симметричный данному относительно точки O. Стороны двух треугольников пересекутся в некоторых точках. Число точек пересечения может быть 2, 4 или 6, они разбиваются на пары точек, симметричных относительно O. В качестве A и B можно взять любую из этих пар (рис. 61).

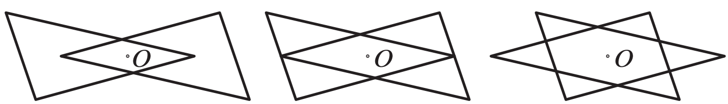


Рис. 61

222. Постройте окружность, симметричную данной относительно O, и проведите хорду через точки пересечения двух окружностей.

223. Решение понятно из рисунка 62.

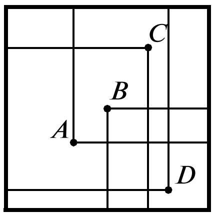


Рис. 62

224. Если у многоугольника есть два центра симметрии P и Q, то центром симметрии будет также и точка P', симметричная P относительно Q. Таким образом, мы можем получать сколько угодно центров симметрии, лежащих на прямой PQ. При этом расстояние между соседними центрами равно длине PQ. Значит, наш многоугольник оказывается неограниченно большим, чего не может быть.

228. Невозможно. Получается, что это сечение пересекает прямую, задаваемую передним ребром пирамиды, в двух точках. Значит, эта прямая обязана принадлежать плоскости сечения. А это не так.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

У ломаной $A_1A_2A_3A_4$: звено $A_1A_2 = 3$ см, звено $A_2A_3 = 4$ см, звено $A_3A_4 = 2$ см. Чему равна её длина?

Контрольная работа № 1

Вместо контрольной работы можно выполнить из рабочей тетради контрольные задания по теме «Основные свойства плоскости».

Вариант 1

1. При некоторой симметрии точка $A(-1)$ переходит в точку $A_1(3)$. Определите, в какую точку отобразится точка $B(4)$ при этой симметрии.

А. 8. Б. 0. В. –2. Г. –4.

2. Определите, сколько решений имеет следующая задача. (Решать задачу не надо.)

«На прямой p отмечены точки A, B и C. Отрезок AB равен 7 см, а отрезок AC равен 4 см. Найдите отрезок BC».

1. Одно. Б. Два. В. Три. Г. Решений нет.

3. При симметрии относительно точки O точки A и B перешли соответственно в точки A_1 и B_1. Определите взаимное расположение прямых AB и A_1B_1.

А. Перпендикулярны.
Б. Пересекаются, но не перпендикулярны.
В. Параллельны.
Г. Такая ситуация невозможна.

4. Две окружности с центрами в точках O и O_1 пересекаются в точках A и B. Радиус окружности с центром в точке O равен 11 см, а радиус окружности с центром в точке O_1 равен 7 см. Найдите периметр четырёхугольника $AOBO_1$.

Ответ: ______________________

5. Угол, равный 70°, разделён двумя лучами, которые проходят между его сторонами, на три неравных угла. Средний угол равен 24°. Найдите угол, образованный биссектрисами крайних углов.

6. Стороны треугольника равны 7, 13 и 16. Через вершину треугольника, противолежащую большей его стороне, проведена прямая, делящая его периметр в отношении 1 : 3. В каком отношении эта прямая делит большую сторону?

Вариант 2

1. При некоторой симметрии точка $A(3)$ переходит в точку $A_1(1)$. Определите, в какую точку отобразится точка $B(6)$ при этой симметрии.

А. 8. Б. 0. В. –2. Г. –4.

2. Определите, сколько решений имеет следующая задача. (Решать задачу не надо.)

«Угол AOB равен 70°, а угол AOC равен 40°. Найдите угол BOC».

А. Одно. Б. Два. В. Три. Г. Решений нет.

3. Отрезки AB и A_1B_1 симметричны относительно прямой a. Определите взаимное расположение прямых AA_1 и BB_1.

А. Перпендикулярны.
Б. Пересекаются, но не перпендикулярны.
В. Параллельны.
Г. Такая ситуация невозможна.

4. Две окружности с центрами в точках O и O_1 и равными радиусами пересекаются в точках A и B. Найдите периметр четырёхугольника $AOBO_1$, если радиус окружности с центром в точке O равен 6 см.

Ответ: ______________________________

5. Угол, равный 70°, разделён двумя лучами, которые проходят между его сторонами, на три неравных угла. Угол, образованный биссектрисами двух крайних углов, равен 47°. Найдите градусную меру среднего угла.

Глава 3
Треугольник и окружность. Начальные сведения (21 ч)

Учебный материал этой главы занимает центральное место во всём курсе геометрии.

Треугольник является одной из основных фигур планиметрии. В главе учащиеся знакомятся также с одним из главнейших методов доказательства теорем и решения задач во всём курсе геометрии — методом признаков равенства треугольников. Доказываются и признаки равенства прямоугольных треугольников. При работе особое внимание должно быть направлено на формирование у школьников умений находить в заданной конфигурации равные треугольники и доказывать их равенство. Признаки равенства треугольников должны усваиваться учащимися в процессе решения задач. При этом закрепляются формулировки теорем и формируются умения доказывать равенство треугольников, т. е. выделять по три соответственно равных элемента данных треугольников и делать ссылки на изученные признаки. Здесь же начинается изучение свойств равнобедренных, равносторонних и прямоугольных треугольников. Использование свойств этих треугольников позволяет расширить класс задач для отработки признаков равенства треугольников — задачи становятся более сложными и интересными, а учащиеся приобретают важное умение анализировать условие задачи, т. е. определять, что требуется для доказательства того или иного утверждения и ссылаться на необходимую теорему или определение.

В процессе изучения данной главы полезно уделить внимание использованию электронного приложения, наглядным средствам обучения и решению задач по готовым чертежам.

При изучении главы 3 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— распознавать на чертежах и изображать на чертежах и рисунках равнобедренные треугольники, равносторонние треугольники; касательные к окружности, касающиеся окружности;

— выделять в конфигурации, данной в условии задачи, равные треугольники, равнобедренные и равносторонние треугольники, касательные к окружности, две касающиеся окружности;

— иллюстрировать и объяснять формулировки признаков равенства треугольников, свойств и признаков равнобедренных треугольников, неравенства треугольника, соотношение между сторонами и углами треугольника, свойства хорд окружности;

— иллюстрировать и объяснять понятия «касание и пересечение прямой и окружности», «взаимное расположение двух окружностей»;

— описывать ситуацию, изображённую на рисунке, и, наоборот, по описанию ситуации выполнять рисунок;

— применять при решении задач на вычисление и доказательство: определения равнобедренного и прямоугольного треугольников; высоты, медианы и биссектрисы треугольника; признаки равенства треугольников, признаки равенства прямоугольных треугольников, свойства и признаки равнобедренного треугольника; свойства хорд окружности, теоремы о касании и пересечении прямой и окружности, о взаимном расположении двух окружностей; неравенство треугольника, соотношение между сторонами и углами треугольника; алгебраический аппарат.

3.1. Равнобедренный треугольник (2 ч)

Содержание параграфа составляет материал, традиционный для любого курса планиметрии. Изучением свойств и признаков равнобедренных треугольников начинается изучение свойств треугольников различных видов. Кроме того, использование свойств равнобедренных и равносторонних треугольников в дальнейшем позволяет расширить класс задач для отработки признаков равенства треугольников.

При изучении § 3.1 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— распознавать на чертежах и изображать на чертежах и рисунках: равнобедренные треугольники, равносторонние треугольники; высоту, медиану и биссектрису треугольника;

— выделять в конфигурации, данной в условии задачи: равнобедренные и равносторонние треугольники, высоты, медианы и биссектрисы треугольников;

— иллюстрировать и объяснять формулировки определений: равнобедренного треугольника, медианы, биссектрисы, высоты треугольника;

— формулировать, иллюстрировать и объяснять формулировки определений: равнобедренного треугольника, медианы, биссектрисы, высоты треугольника;

— формулировать, иллюстрировать и доказывать свойства равнобедренного треугольника, теоремы о диаметре, перпендикулярном хорде, о числе точек пересечения окружности и прямой;

— применять при решении задач на вычисление и доказательство определения: равнобедренного треугольника, медианы, биссектрисы, высоты треугольника; свойства равнобедренного треугольника, теоремы о диаметре, перпендикулярном хорде, о числе точек пересечения окружности и прямой.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

(1) При определении понятий медианы, биссектрисы и высоты треугольника следует добиваться не столько знания формулировок их определений, сколько умения изображать и распознавать на рисунках и применять эти понятия при решении задач. Для закрепления понятий провести работу, используя плакат или готовые рисунки (рис. 63) с ответами на вопросы.

М 1. Среди треугольников, изображённых на рисунке, найдите треугольники, в которых проведены высоты.

М 2. Среди треугольников, изображённых на рисунке, найдите треугольники, в которых проведены медианы.

М 3. Среди треугольников, изображённых на рисунке, найдите треугольники, в которых проведены биссектрисы.

Затем предложить учащимся устно выполнить № 229 и № 1ДЗ (как подготовительную к решению № 240).

(2) Основное внимание при отработке понятия равнобедренного треугольника должно быть направлено не на запоминание учащимися формулировки определения, а на его понимание. Другими словами, если в условии сказано «Треугольник ABC — равнобедренный

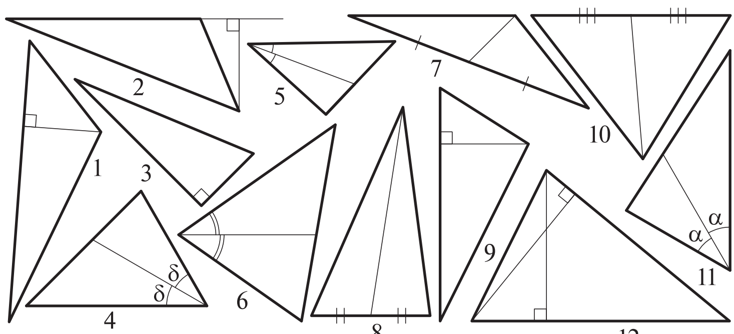


Рис. 63

с основанием AC...», то учащиеся должны уметь выделить равные стороны, т. е. записать $AB = BC$.

На закрепление устно выполнить несколько упражнений типа № 3—6ДЗ. Частным случаем равнобедренного треугольника является равносторонний треугольник, для него верны все свойства равнобедренного треугольника. При этом за основание равностороннего треугольника можно выбрать любую сторону. Или выполнить одно или два задания из серии заданий № 91—93Т.

(3) Перед доказательством теоремы 3.1 полезно вспомнить с учащимися используемое в доказательстве с в о й с т в о фигур, симметричных относительно данной прямой, быть равными и с в о й с т в о биссектрисы угла быть осью симметрии угла, решив з а д а ч и.

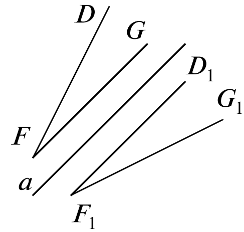


Рис. 64

1. Прямая BD — ось симметрии угла $\angle ABC$, равного 58°. Чему равен $\angle ABD$?

2. Углы $\angle DFG$ и $\angle D_1F_1G_1$ симметричны относительно оси a. $\angle DFG = 23°$. Чему равен $\angle D_1F_1G_1$ (рис. 64)?

(4) Для закрепления свойств равнобедренного треугольника, доказанных в теореме 3.1, выполнить упражнения по готовому чертежу № 8—15ДЗ, № 230 с выполнением чертежа в тетрадях или № 88—89Т, заменив ими два задания из выше приведённых. После решения задачи № 230 можно предложить учащимся задачу 90 (б)Т.

При решении № 233—238 реализуется требование «изображать на чертежах и рисунках треугольники, высоты, медианы и биссектрисы треугольника». Их полезно задать на дом.

(5) Из теоремы 3.1 выводится важное с л е д с т в и е: «Любая хорда окружности является основанием равнобедренного треугольника, противолежащей вершиной которого является центр окружности». На закрепление № 16—18ДЗ.

(6) После доказательства теоремы 3.2 и перед доказательством теоремы 3.3 рекомендуется решить з а д а ч у.

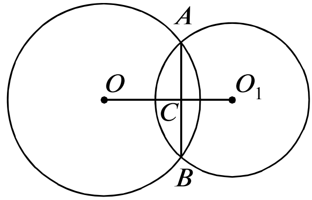


Рис. 65

«Докажите, что общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна линии центров».

Дано: A и B — точки пересечения двух окружностей;
OO_1 — линия центров.

Доказать: $AB \perp OO_1$.

Решение. $\triangle AOB$ и $\triangle AO_1B$ — равнобедренные с общим основанием AB, так как $OA = OB$ и $O_1A = O_1B$, как радиусы одной окружности (рис. 65). Из вершин O и O_1 треугольников AOB и AO_1B опустим перпендикуляры на общее основание AB. По теореме 3.2 основание каждого перпендикуляра делит отрезок AB пополам (точка C). Лучи CO и CO_1 дополняют друг друга до прямой. В противном случае от луча CA и в полуплоскость, определяемую точкой O, и в полуплоскость, определяемую точкой O_1, можно было бы отложить ещё по одному прямому углу, что невозможно. Следовательно, $AB \perp OO_1$, что и требовалось доказать.

Так как доказательство теоремы 3.3 длинное и сложное для восприятия учащихся, лучше провести его полностью учителю.

7 Начиная с этой главы одним из основных объектов изучения становится треугольник, поэтому полезно напомнить учащимся, что для краткости при записях для обозначения треугольника используется знак «$\triangle$».

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — пункты: некоторые понятия, связанные с треугольником, равнобедренный треугольник; № 229, 230, 245, 247 и № 1, 3—6, 8—15ДЗ; дома — № 1—5В, № 233—238, 240, 241, 246, 251.

На втором уроке: в классе — при проверке домашнего задания обсудить № 251; пункты: свойство хорд окружности и пересечение двух окружностей, а также прямой и окружности; № 248, 249; дома — № 6—7В, № 242, 246, 250.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Объясните, что называется медианой треугольника.
2. Объясните, что называется биссектрисой треугольника.
3. Объясните, что называется высотой треугольника.
4. Какой треугольник называется равнобедренным? Как называются стороны равнобедренного треугольника?
5. Сформулируйте и докажите теорему о свойствах равнобедренного треугольника.
6. Каким свойством обладает хорда?
7. Сформулируйте и докажите теорему о диаметре, перпендикулярном хорде.
8. Сформулируйте и докажите теорему о числе точек пересечения окружностей и прямых.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

Основная часть задач параграфа решается устно с выполнением чертежа на доске и в тетради. № 242 и 90.

247. Воспользуйтесь тем, что центр окружности является её центром симметрии.

248, 249. Доказательство утверждений задач — аналогично доказательству теоремы 3.1. В данном равнобедренном $\triangle ABC$ через вершину, противоположную основанию AC, проводится ось симметрии BB_1. При симметрии точка F — середина стороны AB переходит в точку D — середину стороны BC, точка A — в точку C, а отрезок CF в отрезок AD. Следовательно, отрезки CF и AD равны (рис. 66).

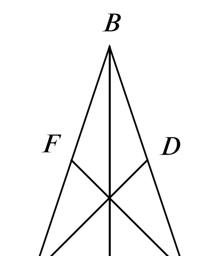


Рис. 66

250. В качестве первой оси симметрии надо взять прямую, проходящую через середину отрезка AA_1 перпендикулярно AA_1. Пусть при этом B переходит в B'. Вторая ось проходит через A_1 перпендикулярно $B'B_1$.

251. Рассмотрим треугольник ABC, в котором $AB = BC$. При симметрии относительно биссектрисы угла B (она же медиана и высота) биссектриса, медиана и высота, выходящие из вершины A, перейдут соответственно в биссектрису, медиану и высоту, выходящие из вершины C. (См. № 114.)

252. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$ с равными сторонами. Опустим из B и D перпендикуляры на диагональ AC. Эти перпендикуляры разделят AC пополам, т. е. образуют одну прямую, перпендикулярную AC.

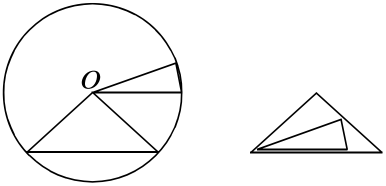


Рис. 67

253. Воспользуемся следствием из теоремы 3.1 (... любую хорду можно рассматривать, как основание равнобедренного треугольника, противолежащая вершина которого расположена в центре окружности). Из рисунка 67 хорошо видно решение задачи.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. В треугольнике ABC, стороны AB и BC которого равны, проведена медиана BD. Найдите её длину, если периметр треугольника ABC равен 50, а периметр $\triangle ABD$ равен 30.

2. В треугольнике ABC медиана BD равна половине стороны AC, $\angle BAD = 64°$, $\angle DCB = 26°$. Найдите $\angle ABC$.

3. В треугольнике ABC проведены медианы AF, CE и BD. Длины отрезков BF, AE и CD соответственно равны 3, 5 и 6. Найдите периметр треугольника ABC.

4. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 7, а основание — 4. Вычислите периметр треугольника.

5. В равностороннем треугольнике сторона равна 7. Вычислите периметр треугольника.

6. В равнобедренном треугольнике ABC боковая сторона AB равна 7, а периметр равен 17. Найдите основание AC.

7. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 5, а периметр равен 17. Найдите боковую сторону BC.

8. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол BAC равен 67°. Определите $\angle BCA$.

9. $\triangle RST$ — равнобедренный. Определите $\angle 1$, если $\angle 2 = 106°$ (рис. 68).

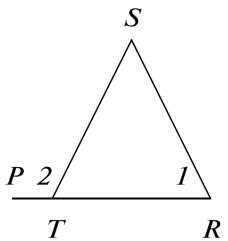


Рис. 68

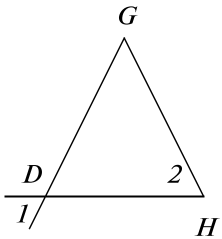


Рис. 69

10. $\triangle DGH$ — равнобедренный. Определите $\angle 2$, если $\angle 1 = 63°$ (рис. 69).

11. Сторона FG — основание равнобедренного треугольника FBG. Докажите, что $\angle BFA = \angle BGD$ (рис. 70).

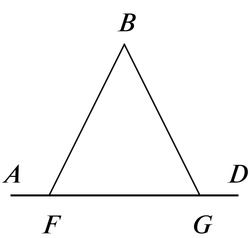


Рис. 70

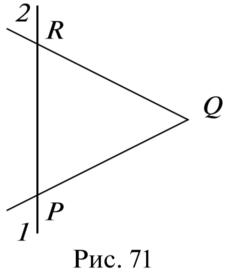


Рис. 71

12. На сторонах угла Q отложены равные отрезки QR и QP. Через точки R и P проведена прямая. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 71).

13. В равнобедренном треугольнике ABC проведена медиана BK. Найдите $\angle ABK$ и $\angle BKA$, если $\angle ABC = 46°$ (рис. 72).

14. В равнобедренном треугольнике ABC проведена медиана BK. Найдите углы $\triangle ABK$, если $\angle ABC = 120°$, $\angle BAK = 30°$.

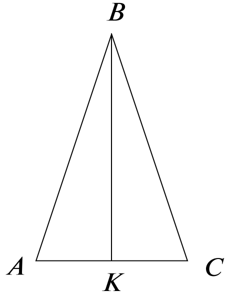


Рис. 72

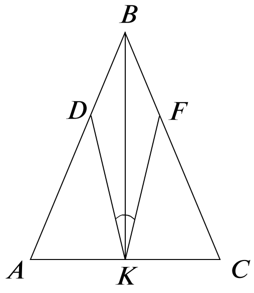


Рис. 73

15. В равнобедренном треугольнике ABC проведена медиана BK. На сторонах AB и BC отмечены точки D и F так, что $\angle BKD = \angle BKF$. Докажите, что $\triangle DKB = \triangle FKB$ (рис. 73).

16. Дана окружность с центром в точке O. По рисунку определите вид $\triangle BOA$ (рис. 74).

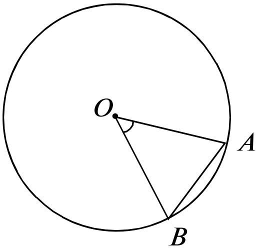


Рис. 74

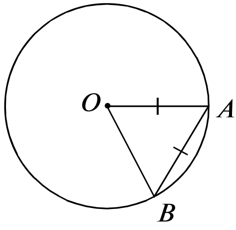


Рис. 75

17. Дана окружность с центром в точке O. По рисунку определите вид $\triangle BOA$, если хорда AB равна радиусу (рис. 75).

18. Радиус окружности с центром в точке O равен 3,5. Треугольник $\triangle BOA$ — равносторонний. Найдите хорду AB (см. рис. 75).

3.2. Признаки равенства треугольников (6 ч)

Изучение темы является начальным этапом формирования у школьников умений доказывать равенство треугольников с опорой на признаки равенства треугольников, т. е. умений устанавливать равенство трёх соответственно равных элементов данных треугольников и делать ссылки на признаки.

Доказательства *первого и второго признаков равенства треугольников* используют один и тот же приём — метод наложения, т. е. совмещения данных равных элементов. Опыт показывает, что изучение второго признака равенства треугольников, используя эту аналогию, приводит к лучшему усвоению обоих признаков равенства треугольников учащимися. Решения задач, в ходе которых проводятся доказательные рассуждения, также способствуют усвоению учащимися первого и второго признаков равенства треугольников. Для формирования умения применять признаки равенства треугольников полезно и достаточно раннее решение задач на оба признака, а не последовательная отработка применения первого признака равенства треугольников, а затем второго.

При изучении § 3.2 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— изображать и распознавать на рисунке пары равных треугольников;

— описывать ситуацию, изображённую на рисунке, и, наоборот, по описанию ситуации выполнять рисунок;

— формулировать, иллюстрировать и объяснять формулировку определения прямоугольного треугольника;

— иллюстрировать, объяснять и доказывать признаки равенства треугольников и признаки равенства прямоугольных треугольников; признаки равнобедренного треугольника;

— применять при решении задач на вычисление и доказательство: определение прямоугольного треугольника; признаки равенства треугольников и признаки равенства прямоугольных треугольников; признаки равнобедренного треугольника.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

(1) Изложение первого признака необходимо начать с формулировки теоремы и выполнения рисунка 76. При этом полезно выделить в треугольниках соответ-

ственно равные элементы более жирным изображением или цветом. Полезно также напомнить учащимся, как с помощью штрихов и дужек обозначаются равные стороны и углы треугольников. Выполнять рисунок 76 по условию теоремы полезно с одновременной краткой записью условия и заключения теоремы.

Дано: $AB = A_1B_1$;
$AC = A_1C_1$;
$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

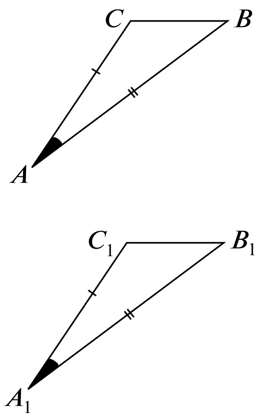


Рис. 76

При доказательстве первого признака после совпадения всех трёх вершин делается вывод о равенстве треугольников. Однако при этом пропускается обоснование того факта, что сторона CB совпадает со стороной C_1B_1, так как через две данные совпавшие точки (C с C_1 и B с B_1) можно провести только одну прямую и, значит, стороны CB и C_1B_1 совпадают.

Два треугольника, данные в условии первого признака равенства треугольников, могут быть расположены либо как на рисунке 104У, либо как на рисунке 77, *а*. Во втором случае отобразим треугольник $A_1B_1C_1$ относительно прямой и получим равный ему треугольник

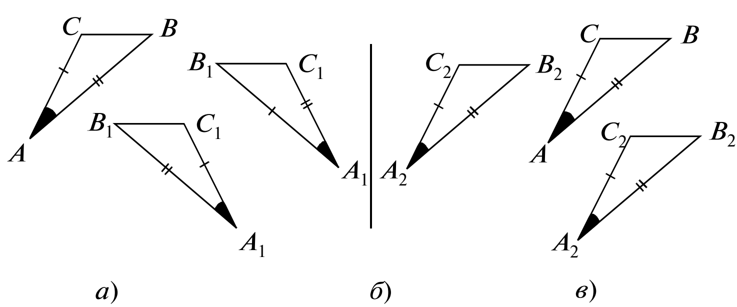


Рис. 77

$A_2B_2C_2$ (рис. 77, *б*). Расположение треугольников ABC и $A_2B_2C_2$ такое же, как и в первом случае (рис. 77, *в*), следовательно, равенство треугольников ABC и $A_2B_2C_2$ доказывается аналогично доказательству равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Отсюда $\triangle A_2B_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ по свойству симметрии и $\triangle ABC = \triangle A_2B_2C_2$ по доказанному, значит, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

2 При решении задач довольно часто из равенства треугольников выводится равенство его элементов, т. е. по трём заданным элементам устанавливается равенство не входящих в эту тройку элементов. Поэтому после доказательства теоремы полезно привлечь внимание учащихся к тому факту, что если доказано $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку равенства треугольников ($AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$; $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$), то отсюда следует, что $CB = C_1B_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1$.

Обучение применению первого признака равенства треугольников желательно начать именно с обучения школьников умению выделять три соответственно равных элемента данных треугольников по готовым чертежам. Для этого можно использовать плакаты такого типа, как на рисунке 78, с использованием вопросов.

1. Определите, на каких рисунках есть равные треугольники.
2. Почему эти треугольники равны?

После работы с плакатом предложить учащимся устно выполнить задания 314 а) и № 1—3ДЗ. Для обучения грамотно выполнять запись решения задачи полезно записать полностью в тетрадях решение задачи 5ДЗ.

Дано: $\triangle ABC = \triangle ADC$.

Доказать: $\triangle AKD = \triangle AKB$.

Решение.

Рассмотрим $\triangle AKD$ и $\triangle AKB$: $AB = AD$, так как $\triangle ABC = = \triangle ADC$, $\angle BAK = \angle DAK$, так как $\triangle ABC = \triangle ADC$, AK — общая сторона. Следовательно, $\triangle AKD = \triangle AKB$ по двум сторонам и углу между ними.

Ответ: $\triangle AKD = \triangle AKB$.

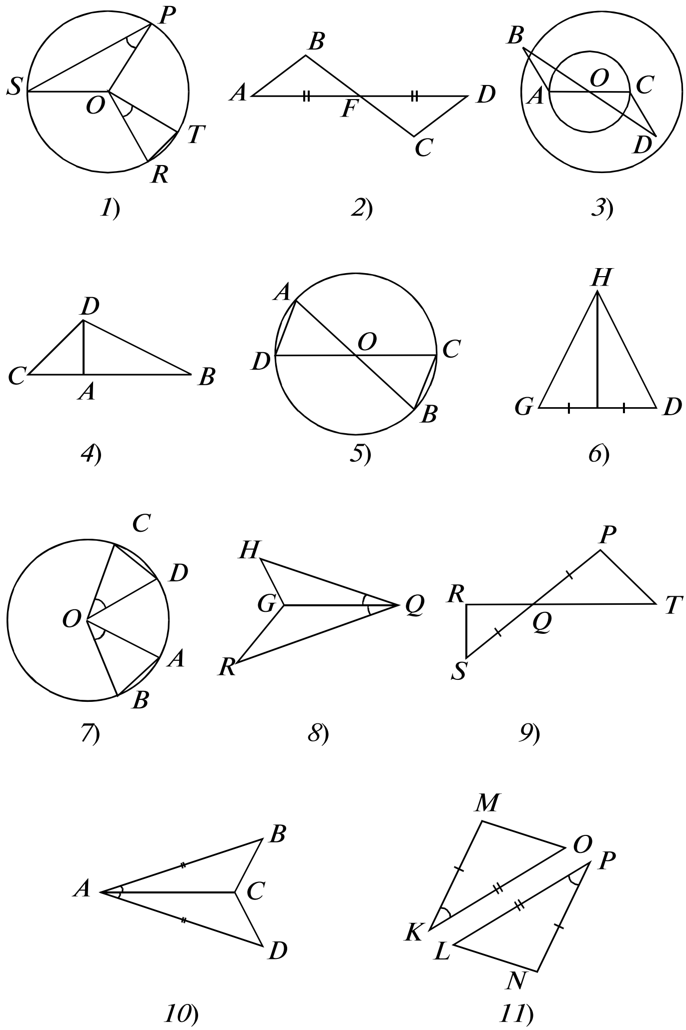


Рис. 78

Поскольку равнобедренный треугольник является треугольником, у которого равны две стороны, то можно вместе с учащимися сформулировать первый признак равенства треугольников для равнобедренного треугольника.

Первый признак равенства треугольников для равнобедренных треугольников

Если боковая сторона и угол при вершине одного равнобедренного треугольника равны боковой стороне и углу при вершине другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство можно предложить учащимся провести дома и выполнить № 100 (а—г)Т, заменив ими два задания учебника.

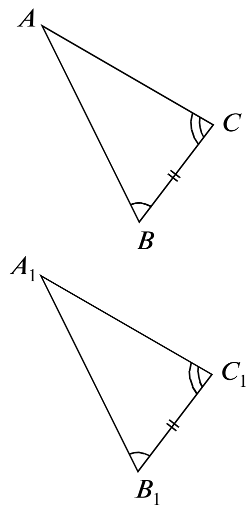


Рис. 79

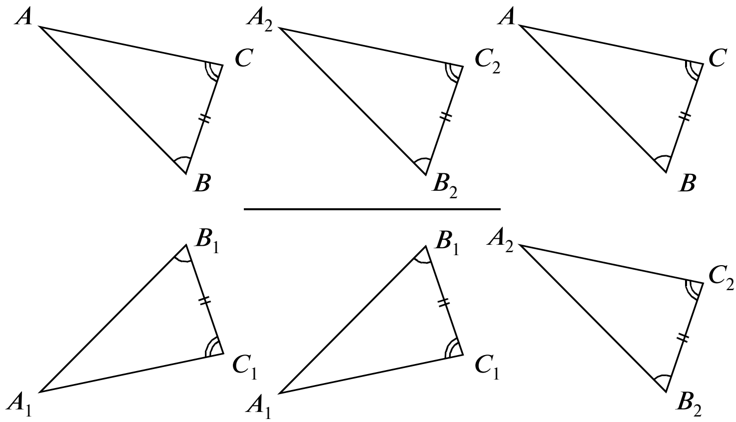
③ Так как доказательство второго признака равенства треугольников аналогично доказательству первого признака, можно провести его фронтально, фактически повторяя доказательство первого признака. Изложение второго признака необходимо начать с формулировки теоремы и выполнения чертежа (рис. 79) по условию теоремы с одновременной краткой записью условия и заключения теоремы.

Дано: $BC = B_1C_1$;
$\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$;
$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

При доказательстве второго признака после совпадения равных углов: луч CA совпадёт с лучом C_1A_1, а луч BA — с лучом B_1A_1, делается вывод о равенстве треугольников. Однако при этом пропускается обоснование того факта, что точка A совпадает с точкой A_1, так как через две данные прямые (CA, она же C_1A_1, и BA, она же B_1A_1) пересекаются только в одной точке.

Два треугольника, данные в условии второго признака равенства треугольников, могут быть расположены либо как на рисунке 105У, либо как на рисунке 80, *а*. Во втором случае отобразим треугольник $A_1B_1C_1$ относительно прямой и получим равный ему треугольник



а) *б*) *в*)

Рис. 80

$A_2B_2C_2$ (рис. 80, *б*). Расположение $\triangle ABC$ и $\triangle A_2B_2C_2$ такое же, как и в первом случае (рис. 80, *в*), следовательно, равенство $\triangle ABC$ и $\triangle A_2B_2C_2$ доказывается аналогично доказательству равенства $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Отсюда $\triangle A_2B_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ по свойству симметрии и $\triangle ABC = \triangle A_2B_2C_2$, по доказанному, а значит, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

4 После доказательства теоремы полезно, как и при изложении первого признака, обратить внимание учащихся, что из равенства $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ следует $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

Обучение применению второго признака равенства треугольников желательно, как и при изложении первого признака, начать с обучения школьников умению выделять три соответственно равных элемента данных треугольников по готовым чертежам. Для этого можно использовать плакаты (рис. 81) и в о п р о с ы.

1. Определите, на каких рисунках есть равные треугольники.
2. Почему эти треугольники равны?

Затем устно выполнить № 272—276. Для обучения грамотного выполнения записи решения задачи запи-

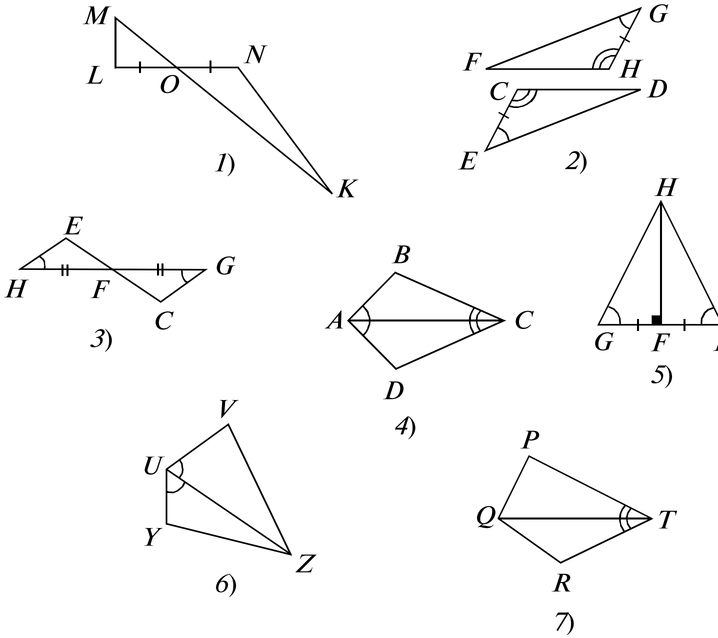


Рис. 81

сать полностью с выполнением чертежа в тетрадях решение задачи 8ДЗ.

Второй признак равенства треугольников, как и первый, можно вместе с учащимися переформулировать для равнобедренных треугольников.

Второй признак равенства треугольников для равнобедренных треугольников

Если основание и угол при основании одного равнобедренного треугольника равны основанию и углу при основании другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство предложить учащимся провести дома.

5 Изложение третьего признака необходимо начать с формулировки теоремы и выполнения чертежа (рис. 82) по условию теоремы с одновременной краткой записью условия и заключения теоремы.

Дано: $AB = A_1B_1$;
$AC = A_1C_1$;
$BC = B_1C_1$.

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

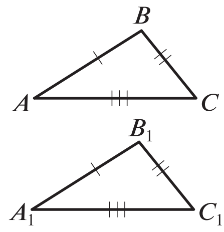


Рис. 82

Так как метод доказательства третьего признака равенства треугольников отличается от метода, которым были доказаны первый и второй признаки, то лучше провести его учителю. Включение учащихся возможно только, когда рассматривается вопрос о числе и расположении точек пересечения двух окружностей (теорема 3.3). На этом фрагменте доказательства следует сконцентрировать внимание, так как он фактически даёт алгоритм построения треугольника, равного данному.

6 Для обучения навыкам применения третьего признака равенства треугольников полезно, как и при изложении первых двух признаков, использовать плакаты

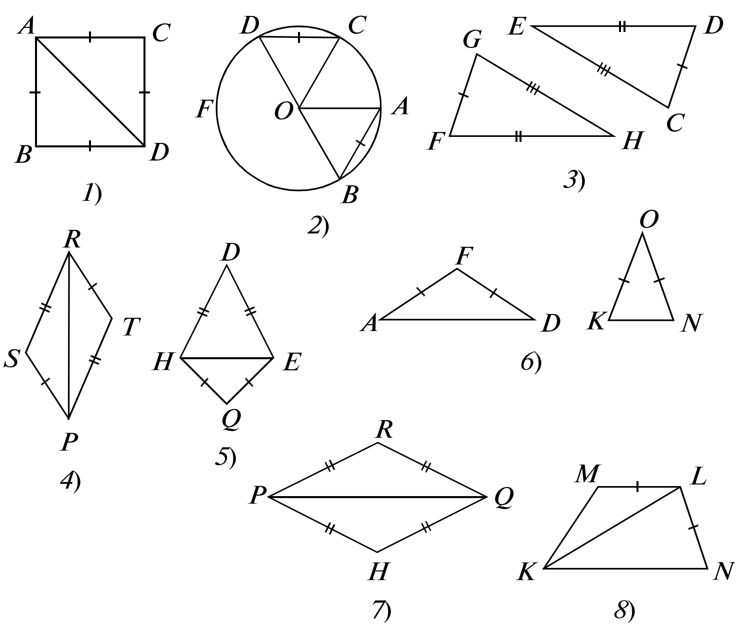


Рис. 83

с изображениями стандартных ситуаций (рис. 83) и в о п р о с ы.

1. Определите, на каких рисунках есть равные треугольники.

2. Почему эти треугольники равны?

Затем решить устно по готовому чертежу № 11—12ДЗ, а при решении № 13ДЗ необходимо выполнить чертёж.

При изучении первого и второго признаков были даны формулировки первого и второго признаков равенства треугольников для равнобедренных треугольников. Теперь вместе с учащимися переформулируем третий признак равенства треугольников для равнобедренных треугольников и сформулируем признак равенства равносторонних треугольников.

Третий признак равенства
равнобедренных треугольников
Если основание и боковая сторона одного равнобедренного треугольника равны основанию и боковой стороне другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны.

Признак равенства равносторонних треугольников
Если сторона одного равностороннего треугольника равна стороне другого равностороннего треугольника, то такие треугольники равны.

Для отработки № 101—105Т, заменив ими часть заданий из дополнительных задач.

(7) Решение. ***Задачи*** параграфа дают ещё один «признак равенства треугольников» при условии, что равные углы лежат против одной из пар равных сторон и при этом не являются острыми. Для того чтобы доказать, что утверждение «не имеет места быть», достаточно привести опровергающий пример. После этого можно провести исследование: в каком случае (при каких дополнительных условиях) условие задачи выполняется. Затем решить № 297.

(8) В учебнике в качестве основного признака равенства прямоугольных треугольников сформулирован признак по катету и гипотенузе и сделано замечание о равенстве прямоугольных треугольников по двум катетам. Признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам желательно доказать фронтально

вместе с учащимися с записью условия и выполнением чертежа на доске. На закрепление № 15ДЗ.

(9) Перед доказательством признаков равнобедренного треугольника желательно повторить определение и свойства равнобедренного треугольника. На закрепление по готовому чертежу № 15—16ДЗ и № 281 с выполнением чертежа в тетрадях.

(10) Подводя итоги изучения темы «Признаки равенства треугольников», обратить внимание учащихся на следующее: если по трём каким-то элементам можно построить единственный треугольник, то имеет место и соответствующий признак равенства треугольника по этим же трём элементам.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — первый признак равенства треугольников; № 260, 264, 285, 314 (а), № 1—3, 5ДЗ; дома — № 1—2В, № 255, 257, 261, 265, 282, 284, доказательство первого признака равенства треугольников для равнобедренных треугольников.

На втором уроке: в классе — второй признак равенства треугольников; № 268, 270, 272—276, 302, № 8ДЗ; дома — № 3В, № 269, 271, 273, 274, 283, 300, 303, доказательство второго признака равенства треугольников для равнобедренных треугольников.

На третьем уроке: в классе — третий признак равенства треугольников; № 275, 288, 297, 314 (г) и № 11—13ДЗ; дома — № 4—5В, № 276, 289, 290, 298, доказательство третьего признака равенства треугольников для равнобедренных треугольников.

На четвёртом уроке: в классе — пункты: прямоугольный треугольник, признак равенства прямоугольных треугольников, признаки равнобедренного треугольника; № 293, 296, 301 и № 14—16ДЗ; дома — № 6—8В, № 291, 294, 304, 314 д), 315, 316.

На пятом уроке: в классе — провести обобщение и систематизацию знаний учащихся, № 280, 286, 287, 296, 307, 317, 319; дома — № 308.

На шестом уроке: в классе — КР2; дома — № 292 и 306.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Объясните, какие фигуры называются равными.

2. Сформулируйте и докажите первый признак равенства треугольников.

3. Сформулируйте и докажите второй признак равенства треугольников.

4. Сформулируйте и докажите третий признак равенства треугольников.

5. Сформулируйте и докажите теорему 3.4.

6. Какой треугольник называется прямоугольным? Как называются стороны прямоугольного треугольника?

7. Сформулируйте признаки равенства прямоугольных треугольников.

8. Сформулируйте и докажите признаки равнобедренного треугольника.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

Основная часть задач параграфа решается устно с выполнением чертежа на доске и в тетради. № 255, 296 и 304 .

287. Решение задачи становится очевидным после правильного выполнения чертежа (рис. 84). $\triangle B_1BM = \triangle BB_1A$ (первый признак). Значит, $\angle MB_1B = \angle ABB_1 = \angle CBB_1$; $\triangle BKB_1$ — равнобедренный.

288. При решении задачи сделать два варианта чертежа: первый угол при вершине — острый, второй тупой.

289. Треугольники AOB, BOC, COD и DOA равны по первому признаку равенства. Из равенства треугольников следует $AB = BC = CD = DA$ и равенство соответствующих углов. В каждом треугольнике углы, прилежащие к сторонам AB, BC, CD и DA, равны. Отсюда следует равенство углов четырёхугольника (рис. 85).

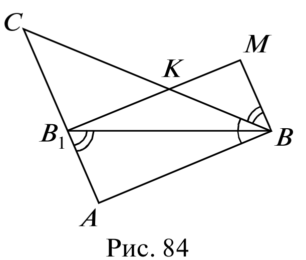


Рис. 84

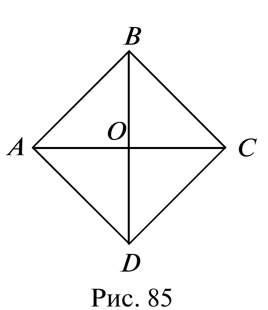


Рис. 85

290. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник с равными сторонами и равными углами. Тогда $\triangle ABC = \triangle BCD$. Значит, $AC = BD$, т. е. диагонали равны. Обозначим через M точку пересечения диагоналей. В равнобедренном треугольнике ABC отрезок BM — биссектриса. Поэтому $\angle BMA = \angle BMC = 90°$. Заметим, что перпендикулярность диагоналей следует из решения задачи № 249.

291. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ равны AB и CD, BC и AD, M — точка пересечения диагоналей четырёхугольника. $\triangle ABC = \triangle CDA$ (третий признак). Значит, $\angle CAD = \angle BCA$ (или $\angle MAD = \angle BCM$). Так же докажем, что $\angle MDA = \angle MBC$ (из равенства $\triangle BDA$ и $\triangle DBC$). Треугольники MDA и MBC равны по второму признаку, т. е. $MD = MB$, $MA = MC$.

292, 293. Решение задачи № 292 следует из метода доказательства третьего признака равенства треугольников, так как он фактически даёт алгоритм построения треугольника, равного данному. А решение задачи № 293 следует из построения треугольника, равного данному.

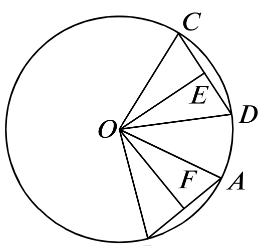


Рис. 86

294. При решении задачи воспользуемся свойствами равнобедренного треугольника и следствием из теоремы 3.1, отсюда $OE = OF$. Откуда и следует утверждение задачи (рис. 86).

295. Перед решением задачи № 295 решить № 126Т.

296. Имея угол в 19°, можно строить любой угол величиной $n - 19°$, где n — целое число. Отсюда $19 \times 19° = 361° = 360° + 1°$.

297. В $\triangle ABK$ биссектриса угла A перпендикулярна стороне BK. Значит, $AK = AB = 4$, $KC = 7 - 4 = 3$. Точно так же найдём $CM = CK = 3$, $BM = 5 - 3 = 2$, $BP = BM = 2$, $AP = 2$.

298. $AK = 5$, $BK = 2$. (Точка K находится на продолжении стороны AB за точку B.) Решение аналогичное решению задачи № 297.

299. Обозначим $AK = AM = x$, тогда $CM = CL = 7 - x$, $BK = BL = 6 - (7 - x) = x - 1$. Поскольку $BK + KA = 5$, то $(x - 1) + x = 5$, откуда $x = 3$. Значит, $AK = AM = 3$, $BK = BL = 2$, $CL = CM = 4$.

301. При решении задачи достаточно привести контрпример: известные учащимся квадрат и ромб, которые можно получить путём симметрии равнобедренного треугольника относительно основания.

306. В задаче № 248 § 3.1 доказано, что в равнобедренном треугольнике медианы пересекаются в одной точке. Теперь можно доказать, что медианы равностороннего треугольника делят его на 6 равных треугольников. Углы этих треугольников с вершиной в точке пересечения медиан равны между собой и равны 60°.

309. Пусть M — середина стороны AC, $\triangle CMP = \triangle AMB$ (второй признак: $CM = MA$, $PM = MB$, $\angle CMP = \angle BMA$). Значит, $\angle MCP = \angle MAB = 52°$. Треугольник BCK — равнобедренный, $BC = CK$; AC — биссектриса угла BCK, $\angle ACK = \angle BCA = 44°$. Теперь найдём угол PKC: $\angle PKC = \angle PCA - \angle KCA = 52° - 44° = 8°$.

312. Рассмотрим случай г). $\triangle ABD$ и $\triangle CDB$ равны в силу второго признака. Следовательно, $BA = CD$, $AD = BC$. Теперь получаем, что $\triangle BAD = \triangle CDA$ (первый признак). Следовательно, $BD = CA$. И, наконец, $\triangle BAD = \triangle ABC$ (третий признак).

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Луч O является биссектрисой угла BAC. На сторонах угла BAC отложены равные отрезки AB и AC. Докажите равенство треугольников BAD и CAD (рис. 87).

2. В $\triangle BAD$ и $\triangle CDA$ стороны BD и AC, а также углы ADB и DAC — равны. Докажите равенство треугольников BAD и CDA (рис. 88).

3. Даны две концентрические окружности, AC и BD — диаметры этих окружностей. Докажите равенство треугольников BOA и DOA (рис. 89).

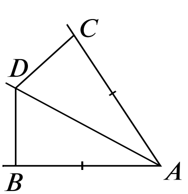


Рис. 87

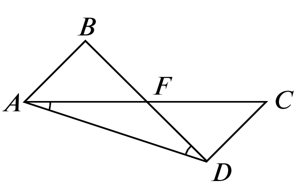


Рис. 88

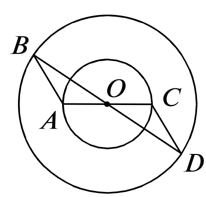


Рис. 89

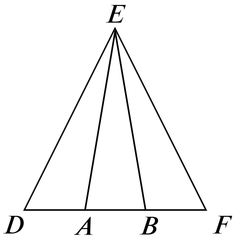


Рис. 90

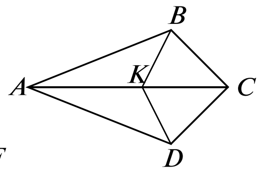


Рис. 91

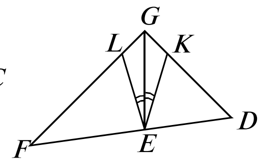


Рис. 92

4. На рисунке 90 треугольники DEA и FEB равны. Докажите, что треугольник AEB — равнобедренный.

5. Докажите, что если треугольники ABC и ADC равны, то равны и треугольники AKD и AKB (рис. 91).

6. В треугольнике FGD проведена биссектриса GE угла FGD. Докажите равенство треугольников LEG и KEG, если $\angle LEG = \angle KEG$ (рис. 92).

7. Докажите равенство треугольников BAC и DCA, если $\angle CAB = \angle ACD$ и $\angle CAD = \angle ACB$ (рис. 93).

8. По разные стороны от прямой AB отмечены точки C и D так, что луч AB является биссектрисой угла DAC, а луч BA — биссектрисой угла DBC. Докажите равенство треугольников ADB и ACB.

9. По одну сторону от прямой AB отмечены точки C и D так, что $\angle CAB = \angle DBA$ и $\angle DAB = \angle CBA$. Докажите равенство отрезков AC и BD.

10. На продолжении сторон равностороннего треугольника ABC отложены равные отрезки AA_1, BB_1, CC_1. Определите вид треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 94).

11. Докажите равенство треугольников BAC и DAC, если стороны AB и AD, BC и DC соответственно равны (рис. 95).

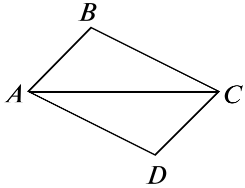


Рис. 93

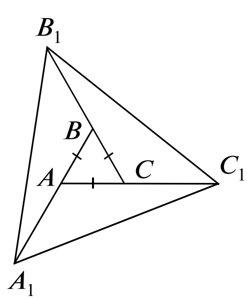


Рис. 94

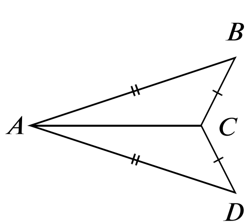


Рис. 95

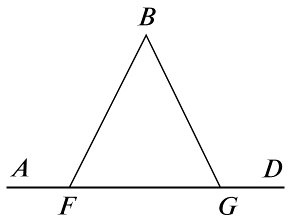


Рис. 96

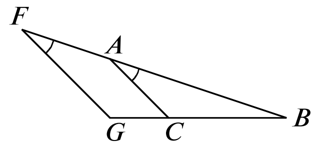


Рис. 97

12. Стороны AB и BC треугольника BAC соответственно равны сторонам CD и DA треугольника DCA. Определите градусную меру угла ABC, если $\angle CDA = 127°$ (см. рис. 93).

M **13.** Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена точка O так, что $AO = BO = CO$. Докажите, что $\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle AOC$.

14. Докажите, что если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника равны соответствующим катету и острому углу другого прямоугольного треугольника, то треугольники равны.

M **15.** В треугольнике FBG $\angle BFA = \angle BGD$. Докажите, что $\triangle FBG$ — равнобедренный (рис. 96).

M **16.** В треугольнике FBG: $FG = BG$, $\angle BFG = \angle BAC$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный (рис. 97).

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. В треугольниках ABC и $A'B'C'$ стороны BC и $B'C'$ равны, $\angle ACB = \angle A'C'B'$. Кроме того, биссектрисы CD и $C'D'$ тоже равны. Сделайте рисунок и сравните длины сторон AC и $A'C'$.

А. $AC > A'C'$. Б. $AC = A'C'$. В. $AC < A'C'$.

2. В треугольниках ABC и CDA (рис. 98) $AD = BC$, $AB = DC$. Определите, в силу какого признака равенства треугольников треугольники ABC и CDA равны.

А. По двум сторонам и углу между ними.
Б. По стороне и прилежащим к ней углам.
В. По трём сторонам.

3. В разных полуплоскостях относительно прямой AB отмечены точки C и D так, что $AD = BC$, $\angle DAB =$

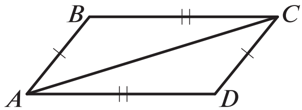


Рис. 98

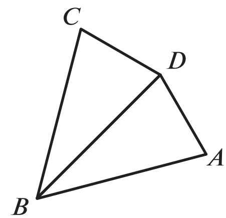


Рис. 99

$= \angle CBA$. Найдите длину отрезка AC, если $AD = 14$ см, $BD = 17$ см.

Ответ: ______________________________

4. Треугольники BDC и BDA (рис. 99) равны. Определите, в каком отношении луч BD делит угол CBA.

Ответ: ______________________________

5. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

Вариант 2

1. В треугольниках ABC и MKP стороны AC и MP равны, а также равны медианы, проведённые из вершин B и K соответственно. Сделайте рисунок и сравните длины сторон BC и KP.

А. $BC > KP$. Б. $BC = KP$. В. $BC < KP$.

2. Отрезок AC — биссектриса угла BAD (рис. 100). В треугольниках ABC и ADC $\angle BCA = \angle DCA$. Определите, в силу какого признака равенства треугольников треугольники ABC и CDB равны.

А. По двум сторонам и углу между ними.

Б. По стороне и прилежащим к ней углам.

В. По трём сторонам.

3. На сторонах угла A отмечены точки B и D так, что $AB = AD$. Точка C лежит на биссектрисе угла BAD. Най-

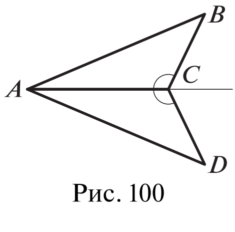


Рис. 100

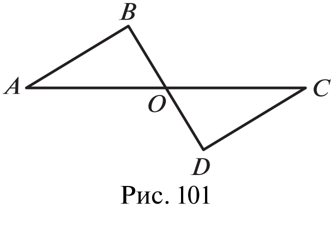


Рис. 101

дите длину отрезка CB, если $CD = 8$ см, $AC = 11$ см. Сделайте рисунок.

Ответ: ______________________________

4. Треугольники ABO и CDO (рис. 101) равны. Определите, в каком отношении точка O делит отрезок BD.

Ответ: ______________________________

5. Докажите равенство треугольников по углу, биссектрисе этого угла и стороне, прилежащей к этому углу.

3.3. Неравенства в треугольнике. Касание окружности с прямой и окружностью (3 ч)

Содержание параграфа составляет материал, являющийся традиционным для курса планиметрии — соотношение между сторонами и углами треугольника, неравенство треугольника, определение касательной и теорема о перпендикулярности радиуса и касательной.

Теоретический материал этого параграфа значительно расширяет геометрические возможности учащихся.

При изучении § 3.3 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— распознавать на чертежах и изображать на чертежах и рисунках внешний угол треугольника, касательной к окружности;

— описывать ситуацию, изображённую на рисунке, и, наоборот, по описанию ситуации выполнять рисунок;

— выделять в конфигурации, данной в условии задачи, внешний угол треугольника, касательную к окружности;

— иллюстрировать и объяснять формулировки внешнего угла треугольника, касательной к окружности;

— иллюстрировать, объяснять и доказывать неравенства треугольника, соотношения между сторонами и углами треугольника, теорем: о внешнем угле треугольника, теоремы 3.7, 3.8;

— иллюстрировать и объяснять понятия внутреннего и внешнего касания двух окружностей;

— применять при решении задач на вычисление и доказательство определения: внешнего угла треугольника, касательной к окружности; неравенства треугольника, соотношения между сторонами и углами треугольника, теоремы о внешнем угле треугольника.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА ПАРАГРАФА

1 Введя определение внешнего угла треугольника, необходимо предложить учащимся несколько упражнений на его распознавание и построение. Поскольку внешний угол — это угол, смежный с внутренним, то его построение сводится к построению луча, дополнительного к лучу с началом в вершине треугольника, т. е. к продолжению стороны треугольника за его вершину. При этом следует обратить внимание на то, что при каждой вершине треугольника можно построить два внешних угла, они представляют собой пару вертикальных углов и, значит, равны между собой.

Упражнения на отработку понятия внешнего угла треугольника.

1. Назовите внешние углы при вершинах A и F треугольника ADF (рис. 102, *а*).

2. Назовите внешние углы при вершине F треугольника DFB (см. рис. 102, *а*).

3. Назовите внешние углы при вершинах G и F треугольника FBG (рис. 102, *б*).

4. Назовите внешние углы при вершине O треугольника AOD (рис. 102, *в*).

В учебнике на отработку понятия внешнего угла треугольника рекомендуются задачи № 320—326. Ими можно заменить предложенные выше упражнения.

2 В доказательстве теоремы 3.5 о внешнем угле треугольника используется известный приём: продолжение медианы за точку пересечения медианы со стороной,

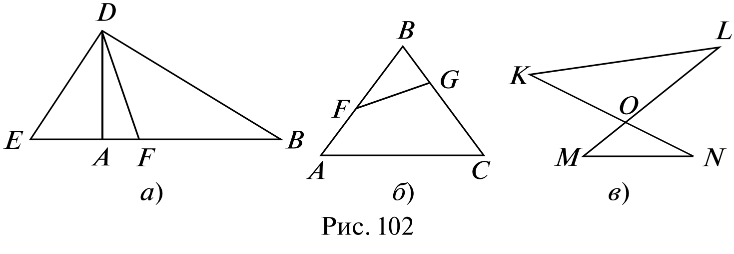


Рис. 102

к которой она проведена, и определение внешнего угла треугольника. Затем устно решить № 1—2ДЗ и № 328.

(3) Из теоремы о внешнем угле треугольника непосредственно следует теорема 3.6. Формулируя теорему 3.6, следует обратить внимание учащихся на то, что в ней содержится два утверждения — прямое: «против большей стороны лежит больший угол» и обратное ему: «против большего угла лежит большая сторона».

Затем напомнить учащимся, что в равнобедренном треугольнике против равных сторон лежат равные углы и против равных углов лежат равные стороны, и устно выполнить следующие упражнения.

М 1. В $\triangle ADF$ $\angle A < \angle D < \angle F$. Назовите в порядке убывания стороны треугольника.

М 2. В $\triangle ADF$ $AD < DF < AF$. Назовите в порядке возрастания углы треугольника.

Затем устно решить № 4, 7ДЗ с выполнением чертежа на доске и № 136, 138—144Т, № 356 с записью решения в тетради. Полезно показать решение № 143 («парадоксальная» задача).

(4) Теорема 3.7 является прямым следствием из теоремы 3.6. Рассмотрев доказательство теоремы 3.7, полезно заметить, что наиболее удобной для использования в дальнейшем формулировка «Если к прямой из одной точки проведены перпендикуляр и наклонная, то перпендикуляр меньше любой наклонной», которая также приведена в учебнике. Обратимся к рисунку 145У: AB — перпендикуляр, AC — наклонная, а $\triangle ABC$ — прямоугольный, для которого AB — катет, а AC — гипотенуза. Значит, для прямоугольного треугольника справедливо утверждение: «В прямоугольном треугольнике любой катет меньше гипотенузы». Рассмотрев вопрос о неравенстве второго катета и гипотенузы, можно предложить учащимся в качестве домашнего задания.

В дальнейшем изучении курса важное место займёт следующее утверждение: «Перпендикуляр, опущенный из точки на прямую, является кратчайшим путём от точки к прямой». Поэтому на этот факт следует обратить внимание учащихся.

(5) Данное в учебнике определение касательной к окружности носит конструктивный характер. Сначала, как следствие из теоремы 3.7, обосновывается существование прямой, имеющей единственную общую точку с окружностью, а затем вводится определение касательной к окружности. В результате получаем классическую теорему геометрии о касательной к окружности.

Основное внимание при отработке понятия касательной к окружности должно быть направлено не на запоминание учащимися формулировки определения, а на его понимание. Другими словами, учащиеся должны при решении задач понимать, что наличие в условии задачи термина «касательная к окружности» означает существование перпендикулярного ей радиуса.

На закрепление понятия — устно № 334.

(6) В учебнике приведены два обоснования неравенства треугольника: с одной стороны, оно является прямым следствием из понятия кратчайшего пути, с другой — следует из теоремы 3.7.

Неравенство треугольника находит широкое применение при решении задач. Подтверждением этого служит система упражнений к данному параграфу.

Для закрепления понятия — № 12—13ДЗ и № 341 а).

(7) В последнем пункте данного параграфа заканчивается рассмотрение вопроса о взаимном расположении двух окружностей. Затем вводится понятие касающихся окружностей и рассматривается вопрос о расстоянии между их центрами. Здесь полезно вспомнить теорему 3.3 и свойство хорд окружности.

На закрепление этого понятия — устно № 14ДЗ, задачу № 361 и № 155—159Т. В этих задачах рассматриваются дополнительные свойства касающихся окружностей и касательной к окружности, которые будут полезны в дальнейшем.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — пункты: теорема о внешнем угле треугольника, неравенство между сторонами и углами треугольника, свойство перпендикуляра; № 320—323, 328, 356, № 1, 2, 4, 7, 9, 10ДЗ; дома — № 1—9В, № 324—326, 329, 330, 332, 333.

На втором уроке: в классе — пункты: неравенство треугольника, касание двух окружностей, № 331 (а), 334, 341 (б, в), 345 (а), 354, 355 (б) и № 6—8, 10, 14ДЗ; дома — № 10—11В, № 331 (б), 335, 339, 345 (б), 355 (а).

На третьем уроке: в классе — № 347, 350, 360, 362, 365; дома — № 348, 353, 361.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Какой угол называется внешним углом треугольника?
2. Сформулируйте и докажите теорему о внешнем угле треугольника.
3. Сформулируйте и докажите теорему 3.6.
4. Объясните, что такое наклонная.
5. Объясните, что такое проекция точки на прямую.
6. Сформулируйте и докажите теорему 3.7.
7. Объясните, что такое касательная к окружности.
8. Объясните, что такое кратчайший путь.
9. Сформулируйте теорему 3.8.
10. Сформулируйте неравенство треугольника.
11. Объясните, какие окружности называются касающимися. Как определяется расстояние между центрами двух касающихся окружностей?

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

Основная часть задач этого параграфа решается устно с выполнением чертежа на доске и в тетради. № 356 и 364.

346. Пусть D — некоторая точка окружности. Рассмотрим треугольник ADO. Сторона AD меньше суммы сторон AO и DO и больше разности сторон AO и DO, т. е. $R + a \geqslant AD \geqslant |R - a|$. Отсюда $AB = |R - a|$ и $AC = R + a$.

348. Для любых трёх точек плоскости A, B и C верно неравенство $AB + AC \geqslant BC$, или $AC \geqslant BC - AB = 4 - 3 = 1$. При этом равенство будет, если точки A, B и C лежат на одной прямой, причём точка A между точками B и C. Точно так же $BD \geqslant CD - BC = 5 - 4 = 1$. Значит, $AC + BD \geqslant 1 + 1 = 2$, а по условию $AC + BD \geqslant 2$. Таким образом, $AC = 1$ и $BD = 1$. Отсюда и из условия задачи следует, что точки A, B, C и D лежат на одной прямой, при этом они идут в следующем порядке: C, A, B и D. Значит, $AD = 4$.

349. В силу неравенства треугольника $AC - BC < AB < AC + BC$, или $6 < AB < 8$. А поскольку AB выражается целым числом, то $AB = 7$.

353. Сторона $a + 5b$ больше разности сторон $5a + 6b$ и $3a + 2b$.

$a + 5b > (5a + 6b) - (3a - 2b)$; $a + 5b > 2a + 4b$; $b > a$.

354. Обозначим третью сторону через x, в силу неравенства треугольника $a + b > x > |a - b|$.

355. Наибольшее значение AB всегда равно $a + R + r$. Если окружности пересекаются, то наименьшее значение AB равно 0. Если же одна целиком вне другой, то наименьшее значение AB равно $a - (R + r)$. Если же окружность радиуса r расположена внутри окружности радиуса R, то это значение равно $R - a - r$. а) Наибольшее значение AB равно 15, наименьшее равно 1; б) 15 и 0.

356. Пусть встреча произошла через t ч. Путь Винни-Пуха равен $3t$, путь Пятачка равен $4t$. По неравенству треугольника $3t + 4t \geqslant 1$, значит, $t \geqslant \frac{1}{7}$ ч. Самое меньшее $t = \frac{1}{7}$ ч будет в случае, когда Пятачок и Винни-Пух идут навстречу по прямой. С другой стороны, $3t + 1 \geqslant 4t$, откуда $t \leqslant 1$. Итак, время путешествия не меньше $\frac{1}{7}$ ч, но не больше 1 ч.

359. Проведём в треугольнике ABC медиану AA_1 и продолжим её за точку A_1. Возьмём на продолжении точку D так, что $A_1D = AA_1$. Из равенства треугольников AA_1B и DA_1C (первый признак) получим, что $DC = AB$. По неравенству треугольника $AD < AC + CD$, или $2AA_1 < AC + AB$, $AA_1 < \frac{1}{2}(AC + AB)$.

362. Пусть первая окружность пересекает прямую, проходящую через центры, в точках A и B, а вторая — в точках C и D. Тогда диаметрами искомых окружностей будут отрезки AC, AD, BC и BD. Остаётся лишь пра-

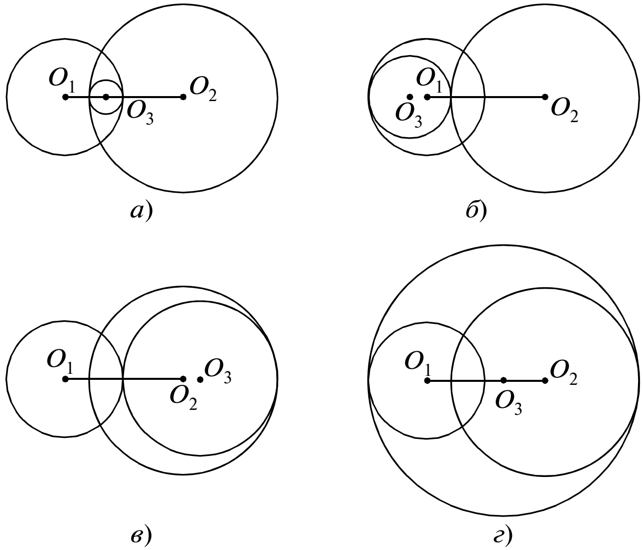


Рис. 103

вильно расставить точки A, B, C и D на прямой. Расположение окружностей для случая в) хорошо видно из рисунка 103.

363. Расположим треугольники ABC и ABD, как на рисунке 104. При этом $AB = AC = AD$ и $\angle BAD >$ $> \angle BAC$. Угол BCD больше угла ACD, а угол BDC меньше угла ADC. Но $\triangle CAD$ равнобедренный и углы ACD и ADC равны. Итак, угол BCD больше угла BDC, а значит, $BD > BC$.

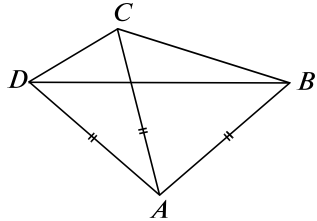


Рис. 104

364. Пусть колодец вырыт в некоторой точке M. Тогда общий путь всех жителей равен $100AM + 200BM +$ $+ 300CM = 100AM + 200BM + 100CM + 200CM =$ $= 100(AM + CM) + 200(BM + CM) \geqslant 100AC + 200BC$. При этом равенство будет лишь в случае, когда точка M совпадает с точкой C, т. е. колодец нужно вырыть в деревне C.

365. Как и в № 355, необходимо рассмотреть все возможные случаи как внешнего, так и внутреннего касания. (Точно такая же ***Задача 3***, но с другими числами рассматривается в § 4.4.)

367. Возьмём самый длинный из отрезков 7,5. Лишь два отрезка из четырёх оставшихся могут составить с ним треугольник. Это отрезки 5 и 2,8. К треугольнику со сторонами 7,5, 5, 2,8 мы можем единственным способом приложить отрезки 1 и 2, чтобы получился четырёхугольник. Их можно приложить лишь к стороне 2,8. Отсюда диагональ равна 2,8.

368. Проверьте, что для чисел a, b и c выполняются неравенства $a + b > c$, $b + c > a$, $a + c > b$.

369. Величины x, y и z можно найти, выразив их через a, b и c. Из первого и третьего равенства получаем $y = a - x$, $z = c - x$. Заменим y и z во втором равенстве $b = y + z$, $b = a - x + c - x$, откуда $x = \frac{a + c - b}{2}$. Затем найдём $y = \frac{a + b - c}{2}$, $z = \frac{b + c - a}{2}$. Так как a, b и c — стороны некоторого треугольника, то найденные значения x, y и z положительны.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

М **1.** Могут ли у треугольника два внешних угла быть прямыми?

М **2.** Могут ли у треугольника два внешних угла быть тупыми?

3. Углы треугольника равны 40° и 80°. Определите, против какого угла треугольника лежит большая сторона.

М **4.** Стороны треугольника равны 8 и 6. Определите, может ли угол, противолежащий стороне, равной 6, быть тупым?

5. В $\triangle ABC$ угол ABC — тупой. Объясните, какая сторона в треугольнике наибольшая.

М **6.** Докажите, что против наименьшей стороны треугольника лежит острый угол.

М **7.** Определите, что больше, боковая сторона или основание равнобедренного треугольника, если один из его углов — тупой.

8. В равнобедренном треугольнике один из углов тупой, одна из сторон равна 15, а другая 10. Чему равно основание равнобедренного треугольника?

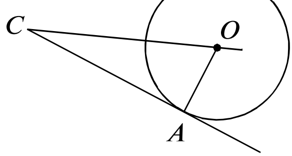


Рис. 105

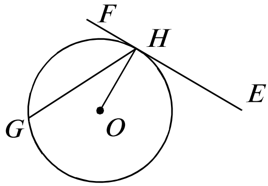


Рис. 106

9. Из точки C к окружности с центром в точке O проведена касательная CA (A — точка касания). Определите вид $\triangle CAO$ (рис. 105).

10. К окружности с центром в точке O проведена касательная FE (H — точка касания). Определите угол GHO, если $\angle GHF = 76°$ (рис. 106).

11. Из точки A к окружности с центром в точке O проведены две касательные AC и AB (B и C — точки касания). Докажите, что треугольники AOC и BOC равны.

12. Определите, существует ли треугольник со сторонами 13 см, 11 см, 4 см.

13. Определите, может ли существовать треугольник, периметр которого равен 18 см, а одна из сторон 14 см?

14. Окружности, радиусы которых равны 5 и 2, касаются. Найдите расстояние между центрами в случае внешнего и внутреннего касания.

Контрольная работа № 2

Вместо контрольной работы можно выполнить контрольные задания по теме «Треугольник и окружность. Начальные соединения» из рабочей тетради.

Вариант 1

1. Радиусы двух окружностей равны 8 см и 5 см, а расстояние между их центрами равно 12 см. Определите, сколько общих точек имеют эти окружности.

А. Одну. Б. Две. В. Три. Г. Ни одной.

2. На рисунке 107 треугольники DEA и FEB равны. Периметр $\triangle DEF$ равен 20 см, а периметр $\triangle DEA$ равен 15 см. Найдите периметр $\triangle BEA$, если его сторона AB равна 2 см.

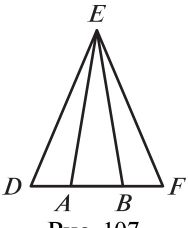


Рис. 107

А. 9 см. Б. 14 см. В. 5 см. Г. 35 см.

3. Длины сторон a и b треугольника равны 10 и 12. Определите наибольшую возможную длину его третьей стороны c, если известно, что она выражается целым числом.

Ответ: ______________________

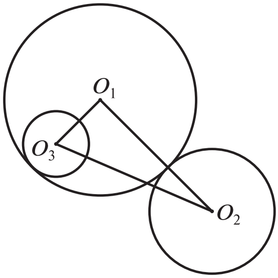


Рис. 108

4. Три окружности с центрами в точках O_1, O_2 и O_3 расположены, как показано на рисунке 108. Радиусы окружностей равны 12 см, 7 см и 5 см, а расстояние между центрами O_2 и O_3 равно 14 см. Найдите периметр треугольника $O_1O_2O_3$.

Ответ: ______________________

5. В $\triangle ABC$ на стороне AC отмечена точка D такая, что $AB = BD = DC$. Отрезок DF — медиана $\triangle BDC$. Найдите $\angle BAC$, если $\angle FDC = 65°$.

6. Вершины четырёхугольника $ABCD$ являются центрами окружностей разных радиусов. Известно, что если у двух окружностей центры находятся в соседних вершинах, то они касаются внешним образом. Найдите сторону AD четырёхугольника $ABCD$, если сторона AB равна 6, сторона BC равна 7, сторона CD равна 9.

Вариант 2

1. В равнобедренном $\triangle ABC$ основание AC на 1 см меньше его боковой стороны AB, а периметр равен 23 см. Найдите основание AC.

А. $8\frac{1}{3}$ см. Б. 7 см. В. 8 см. Г. $7\frac{1}{3}$ см.

2. На рисунке 107 $\triangle DEA$ и $\triangle FEB$ равны. Периметр $\triangle BEA$ равен 14 см, а периметр $\triangle FEA$ равен 15 см. Найдите периметр $\triangle DEF$, если длина отрезка AB равна 2 см.

А. 29 см. Б. 9 см. В. 20 см. Г. 6 см.

3. Длины сторон a и b треугольника равны 10 и 12. Определите наименьшую возможную длину его третьей стороны c, если известно, что она выражается целым числом.

Ответ: ______________________________

4. Три окружности с центрами в точках O_1, O_2 и O_3 касаются друг друга так, как показано на рисунке 109. Радиусы окружностей равны 15 см, 8 см и 6 см. Найдите периметр треугольника $O_1O_2O_3$.

Ответ: ______________________________

5. В $\triangle ABC$ на стороне AC отмечена точка D такая, что $AB = BD = DC$. Отрезок DF — медиана $\triangle BDC$. Найдите $\angle FDC$, если $\angle BAC = 70°$.

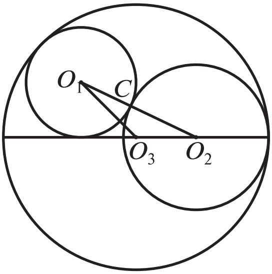


Рис. 109

6. Вершины $\triangle ABC$ являются центрами окружностей разных радиусов, которые попарно касаются внешним образом. Сторона AB равна 6, сторона BC равна 7, сторона AC равна 9. Найдите радиус большей окружности.

Глава 4
Виды геометрических задач и методы их решения (18 ч)

В данной главе систематизируются и обобщаются знания учащихся по курсу 7 класса. Систематизация проводится на основе обсуждения методов и приёмов, используемых при решении геометрических задач и доказательстве теорем.

Начиная с § 4.3 «Кратчайшие пути на плоскости», содержание всех оставшихся параграфов составляет материал, не традиционный для курса планиметрии.

В процессе изучения данной главы полезно уделить внимание использованию электронного приложения, наглядным средствам обучения и решению задач по готовым чертежам.

При изучении главы 4 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— объяснять термины: аксиома, теорема, прямая и обратная теоремы, условие, заключение (утверждение), доказательство, следствие, свойство, признак, контрпример;

— объяснять: метод последовательных шагов, алгебраический метод, метод геометрических мест точек, метод от противного, метод перебора вариантов, метод симметрии;

— решать несложные задачи на построение, применяя основные алгоритмы построения с помощью циркуля и линейки и метод геометрических мест точек;

— применять при решении несложных задач на вычисление и доказательство: свойства и признаки фигур; метод от противного, метод перебора вариантов, метод геометрических мест точек, алгебраический аппарат.

Учащиеся получат возможность ознакомиться с методами решения задач на вычисление и доказательства: методом от противного, методом перебора вариантов и методом геометрических мест точек.

4.1. Геометрические места точек (1 ч)

Содержание параграфа составляет материал, традиционный для курса планиметрии и традиционно плохо усваиваемый учащимся.

«Планируемые результаты обучения основного общего образования» в требованиях к геометрической подготовке учащихся относительно требования к уровню изучения данной темы формулируются следующим образом: «Выпускник получит возможность научиться решать задачи на построение методом геометрического места точек». Значит, тема должна быть изложена на уроке, однако как организовать контроль за усвоением данной темы и в каком объёме требовать от учащихся воспроизведения учебного материала, решать учителю. При этом урок лучше организовать в форме лекции. Основная цель такого урока — познакомить учащихся с примерами геометрических мест точек.

При изучении § 4.1. учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— иллюстрировать и объяснять метод геометрического места точек на примерах геометрических мест точек: окружность есть геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки; серединный перпендикуляр является геометрическим местом точек, равноудалённых от двух данных точек; биссектриса угла есть геометрическое место точек, равноудалённых от сторон угла;

— применять при решении несложных задач на построение метод геометрических мест точек;

— объяснять термин «геометрическое место точек».

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

(1) В учебнике рассматриваются утверждения: окружность есть геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки; серединный перпендикуляр есть геометрическое место точек, равноудалённых от его концов; биссектриса угла есть геометрическое место точек, равноудалённых от сторон данного угла. Все утверждения рекомендуется рассмотреть на одном уроке. При объяснении нового материала полезно опираться на знания учащихся, полученные в процессе предыдущего изучения свойств фигур.

Следует сообщить учащимся, что в формулировках различных задач довольно часто вместо термина геометрическое место точек употребляется термин множество точек. И тот, и другой термин используется в формулировках задач: «геометрическое место точек (множество точек), обладающих данным свойством». Затруднение при разъяснении смысла понятия «геометрическое место точек», возникает в связи с тем, что учащиеся должны понять, что «геометрическим местом точек называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определённым свойством». При этом учащиеся должны чётко понимать, что «фигура, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определённым свойством», предполагает необходимость доказать два утверждения.

1. Все точки данной фигуры обладают указанным свойством.

2. Если некоторая точка плоскости обладает указанным свойством, то эта точка принадлежит данной фигуре.

(2) При изучении пункта «Окружность и круг» § 2.4 была дана рекомендация привлечь внимание учащихся к тому факту, что все радиусы одной окружности равны. Теперь воспользуемся этим свойством для определения окружности как ГМТ.

В учебнике подробно рассматриваются определения серединного перпендикуляра и биссектрисы угла как геометрических мест точек. При объяснении можно также более подробно рассмотреть и определение окружности как ГМТ. «Окружность есть геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки.

1. Любая точка окружности удалена от центра на одно и то же расстояние, равное радиусу. Это следует непосредственно из определения окружности.

2. Пусть точка A находится от точки O на данном расстоянии, равном радиусу R».

Доказательство. Проведём луч OA. На луче от точки O отложим отрезок OA_1, равный R. По определению окружности A_1 лежит на окружности. Отрезки OA и OA_1 имеют равную длину, значит, они равны. Кроме того, они имеют один общий конец — точку O, значит, точки A и A_1 совпадают, т. е. точка A принадлежит окружности.

На закрепление устно выполнить следующие упражнения.

1. Найдите геометрическое место точек M, для которых расстояние до заданной точки A меньше или равно R. [Круг, рисунок 110.]

2. Найдите геометрическое место точек M, для которых расстояние до заданной точки A больше R. [Вся плоскость с вырезанным кругом, рисунок 111.]

Для того чтобы учащиеся лучше поняли определение окружности как ГМТ, можно решить ***Задачу 1***.

(3) Для обоснования решения ***Задачи 1*** используются свойства и признаки равнобедренного треугольника. В развитие этой задачи можно устно решить задачу № 381 а).

(4) Для обоснования решения ***Задачи 2*** используются признак равенства прямоугольных треугольников по

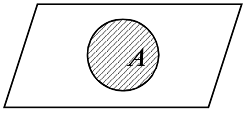


Рис. 110

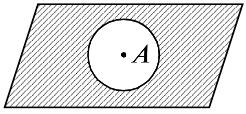


Рис. 111

гипотенузе и катету и свойство биссектрисы угла быть осью симметрии. В развитие этой задачи устно решить задачу № 384.

5 Задача № 163Т аналогична № 381 (использовать для индивидуальных заданий разного уровня сложности и дифференцированной работы с классом).

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На уроке: в классе — параграф; № 381 (а, б), 384, 387; дома — № 1—4В, № 381 (г, д), 382 (а, б, в), 386, 388.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Объясните, что такое геометрическое место точек.
2. Дайте определение окружности, используя понятие ГМТ.
3. Дайте определение серединного перпендикуляра, используя понятие ГМТ.
4. Дайте определение биссектрисы угла, используя понятие ГМТ.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

Решение задач параграфа проводится устно с выполнением чертежа на доске и в тетради. № 384, 386, 387 и 389.

381. а) Проведём серединный перпендикуляр к отрезку AB. Подходят точки той полуплоскости, ограниченной этим перпендикуляром, которая содержит точку A. Точки на серединном перпендикуляре в множество не входят. б) ГМТ состоит из точек, лежащих на окружности с центром в точке A и радиусом $2AB$ или вне этой окружности. в) Отрезок AB, включая концы A и B. г) Построим две окружности с центрами в точках A и B и радиусом AB. Подходят точки внутри первой, но вне второй. (Точки второй окружности, находящиеся внутри первой, подходят. Точки первой — нет.) д) ГМТ состоит из точек, лежащих на серединном перпендикуляре к AB, и двух окружностях с центрами в точках A и B и радиусом AB. При этом точки, лежащие на прямой AB, исключаются (как говорят математики, «выкалываются»). е) Из условия следует, что в $\triangle AMB$ наибольшей является сторона AM, т. е. $AM \geqslant AB$, $AM \geqslant BM$. Первое неравенство означает, что точка M лежит вне или на ок-

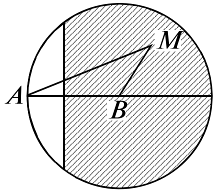


Рис. 112

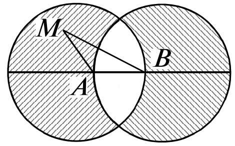


Рис. 113

ружности с центром в точке A и радиусом AB. Второе означает, что точка M лежит в той полуплоскости, задаваемой серединным перпендикуляром к AB, в которой лежит точка B, включая сам этот перпендикуляр. При этом необходимо удалить все точки прямой AB. ж) См. рисунок 112. з) См. рисунок 113.

382. а) См. рисунок 114. б) См. рисунок 115. в) См. рисунок 116. г) ГМТ состоит из одной точки. M — точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AB, BC и CA. д) ГМТ состоит из внутренних точек угла, содержащего точку A, стороны которого лежат на серединных перпендикулярах к отрезкам AB и AC.

384. а) Четыре биссектрисы углов, образованных при пересечении прямых p и q. Эти биссектрисы в совокупности образуют две перпендикулярные прямые. б) Два угла, образованных двумя прямыми — биссектрисами, о которых говорится в пункте а), содержащие прямую p.

385. Биссектрису угла, по сторонам которого движутся указанные точки.

386. Окружность с тем же центром и радиусом 2, а также точка — центр данной окружности.

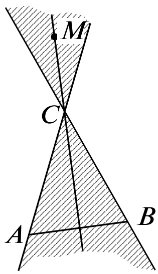


Рис. 114

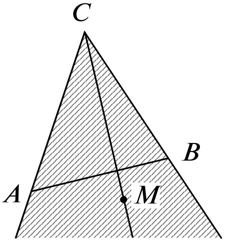


Рис. 115

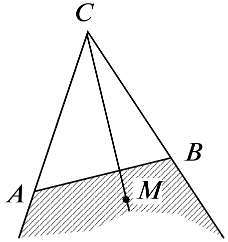


Рис. 116

387. Обозначим данные прямые через a, b и c. Если a, b и c пересекаются в одной точке, то искомое геометрическое место состоит из одной этой точки. Пусть эти прямые пересекаются в трёх различных точках, образуя треугольник. В этом случае геометрическое место состоит из точки пересечения биссектрис этого треугольника.

389. Проведём через точки A и B перпендикуляры p и q к прямой AB. Искомое геометрическое место точек состоит из точек между p и q.

390. Условию удовлетворяют точки прямой AB, находящиеся на целочисленном расстоянии от A, а значит, и от B. Пусть теперь точки A, M и B образуют треугольник и $AM = n$, где n — натуральное число. Тогда из неравенства треугольника следует, что $n - 1 < BM < n + 1$. Значит, $BM = n$. Таким образом, подходят ещё точки серединного перпендикуляра к AB, удалённые от его концов на целочисленное расстояние.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Найдите ГМТ плоскости, равноудалённых от двух данных параллельных прямых. [Прямая, параллельная данным и отстоящая от каждой из них на расстоянии, равном половине расстояния между данными прямыми.]

2. Найдите ГМТ, которые являются центрами окружностей, касающихся данной прямой в данной точке. [Прямая, перпендикулярная данной и проходящая через данную точку. Данная точка не принадлежит ГМТ.]

4.2. Задачи на построение (2 ч)

В параграфе рассматриваются основные задачи на построение, являющиеся традиционными для любого курса планиметрии: построение перпендикуляра к прямой; деление отрезка пополам; построение треугольника, равного данному; построение угла, равного данному; построение биссектрисы угла; построение прямой, параллельной данной; построение касательной к окружности.

При изучении задач на построение с помощью циркуля и линейки рассматривают построения отрезков, лучей, прямых, окружностей и их дуг, углов и треугольников. Каждая из этих фигур может быть однозначно определена заданием конечного числа определяющих её точек:

— отрезок — его концами;

— луч — начальной точкой и одной из его произвольных точек;

— прямая — двумя её произвольными точками;

— окружность — центром и концами её радиуса или центром и какой-нибудь её точкой;

— дуга окружности — её концами и радиусом;

— угол — вершиной и парой произвольных точек на его сторонах;

— треугольник — его вершинами.

Так как определяющие точки каждой фигуры задают её однозначно, то решение любой задачи на построение сводится к построению определяющих точек искомой фигуры.

При решении задач на построение с помощью циркуля и линейки определяющие точки искомой фигуры могут быть получены как точки пересечения двух прямых, двух окружностей или прямой и окружности. Поэтому отыскание условий существования решения задачи сводится, как правило, к отысканию условий пересечения двух прямых, двух окружностей, прямой и окружности, пересечением которых являются искомые определяющие точки фигуры. А при определении числа решений задачи в общем случае следует исходить из того, что две прямые пересекаются в одной точке; две окружности — в двух точках; прямая и окружность — в двух точках.

Когда говорят о задачах на построение, то если не оговорено специально, значит, построение выполняется с помощью циркуля и линейки. С помощью линейки проводят прямую линию через две точки. Математическая линейка односторонняя и не имеет делений. Если отрезок задан линейным размером, необходимо его изобразить с помощью обычной линейки, затем зафиксировать его длину с помощью циркуля и откладывать отрезок полученным раствором циркуля. С помощью циркуля строят окружность с заданным центром и радиусом, при этом радиус может задаваться отрезком или двумя точками, расстояние между которыми равно длине радиуса. Если угол задан градусной мерой, то его следует построить с помощью транспортира, а при построении искомой фигуры использовать алгоритм построения угла, равного данному.

При изучении § 4.2 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— объяснять алгоритмы построения перпендикуляра к прямой; деления отрезка пополам; треугольника, равного данному; угла, равного данному; биссектрисы угла; прямой, параллельной данной; касательной к окружности;

— применять изученные алгоритмы при решении конкретных задач на построение.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

1 Как отмечено в учебнике, целью решения задач на построение является нахождение способа построения заданной в условии задачи фигуры и желательно наиболее экономного. Этой цели подчинена та часть решения, которая носит название «анализ». Предполагая, что задача решена, делают приблизительный чертёж искомой фигуры и пытаются выяснить такие соотношения между данными задачи, которые позволят свести её решение к другим, известным ранее или основным задачам на построение. Целью этапа анализа является составление плана решения. Вторая часть решения — это само построение, которое выполняется соответственно выбранному плану решения. Для того чтобы убедиться в правильности построения, проводится доказательство (на основании известных теорем) того, что построенная фигура обладает требуемыми свойствами.

Вообще говоря, должен быть проведён ещё один этап решения — исследование, где решается вопрос, при каких данных задача имеет решение, сколько решений имеет задача, нет ли каких-либо частных случаев, требующих особого рассмотрения.

Во всех задачах учебника этапы анализа и исследования отсутствуют. Поскольку основные задачи на построение являются сравнительно простыми, то отсутствие анализа при её решении вполне оправдано, однако в учебнике есть задачи, при решении которых проведение анализа обеспечивает построение. При наличии времени учитель может продемонстрировать указанный этап решения на нескольких задачах (см., например, решение задачи № 406 в разделе «Указания к задачам»).

Этап исследования опускается здесь потому, что к данному моменту у учащихся ещё отсутствуют в полном объёме необходимые теоретические знания.

(2) Заметим, что почти во всех задачах на построение фигуры решение в конечном счёте сводится к построению отдельных точек, определяющих её. Инструменты, которыми пользуются при решении задач на построение (циркуль и линейка), позволяют проводить линии — прямые и окружности, а значит, точки строятся, как пересечение двух линий: двух прямых, двух окружностей, окружности и прямой.

Всё выше сказанное диктует настоятельную необходимость провести систематизацию знаний учащихся о взаимном расположении окружностей и прямых.

1) Взаимное расположение прямых (рис. 117). Из первого основного свойства плоскости учащимся известно, что «через любые две точки можно провести прямую и притом только одну»; «любые две различные прямые плоскости пересекаются не более, чем в одной точке» (§ 2.2). Кроме того, учащимся известно, что существуют параллельные прямые, которые не имеют точек пересечения (§ 2.2 и § 2.3, следствие из теоремы 2.4), и перпендикулярные прямые, причём для каждой точки плоскости перпендикулярная прямая к данной прямой — единственна (§ 2.3, теоремы 2.3 и 2.4).

2) Взаимное расположение окружностей и прямых (рис. 118). Очевидно, что возможны случаи, когда окружность и прямая не имеют общих точек; имеют только одну общую точку, т. е. прямая является касательной к окружности (§ 3.3, теорема 3.8); имеют две общие точки, т. е. прямая пересекается с окружностью, причём прямая может проходить через

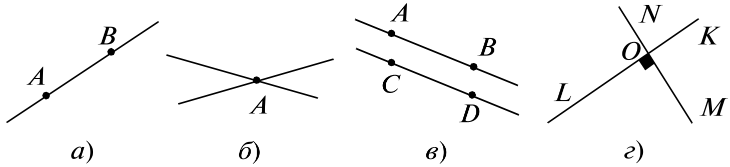


Рис. 117

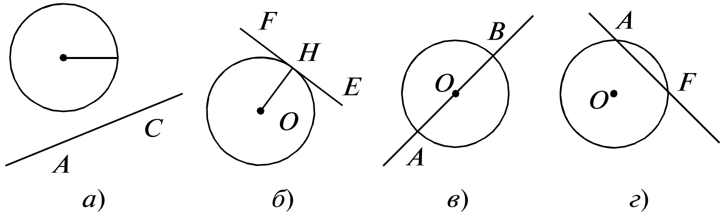


Рис. 118

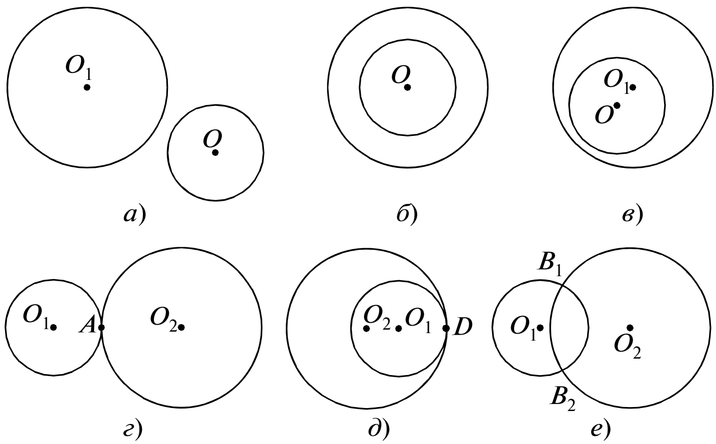


Рис. 119

центр окружности (§ 2.4, теорема 2.5) и не проходить (§ 3.1, теоремы 3.2 и 3.3).

3) Взаимное расположение окружностей (рис. 119). Очевидно, что возможны случаи, когда две окружности не имеют общих точек; имеют только одну общую точку, т. е. касаются (§ 3.3), и общую касательную в этой точке к этим окружностям, причём касание может быть внутренним и внешним; имеют две общие точки, т. е. пересекаются (§ 3.3, теоремы 3.3).

3 Сразу после разбора ***Задачи 1*** (построение перпендикуляра к прямой) полезно выполнить с учащимися следующие построения, используя при этом форму фронтальной работы.

1. Дан треугольник. Постройте одну из его высот.
2. Постройте прямоугольный треугольник по его катетам.

4 Построение середины отрезка основывается на свойствах равнобедренного треугольника: высота равнобедренного треугольника совпадает (является) с медианой. Для закрепления изученного приёма построения после разбора ***Задачи 2*** выполнить с учащимися следующее п о с т р о е н и е, используя при этом форму фронтальной работы.

1. Дан треугольник. Постройте одну из его медиан.
2. Разделите данный отрезок на четыре части.

5 Построение треугольника, равного данному (***Задача 3***), уже рассматривалось в № 292. Доказательство того факта, что построен треугольник, равный данному, следует из третьего признака равенства треугольников. Здесь полезно сделать замечание для учащихся, что в курсе геометрии принято обозначать сторону, лежащую против $\angle A$, через a, против $\angle B$ — через b, против $\angle C$ — через c.

Также полезно показать учащимся, что стороны треугольника могут быть заданы геометрически — данными отрезками a, b и c. Для закрепления изученного приёма построения полезно выполнить с учащимися следующее п о с т р о е н и е, используя при этом форму фронтальной работы.

Постройте равносторонний треугольник по его стороне.

6 Построение угла, равного данному, уже рассматривалось в № 293 § 3.2. Доказательство того факта, что построен угол, равный данному, следует из третьего признака равенства треугольников.

Сразу после разбора ***Задачи 3*** полезно выполнить с учащимися следующие п о с т р о е н и я, используя при этом форму фронтальной работы.

Постройте равнобедренный треугольник по основанию и углу, прилежащему к основанию.

7 Построение биссектрисы угла рассматривается в ***Задаче 4***. Доказательство того факта, что построена биссектриса угла, следует из третьего признака равенства треугольников. На закрепление выполнить с учащимися следующее п о с т р о е н и е, используя при этом фронтальную форму работы.

«Разделите данный угол на четыре части».

8 Построение прямой, параллельной данной и проходящей через данную точку (***Задача 5***), основано на следствиях из теоремы 2.4: первое — «две прямые, перпендикулярные одной прямой, параллельны», второе — для построения прямой, перпендикулярной данной, проходящей через данную точку, надо построить точку, симметричную данной. Доказательство того факта, что построена прямая, параллельная данной, следует из теоремы 2.5. На закрепление алгоритма построения можно выполнить с учащимися следующее построение, используя при этом форму фронтальной работы.

Постройте прямую, параллельную основанию равнобедренного треугольника и проходящую через середину боковой стороны.

(9) Построение касательной к окружности (***Задача 6***) основано на признаке равенства прямоугольных треугольников. На закрепление алгоритма построения можно выполнить вместе с учащимися задачу № 406.

В результате доказательных рассуждений при решении ***Задачи 6*** получены два утверждения: «из данной точки к данной окружности можно провести ровно две касательные» и «полученные касательные равны».

№ 180—182Т аналогичны заданиям параграфа, их использовать для индивидуальных заданий. Определённый интерес представляет № 188Т (решить на уроке).

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — пункты: задачи на построение, построение перпендикуляра к прямой, деление отрезка пополам, построение треугольника, равного данному, и угла, равного данному; дома — № 1—5В, № 391, 401 и 402.

На втором уроке: в классе — пункты: построение биссектрисы угла, построение прямой, параллельной данной, построение касательной к окружности; № 402, 404, 406, 408 (б); дома — № 6—9В, № 396, 397, 405, 408 (а).

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Объясните, что такое задачи на построение.
2. Объясните, как построить перпендикуляр к прямой.
3. Объясните, как построить серединный перпендикуляр.
4. Объясните, как построить треугольник по трём сторонам.

5. Объясните, как построить угол, равный данному.

6. Объясните, как построить биссектрису угла.

7. Объясните, как построить прямую, параллельную данной.

8. Объясните, как построить касательную к окружности.

9. Сколько касательных можно провести из данной точки к данной прямой?

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

При решении задач достаточно сделать картинку, подробная запись решения не обязательна, в некоторых задачах необходимо обосновать правильность построения. № 398, 399, 400 и 401.

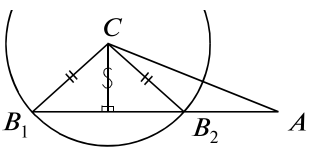


Рис. 120

397. Задача может иметь одно решение (высота равна одной из данных сторон), два решения (рис. 120), ни одного решения (высота больше меньшей стороны).

398. Центр окружности можно взять в любой точке на биссектрисе угла. Радиус равен расстоянию от этой точки до сторон угла.

399. Рассмотрим окружность радиуса R. ГМТ центров окружностей радиуса a, касающихся этой окружности, состоит в случае $R \neq a$ из двух окружностей с тем же центром и радиусами $R + a$ и $|R - a|$. Если $R = a$, то меньшая окружность превращается в точку. Пусть даны две окружности с радиусами R_1 и R_2. Чтобы найти центр окружности радиуса a, касающейся данных, построим для каждой из данных соответствующее ГМТ. Там, где эти места пересекаются, и находится центр искомой окружности. Задача может иметь до восьми решений.

401. *Анализ*. Предположим, что задача решена. Выполним эскиз (рис. 121, *а*). Пусть $\triangle ABC$ — искомый, причём известно, что $BC = a$, $AB = c$, $BM = m$ — медиа-

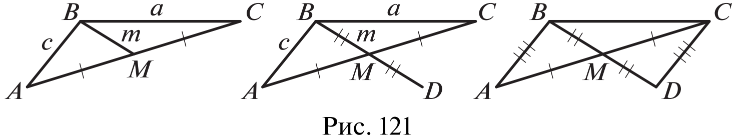


Рис. 121

на, т. е. $AM = MC$. На продолжении медианы за точку M отложим отрезок MD, равный отрезку BM. Из рисунка 121, *б* видно, что в $\triangle BCD$ известны все три стороны: $BC = a$, $CD = c$, $BD = 2m$. Поэтому построение нужно начать с построения $\triangle BCD$, при этом получим две вершины B и C, а затем построим вершину D, отложив на прямой CM отрезок AM, равный отрезку MC. В результате решения получим $\triangle ABC$ (рис. 121, *в*).

402. Построение можно осуществить, например, следующим образом. Пусть A и B — данные точки. Построим две равные окружности с центрами в точках A и B и радиусами немного больше половины AB. Пусть C и D — точки пересечения этих окружностей. Середина CD совпадает с серединой AB. Если CD достаточно маленький отрезок, то, пользуясь циркулем и имеющейся линейкой, можно разделить его пополам и найти середину AB — точку E. Если AE всё ещё больше длины линейки, делим отрезки AE и BE пополам, и т. д.

403. Решение хорошо видно из рисунка 122.

404. Все этапы решения задачи представлены на рисунке 123. Проведём симметрию относительно точки A. Получим точку F и через точки F и A проведём прямую. На прямой от точки A отложим отрезок AG, равный AF. Получим точку G. Точка пересечения окружностей с центрами O_2 и O_1' является образом точки пересечения окружностей с центрами O_1 и O_2', т. е. точки F. Отсюда точка пересечения окружностей с центрами O_2 и O_1' и точка G совпадают.

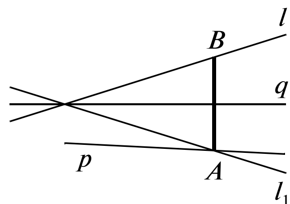


Рис. 122

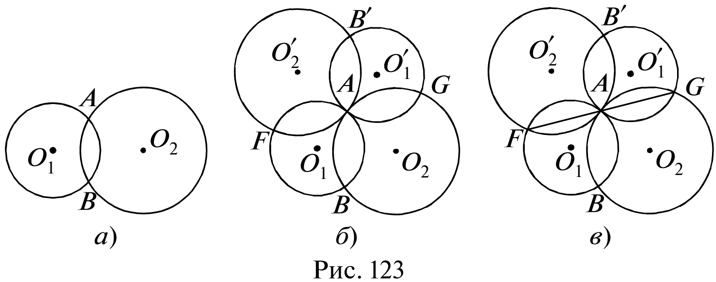


Рис. 123

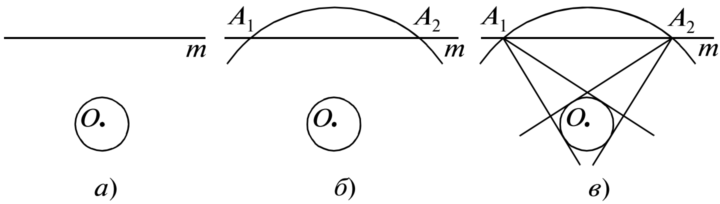


Рис. 124

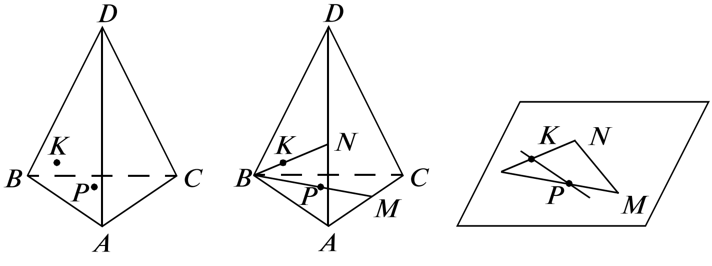


Рис. 125

405. Решение задачи аналогично решению № 402. С помощью циркуля отложим от концов заданного отрезка равные отрезки. Если раствор циркуля позволяет, построим середину нового отрезка, которая совпадёт с серединой заданного отрезка; если — нет, то повторим операцию.

406. ГМТ *A*, касательные из которых к данной окружности равны, является окружность, радиус которой равен *OA*. Алгоритм построения отрезка *OA* дан в ***Задаче 6*** (рис. 124).

407. Решение задачи следует из теоремы 3.2.

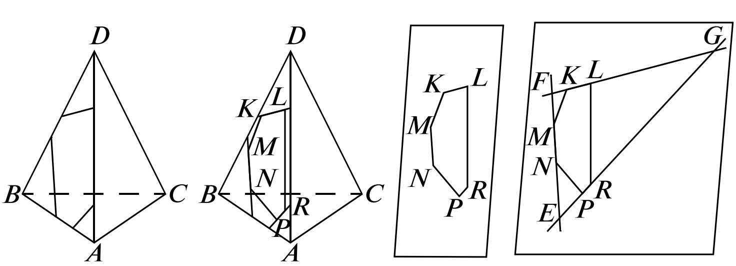


Рис. 126

408. а) В гранях ABC и ABD пирамиды $ABCD$ отметим точки P и K (рис. 125). Проведём через точки B и P прямую, которая пересечёт ребро AC в точке M. Точно так же, проведя прямую AK, получим на AD точку N. На листе бумаги построим треугольник, равный $\triangle BNM$, и на его сторонах BN и BM построим точки P и K. Затем найдём длину отрезка KP. б) См. рис. 126.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.

2. Постройте треугольник по двум сторонам и углу между ними.

3. Постройте треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему большей из них.

4. Постройте прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе.

5. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к одной из них.

№ 5ДЗ. Решение (после решения № 401). *Анализ.* Предположим, что задача решена. Выполним эскиз (рис. 127, *а*). Пусть $\triangle ABC$ — искомый, причём известно, что $BC = a$, $AC = b$, $AD = m$ — медиана, т. е. $CD = DB = \dfrac{a}{2}$. Из рисунка видно, что в $\triangle ACD$ известны все три стороны (рис. 127, *б*).

Поэтому построение нужно начать с построения $\triangle ACD$, при этом получим две вершины A и C, а затем построим вершину B, отложив на прямой CD отрезок $DB = CD$. В результате решения получим $\triangle ABC$ (рис. 127, *в*).

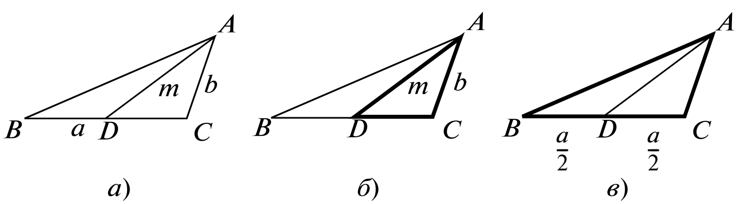


Рис. 127

На следующем уроке рекомендуется выполнить самостоятельную работу.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Вариант 1

1. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и основанию.

2. Найдите геометрическое место точек, являющихся центрами окружностей равных радиусов, пересекающихся в одной точке.

Вариант 2

1. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и углу при вершине.

2. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек и находящихся на заданном расстоянии от третьей точки.

4.3. Кратчайшие пути на плоскости (1 ч)

Материал параграфа не входит в номенклатуру содержания, поэтому полезно с ним ознакомить учащихся, но проверять его не обязательно.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

1 Для проверки усвоения материала § 4.1 и 4.2 провести самостоятельную работу.

2 В учебнике рассматривается ***Задача*** «методом кратчайшего пути».

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На уроке: в классе — самостоятельная работа; № 415; дома — № 413, 414.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

При решении задач достаточно выполнить чертёж в тетрадях. № 413, 414 .

413, 414. Все этапы решения задач представлены на рисунках 128 и 129.

415. На рисунке 130, *а* отражено условие задачи. Развернём треугольники ACD и BCD на плоскости так, чтобы точки A и B лежали по разные стороны от DC, затем соединим A и B (рис. 130, *б*). Эта прямая пересе-

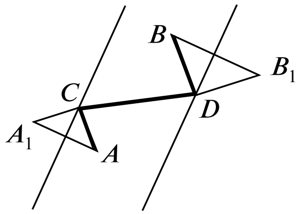


Рис. 128

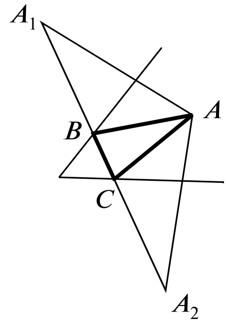
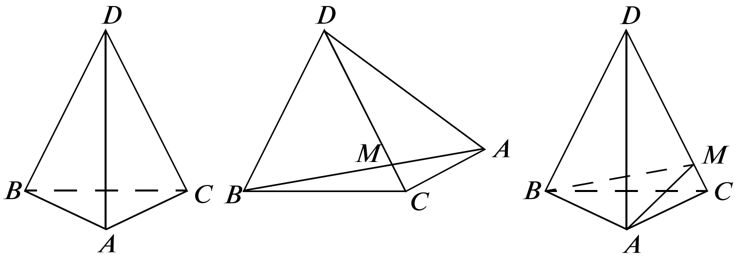


Рис. 129



а) *б*) *в*)

Рис. 130

чёт DC в искомой точке M. Решение задачи представлено на рисунке 130, *в*. Если прямая не пересечёт DC, то в качестве точки M возьмём одну из точек C или D.

4.4. О решении геометрических задач (2 ч)

Параграф позволяет начать работу по обучению учащихся самостоятельной работе с учебной литературой.

При изучении § 4.4 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— объяснять роль чертежа в решении задачи;
— выполнять дополнительные построения;
— решать задачи на вычисление.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

1 Параграф можно разделить на две части: первая, в которой рассматриваются некоторые общие положе-

ния, касающиеся процесса решения задач; вторая, в которой рассматриваются примеры решения задач. Можно порекомендовать первую часть для самостоятельной работы учащихся: № 1—3В.

(2) Изучение второй части рекомендуется построить в форме собеседования. При этом решение задач полезно записать на доске и в тетрадях.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — параграф; дома — № 1—4В, № 416, 417, 421.

На втором уроке: в классе — № 423, 424, 427, 429; дома — № 418, 419, 422, 428.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Объясните, какова роль чертежа при решении задачи.
2. Объясните, что такое дополнительное построение.
3. Объясните, какая геометрическая фигура используется в качестве «ключевой» фигуры.
4. Объясните, что такое многовариантность решения задачи.

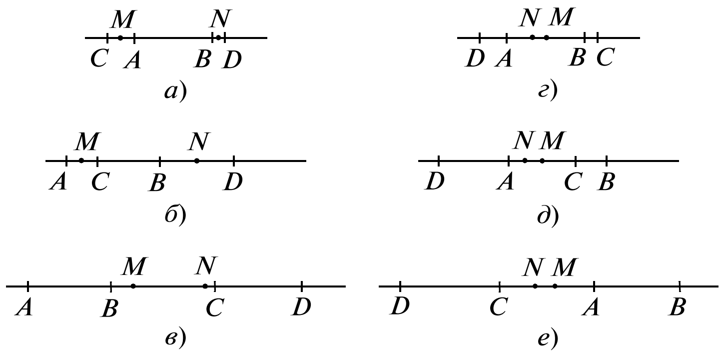
УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

Решение задач выполняется устно с выполнением чертежа на доске и в тетради.

419. *Способ 1.* Рассмотрим данную прямую как координатную ось с началом в точке A. Координаты точек B, C и D равны соответственно 2, x и $x + 3$ (или $x - 3$). Центры окружностей являются серединами отрезков AC и BD. В первом случае их координаты $\frac{x}{2}$ и $\frac{2 + (x + 3)}{2} = 2\frac{1}{2} + \frac{x}{2}$. Расстояние между ними равно $2\frac{1}{2}$.

Способ 2. Как и в № 58 и 60 § 2.1, рассмотрим возможные расположения точек A, B, C и D.

На рисунке 131 представлены два случая расположения точек A, B, C и D. Одна из возможных последовательностей расположения точек A, B, C и D задаётся взаимным расположением отрезков AC и BD, а вторая — отрезков AC и DB. Точка M является серединой отрезка AC, а точка N — серединой отрезка DB.



Первый случай *Второй случай*

Рис. 131

Рассмотрим *первый случай*. а) Пусть $AC = x$, а $BD = y$, при этом $x + y = 1$. $MN = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 2 = 2{,}5$; б) пусть $BC = x$, тогда $AC = 2 - x$, а $BD = 3 - x$, отсюда $MN = \frac{1}{2}(2 - x) + \frac{1}{2}(3 - x) + x = 2{,}5$; в) пусть $BC = x$, тогда $AB = 2 + x$, а $CD = 3 + x$, $AD = 2 + 3 + x$, отсюда $MN = 2 + 3 + x - \frac{1}{2}(2 + x) - \frac{1}{2}(3 + x) = 2{,}5$.

Рассмотрим *второй случай*. а) Пусть $BC = x$, $AC = 2 + x$, а $DB = 3 - x$, $MN = 3 - \frac{1}{2}(2 + x) - \frac{1}{2}(3 - x) = 0{,}5$; б) пусть $BC = x$, тогда $AC = 2 - x$, а $BD = 3 + x$, отсюда $MN = \frac{1}{2}(3 + x) - \frac{1}{2}(2 - x) - x = 0{,}5$; в) пусть $BD = x$, тогда $AC = 2 + 3 + x$, отсюда $MN = 2 + 3 + x - \frac{1}{2}(2 + 3 + x) - \frac{1}{2}x - 2 = 0{,}5$.

420. Заметим, что сумма длин отрезков AB, BC и CD равна длине отрезка AD. Следовательно, точки A, B, C и D расположены в заданной в условии задачи последовательности.

Пусть точка M лежит на отрезке AB, $AM = x$, тогда $BM = 3 - x$, $CM = 4 - x$, $DM = 6 - x$. Получаем уравне-

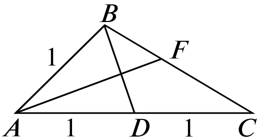


Рис. 132

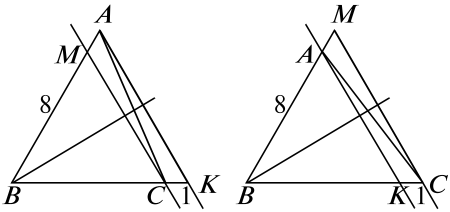


Рис. 133

ние $\dfrac{x}{6-x} = \dfrac{3-x}{4-x}$; $2x^2 - 13x + 18 = 0$. Разложим левую часть на множители: $2x^2 - 13x + 18 = 2x^2 - 4x - 9x + 18 = 2x(x-2) - 9(x-2) = (x-2)(2x-9)$. Получаем уравнение $(x-2)(2x-9) = 0$. На отрезке AB находится точка M, для которой $x = 2$. Второе значение x также подходит (соответствующая точка попадает на отрезок CD). Осталось рассмотреть случай, когда точка M лежит на отрезке BC. Этот случай даёт обычное линейное уравнение. Соответствующее расстояние будет равно 3,6. Общий ответ: 2; 3,6; 4,5.

425. Треугольник ABC — равнобедренный (рис. 132).

426. Из условия следует, что $BM = BC$, $BK = BA$. При этом возможны два случая: $AB < BC$ и $AB > BC$ (рис. 133).

427. Докажите, что $AB + CD = BC + AD$. Равенство следует из того, что выражения $AB + CD$ и $BC + AD$ равны сумме радиусов всех четырёх окружностей (рис. 134).

428. Рассмотрим пятиугольник $ABCDE$, в котором $AB = 7$, $BC = 10$, $CD = 12$, $DE = 8$, $EA = 9$. Пусть радиус окружности с центром в A равен x. Последовательно

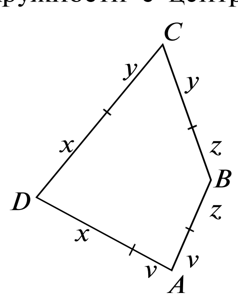


Рис. 134

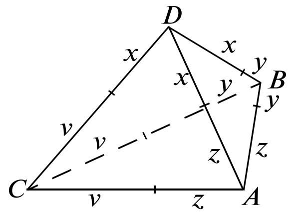


Рис. 135

находим радиусы окружностей с центрами в точках B, C, D и E, они будут равны $7 - x$, $10 - (7 - x) = 3 + x$, $12 - (3 + x) = 9 - x$, $8 - (9 - x) = x - 1$. Итак, радиус окружности с центром в E равен $x - 1$. Но $AE = 9$. Значит, $(x - 1) + x = 9$, $x = 5$. При этом наименьшей является окружность с центром в B. Её радиус равен 2.

429. Пусть окружность касается BC в точке K, а сторон угла AB и AC — в точках M и P соответственно. По условию $AM = AP = 5$. Учитывая равенство касательных к окружности, проведённых из одной точки, будем иметь $AB + AC + BC = AB + AC + BK + CK = AB + AC + BM + CP = AM + AP = 10$.

430. Обозначим радиусы шаров, центрами которых являются вершины пирамиды, через x, y, z и v (рис. 135). Тогда, используя данные задачи, получим: $AB = z + y = 5$, $BC = v + y = 7$, $AC = v + z = 10$, $AD = z + x = 8$.

Вычтем из второго уравнения первое и из третьего — четвёртое: $v - z = 2$, $v - x = 2$; отсюда: $v = x$. $AB = z + y = 5$, $BD = x + y = z + y = 5$; $AC = v + z = 10$, $CD = v + x = v + z = 10$.

4.5. Доказательства в геометрии (5 ч)

(1) § 4.5 «Доказательства в геометрии» позволяет, опираясь на последовательность пунктов, организовать обобщение и систематизацию курса 7 класса. При этом следует подбирать задачи, соответствующие теме пункта, не только из задач параграфа, но и из задач всего курса. На повторение отводится всё оставшееся от изучения материала курса 7 класса время, но не менее 10 часов. В рамках этого учебного времени необходимо провести повторение и годовую контрольную работу.

(2) В решении № 444 и 446 используются результаты решения № 365 § 3.3, решить их в классе одновременно.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

436. Пусть p и q — две оси симметрии некоторой фигуры. Тогда осью будет и прямая p_1, симметричная p относительно q. Но по условию осей симметрии лишь две.

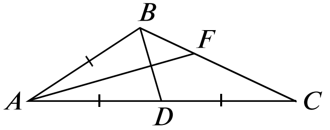


Рис. 136

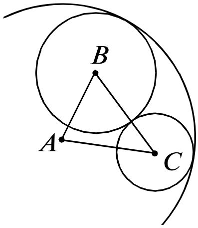


Рис. 137

Значит, p_1 совпадает с p. Это возможно лишь при условии перпендикулярности p и q.

439. Допустим $c > a$. Тогда $2c > c + a > b$. Сложив неравенства $2c > b$ и $c > a$, получим, что $3c > a + b$, что противоречит условию. Значит, $c \leqslant a$. Аналогично доказывается, что $c \leqslant b$.

440. См. рисунок 136.

443. Обозначим внутренний выпуклый многоугольник через P, а тот, в котором он содержится, через Q. Многоугольник P можно вырезать из Q, отрезая последовательно некоторые многоугольники. Как мы знаем (задача № 442), при каждом таком разрезе периметр отрезанного многоугольника уменьшается.

445. Радиус окружности с центром в A равен x. Тогда радиусы окружностей с центрами B и C (рис. 137) будут соответственно $x - BA = x - c$ и $x - b$. Из уравнения $(x - c) + (x - b) = a$ найдём $x = \dfrac{a + b + c}{2}$.

448. Пусть точка O лежит внутри треугольника ABC. По условию задачи, используя обозначения, данные на рисунке 138, *а*, имеем: $\alpha + \gamma = 60°$, $\alpha + \beta = 40°$, $\beta + \gamma = 80°$.

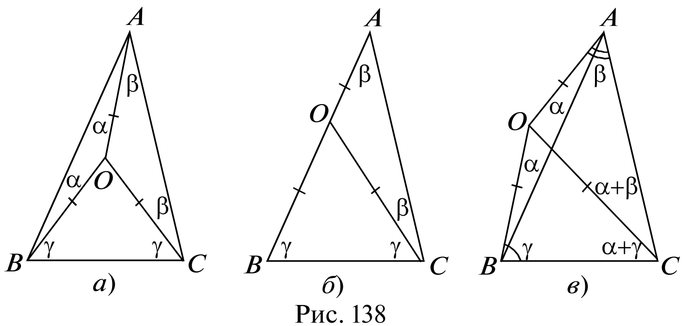


Рис. 138

Отсюда: $\alpha = 10°$, $\beta = 30°$, $\gamma = 50°$. Предположим, что точка O принадлежит стороне AB (рис. 138, *б*), тогда $\beta = 40°$, $\gamma = 60°$ и $\angle ACB = \beta + \gamma = 90°$, а по условию $\angle ACB = \beta + \gamma = 80°$. Получили противоречие, следовательно, точка O не принадлежит стороне AB. И, наконец, предположим, что точка O лежит вне треугольника ABC (рис. 138, *в*), тогда $\angle OBC = \alpha + \beta > 40°$, $\angle OAC = \alpha + \gamma > 60°$ и $\angle ACB = \alpha + \beta + \alpha + \gamma > 40° + 60°$, а по условию $\angle ACB = 80°$. Получили противоречие, следовательно, точка O не лежит вне треугольника ABC.

451. Рассмотрим случай, когда O — центр окружности — внутри $ABCD$. Имеем $\angle OAB = \angle OBA = \alpha$, $\angle OAD = \angle ODA = \beta$, $\angle ODC = \angle OCD = \gamma$, $\angle OBC = \angle OCB = \delta$. Тогда $\angle BAD + \angle BCD = \alpha + \beta + \gamma + \delta$. Такой же будет и сумма $\angle ABC + \angle ADC$.

452. Обозначим через M и K середины сторон AC и BD. Из равенства треугольников ABC и CDA следует, что $BM = DM$. Значит, треугольник BMD — равнобедренный с основанием BD, и медиана MK перпендикулярна BD. Аналогично получим, что KM — медиана равнобедренного треугольника AKC.

ИТОГОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Определите вид треугольника, две высоты которого совпадают с его сторонами.

А. Остроугольный.
Б. Прямоугольный.
В. Тупоугольный.
Г. Определить невозможно.

2. Определите, сколько решений имеет следующая задача. (Решать задачу не надо.)

На прямой p отмечены точки A, B и C. Отрезок AB равен 7 см, а отрезок AC равен 4 см. Найдите отрезок BC.

А. Одно. Б. Два. В. Три. Г. Решений нет.

3. Периметр четырёхугольника равен 75. Через середины двух противолежащих сторон проведена прямая, делящая четырёхугольник на два четырёхугольника с периметрами 56 и 63. Чему равен отрезок прямой, соединяющий данные середины?

Ответ: ______________________________

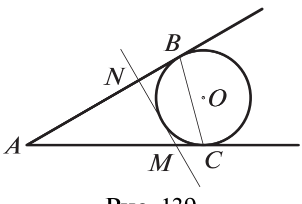


Рис. 139

4. Окружность с центром в точке O касается сторон угла BAC (B и C — точки касания) (рис. 139). Касательная MN к этой окружности пересекает стороны угла AB и AC соответственно в точках N и M. Найдите периметр треугольника ABC, если $BC = 7$ см, а периметр треугольника AMN равен 17 см.

Ответ: ______________________________

5. Длины сторон a и b треугольника равны 10 и 12. Определите наибольшую возможную длину его третьей стороны c, если известно, что она выражается целым числом.

6. Вершины треугольника ABC являются центрами окружностей разных радиусов, которые попарно касаются внешним образом. Сторона AB равна 6, сторона BC равна 7, сторона AC равна 9. Найдите радиус большей окружности.

Вариант 2

1. Определите вид треугольника, две высоты которого лежат вне треугольника.

А. Остроугольный.
Б. Прямоугольный.
В. Тупоугольный.
Г. Определить невозможно.

2. Определите, сколько решений имеет следующая задача. (Решать задачу не надо.)

Угол AOB равен 70°, а угол AOC равен 40°. Найдите угол BOC.

А. Одно. Б. Два. В. Три. Г. Решений нет.

3. Стороны треугольника равны 7, 13 и 16. Через вершину треугольника, противолежащую большей его стороне, проведена прямая, делящая его периметр в отношении 1 : 3. В каком отношении эта прямая делит большую сторону?

Ответ: ______________________________

4. Точка касания окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит боковую сторону на отрезки, равные 3 см и 4 см, считая от основания (рис. 140). Найдите периметр треугольника.

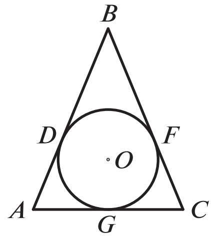


Рис. 140

Ответ: ______________________

5. Длины сторон a и b треугольника равны 10 и 12. Определите наименьшую возможную длину его третьей стороны c, если известно, что она выражается целым числом.

6. Вершины четырёхугольника $ABCD$ являются центрами окружностей разных радиусов. Известно, что если у двух окружностей центры находятся в соседних вершинах, то они касаются внешним образом. Найдите сторону AD четырёхугольника $ABCD$, если сторона AB равна 6, сторона BC равна 7, сторона CD равна 9.

8 класс

Глава 5
Параллельные прямые и углы (18 ч)

Особенностью главы, определяющей некоторые методические трудности при работе с ней, является её место в учебном процессе, а именно начало нового учебного года. Это ставит перед учителем задачу повторения основных тем курса геометрии 7 класса в процессе изучения основного материала.

Глава содержит программный материал: теоремы о признаках и свойствах параллельных прямых, теоремы о сумме углов треугольника и многоугольника, углы, связанные с окружностью и их свойства, окружность, описанная около треугольника, и окружность, вписанная в треугольник, и содержит дополнительный материал на продвинутом уровне: метод геометрических мест точек, метод вспомогательной окружности, признак принадлежности четырёх точек одной окружности, дуга, вмещающая данный угол. Признаки и свойства параллельных прямых, теоремы о сумме углов треугольника и многоугольника вместе с изученными в курсе 7 класса признаками равенства треугольников являются основополагающими для дальнейшего изучения курсов планиметрии и стереометрии.

В главе рассматривается одна из основных теорем курса — теорема о сумме углов треугольника, из которой выводится важное свойство внешнего угла треугольника и формула для вычисления суммы углов многоугольника. В свою очередь, свойство внешнего угла треугольника является основой для доказательства теорем об измерении углов, связанных с окружностью.

Углы, образованные при пересечении двух прямых секущей, вводятся в данном курсе планиметрии без определений, только на наглядном уровне.

Теоремы, доказанные в данной главе, позволяют расширить круг задач на вычисления. Такие задачи здесь составляют значительно бо́льшую долю, чем в 7 классе, где основную массу составляли задачи на доказательство. Однако следует иметь в виду, что и при решении вычислительных задач от учащихся следует требовать обоснование каждого этапа решения задачи.

В процессе изучения данной главы полезно уделить внимание использованию электронного приложения, наглядным средствам обучения и решению задач по готовым чертежам.

При изучении главы 5 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— распознавать и изображать на чертежах и рисунках внутренние односторонние, внутренние накрест лежащие и соответственные углы, внешний угол треугольника;

— выделять в конфигурации, данной в условии задачи, параллельные прямые, внутренние односторонние, внутренние накрест лежащие и соответственные углы, внешний угол треугольника;

— иллюстрировать и объяснять формулировки: признаков параллельности прямых, свойств углов, образованных при пересечении параллельных прямых и секущей; теоремы о сумме углов треугольника, её следствия о внешнем угле треугольника и теоремы о сумме углов n-угольника;

— объяснять на примерах метод геометрического места точек;

— определять вид треугольника по углам, применяя теорему о сумме углов треугольника;

— применять при решении задач на вычисление и доказательство: определения внутренних односторонних и внутренних накрест лежащих, соответственных углов; признаки параллельности прямых, свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей; теорему о сумме углов треугольника и следствие из теоремы о внешнем угле треугольника; алгебраический аппарат.

Учащиеся получат возможность научиться решать задачи на построение методом геометрического места точек.

5.1. Параллельные прямые на плоскости (5 ч)

При введении определений углов, образованных параллельными прямыми и секущей, основное внимание следует уделить умению применять эти понятия на наглядном уровне в решении задач.

Как было замечено выше, признаки параллельности прямых и свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, являются основополагающими в курсе планиметрии. Вместе с признаками параллельности прямых они играют значительную роль при изучении тем «Четырёхугольники» и «Подобие фигур». Кроме того, признаки параллельности прямых и свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, будут широко применяться в стереометрии.

Теорема о сумме углов треугольника вместе с признаками равенства треугольников, признаками и свойствами параллельных прямых образуют базу для дальнейшего изучения курса планиметрии и будут широко применяться в стереометрии.

При изучении § 5.1 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках углы, образованные параллельными прямыми и секущей;

— формулировать, иллюстрировать и доказывать теоремы о признаках параллельности прямых и свойствах углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, теоремы о сумме углов треугольника и о сумме углов n-угольника;

— решать задачи, применяя: признаки параллельности прямых; свойства углов, образованных при пересечении секущей двух параллельных прямых; теоремы о сумме углов треугольника и о сумме углов n-угольника и следствие из теоремы о сумме углов треугольника.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

(1) Перед введением четвёртого основного свойства плоскости полезно вспомнить вместе с учащимися определение параллельных прямых и первые три основные свойства плоскости, используя следующие вопросы.

1. Сколько прямых можно провести через точки A и B? (*Первое основное свойство плоскости.*)

2. По рисунку 141 назовите отрезки, у которых один конец находится в точке A, а другой в одной из обозначенных на рисунке точек, и которые при этом не пересекают пря-

мую m. (*Второе основное свойство плоскости.*)

3. По рисунку 141 назовите отрезки, у которых один конец находится в точке A, а другой в одной из обозначенных на рисунке точек, и которые при этом пересекают прямую m (см. рис. 141). (*Второе основное свойство плоскости.*)

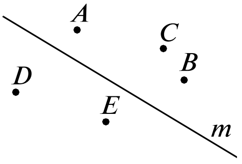


Рис. 141

4. Сколько осей симметрии имеет окружность?

5. Сформулируйте третье основное свойство плоскости.

При введении четвёртого основного свойства плоскости полезно подчеркнуть, что слова «не более одной» означают, что через данную точку вне данной прямой провести две прямые, параллельные данной, невозможно. Иначе, число прямых, проходящих через данную точку вне данной прямой параллельно ей, равно нулю или единице. Ранее было установлено, что можно провести одну прямую, проходящую через данную точку параллельно данной прямой.

(2) Внутренние и внешние односторонние и соответственные углы вводятся без определений, только на наглядном уровне. Такой авторский подход диктует необходимость отрабатывать определения углов также на наглядном уровне и использовать их при решении задач на уровне распознавания по рисунку. Поэтому достаточно провести их объяснение и закрепление по рисункам 142 и 143 с помощью следующих в о п р о с о в.

1. На рисунке 142 назовите одну пару внутренних односторонних углов.

2. На рисунке 142 углы *2* и *8* внешние односторонние. Назовите все пары внешних односторонних углов.

3. На рисунке 142 углы *2* и *6* соответственные. Назовите все пары соответственных углов.

4. На рисунке 143 назовите угол, который образует с углом ABF: а) пару внутренних односторонних углов; б) па-

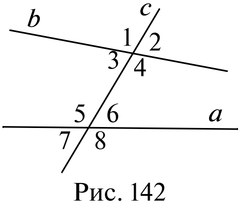


Рис. 142

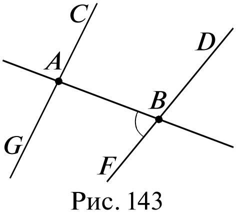


Рис. 143

ру внешних односторонних углов; в) пару соответственных углов.

Рекомендуется требовать, чтобы учащиеся давали полные ответы на поставленные вопросы, не забывая указывать, при каких прямых и какой секущей рассматриваются углы.

При введении углов, образующихся при пересечении двух прямых и секущей, следует подчеркнуть, что названия этих углов относятся не к каждому отдельному углу, а как и в случае смежных и вертикальных углов, к парам углов.

(3) Перед тем как сформулировать признаки параллельности прямых, напомнить учащимся, что с понятием «признак» они уже встречались в курсе 7 класса при изучении признаков равенства треугольников.

Признаки и свойства параллельных прямых являются следствием четвёртого основного свойства плоскости и у т в е р ж д е н и я: «Рассмотрим прямую l и точку A вне этой прямой. Проведём через A произвольную прямую, пересекающую прямую l в некоторой точке B. Обозначим через β один из углов, образованных AB с прямой l. Проведём через точку A прямую такую, что угол α дополнял бы до 180° угол β, т. е. $\alpha + \beta = 180°$ (рис. 144). Построенная прямая m параллельна прямой l».

Доказательство утверждения проводится методом от противного, знакомым учащимся из курса 7 класса, и его полезно записать в тетради с выполнением рисунка 145, соответствующего предположению, что прямые m и l не параллельны, т. е. пересекаются в некоторой точке C.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Предположим, что прямые m и l не параллельны и пересекаются в точке C.

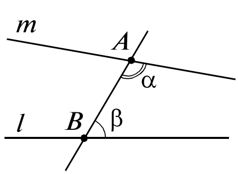


Рис. 144

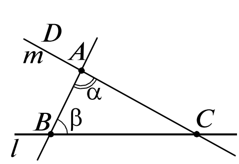


Рис. 145

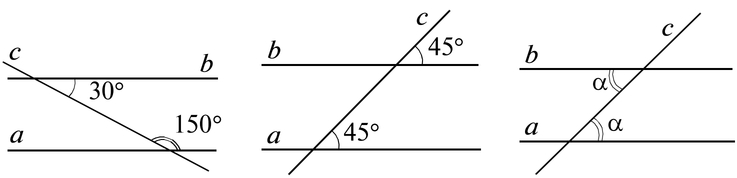
2. $\angle ABC + \angle BAC = 180°$ по условию. $\angle DAB + \angle BAC = 180°$, как смежные.

Отсюда $\angle ABC = \angle DAB$, что по теореме о внешнем угле треугольника невозможно.

3. Предположение, что $m \nparallel l$, приводит к противоречию, значит, $m \parallel l$.

Аналогично рассматривается случай, когда точка C расположена по другую сторону от AB.

4 На закрепление признаков параллельности прямых использовать з а д а н и е.

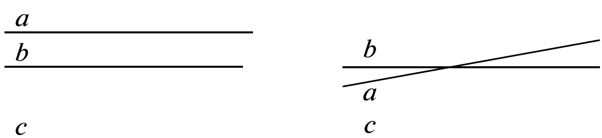


а) *б*) *в*)

Рис. 146

«Докажите, что прямые a и b на рисунке 146 параллельны».

Затем решить № 499, в которой сформулирован ещё один признак параллельности прямых, методом от противного: предположим, что прямые a и b не параллельны и пересекаются в некоторой точке C. При решении полезно выполнить два чертежа: первый (рис. 147, *а*) отражает условие задачи, второй (рис. 147, *б*) — предположение. Само решение можно провести устно с выполнением чертежей в тетрадях.



а) *б*)

Рис. 147

В развитие № 492 на дом — № 1ДЗ.

5 После того как будут сформулированы свойства параллельности прямых, можно выполнить следующие з а д а н и я.

1. На рисунке 148 прямые a и b параллельны. Определите $\angle 8$, если $\angle 3 = 40°$.

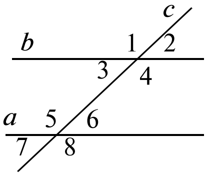


Рис. 148

2. На рисунке 148 прямые a и b параллельны. Определите $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 7$, если $\angle 2 = 40°$.

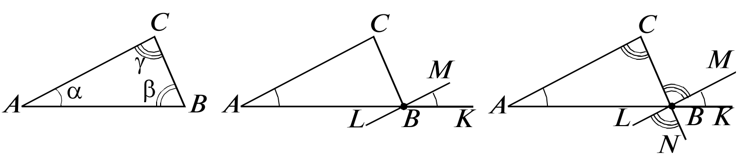
Здесь полезно показать учащимся, что между соответственными и накрест лежащими углами существует связь: если равны соответственные, то равны и накрест лежащие. На основании равенства накрест лежащих углов можно делать вывод о параллельности прямых, и обратно, если прямые параллельны, то накрест лежащие углы равны.

На закрепление свойств и признаков параллельных прямых приведены задачи № 457—483. Основную часть из них составляют задачи по готовым чертежам, и их решение выполняется устно. № 470 и 471 позволяют повторить тему ГМТ. № 472 и 473 служат пропедевтикой к теме «Параллелограмм». Их полезно решить в процессе повторения перед контрольной работой, а также обратить внимание учащихся на № 5Т.

6 При проведении доказательства теоремы 5.1 (теорема о сумме углов треугольника) для того, чтобы учащиеся лучше усвоили идею доказательства, следует записать последовательность основных шагов.

Пусть дан $\triangle ABC$ с углами α, β и γ (рис. 149, *а*). Требуется доказать, что $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Дополнительно построим в $\triangle ABC$ через вершину B прямую LM, параллельную AC (рис. 149, *б*).

1. $\angle KBM = \alpha$, соответственные $LM \parallel AC$ и секущая AB (см. рис. 149, *б*).
2. $\angle ACB = \angle LBN$, соответственные $LM \parallel AC$ и секущая CB (рис. 151, *в*).
3. $\angle CBM = \angle LBN$ — вертикальные.
4. Отсюда $\angle ABC = \angle CBM = \gamma$.



а) *б*) *в*)

Рис. 149

5. Отсюда $\angle ABC + \angle CBM + \angle KBM = \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = \beta + \gamma + \alpha = 180°$.

Из доказательства теоремы следует, что внешний угол при вершине B $\triangle ABC$: $\angle CBK = \angle CBM + \angle KBM$.

Затем предложить учащимся задания № 7—8ДЗ.

На применение свойства внешнего угла треугольника предложить устно решить № 9—10ДЗ и № 484.

7 Полезно рассмотреть с учащимися, как теорема о сумме углов треугольника и свойство внешнего угла треугольника применяются в частных случаях, выполняя следующие задания для:

а) равностороннего треугольника — № 13—18ДЗ и № 503, которую рассмотреть перед решением задачи № 15ДЗ (№ 16ДЗ поможет решить № 514);

б) равнобедренного треугольника — № 19—22ДЗ и № 507, 508 (решение № 19, 20 и 22ДЗ поможет решить дома № 507, 508 и 527);

в) прямоугольного треугольника — № 23—26ДЗ и № 522, 531, 532 (решение № 522 в классе поможет решить дома № 531 и 532).

Эти задачи достаточны просты, однако они очень полезны и позволяют в процессе их решения провести систематизацию знаний учащихся о частных видах треугольников. Записи решения задач в тетрадях делать не обязательно. При необходимости можно сделать чертёж или серию рисунков, иллюстрирующих решение, в крайнем случае, можно сделать краткую запись.

Следует обратить внимание учащихся на свойства равнобедренного треугольника (№ 4 б), 7Т), которые будут полезны при решении задач в дальнейшем № 11—13Т — и познакомить учащихся с выводом в № 5Т.

8 На применение теоремы о сумме углов n-угольника устно решить № 519 и № 27ДЗ. Перед решением задачи № 559 полезно решить в классе задачу.

«Чему равна сумма внешних углов выпуклого многоугольника (n-угольника), взятых по одному при каждой вершине (рис. 150)».

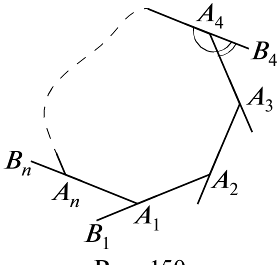


Рис. 150

Её решение полезно записать в тетрадях учащихся, а доказанную в ней формулу запомнить и применять при решении других задач.

Р е ш е н и е. Сумма внутреннего и одного из внешних углов при каждой вершине многоугольника равна 180°. Отсюда сумма всех внутренних и внешних углов, взятых по одному при каждой вершине, равна $180°n$. Известно, что сумма всех внутренних углов равна $180° \cdot (n - 2)$. Значит, сумма всех внутренних и внешних углов, взятых по одному при каждой вершине, равна $180°\, n - 180°\, (n - 2) = 360°$.

Полезно обратить внимание учащихся на то, что сумма внутренних углов выпуклого n-угольника зависит от числа сторон, а сумма внешних углов одинакова для всех выпуклых многоугольников.

После этого можно выполнить № 10, 25, 26, 29ДЗ.

9 Проверку домашнего задания по темам признаки и свойства параллельности прямых и теорема о сумме углов треугольника можно провести в форме самостоятельных работ СР3 и СР4 соответственно на втором и третьем уроках. СР3 содержит пять задач: четыре со свободным ответом, пятая — с выбором ответа. СР4 содержит три задачи: первая — с выбором ответа, вторая и третья — со свободным ответом.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — пункты: параллельные прямые на плоскости, четвёртое основное свойство плоскости, признаки и свойства параллельных прямых; № 479 и 499; дома — № 1—3В, № 497, 498 и 544 и № 1—4ДЗ.

На втором уроке: в классе — СР3; пункт: сумма углов треугольника; № 7—10ДЗ и № 484, 503; дома — № 4В, № 521, 529, 551.

На третьем уроке: в классе — СР4; № 11—23ДЗ и № 503, 504, 522; дома — № 507, 518, 527, 530, 531.

На четвёртом уроке: в классе — пункт: сумма углов n-угольника; № 519, 532, 539, 522; дома — № 5В, № 528, 534, 535, 559, 561.

На пятом уроке: в классе — № 546 (а), 552—554, 565; дома — № 545 (б), 560, 562.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Сформулируйте четвёртое основное свойство плоскости.
2. Объясните, какие углы называют внутренними и внешними односторонними углами.
3. Объясните, какие углы называют соответственными углами.
4. Сформулируйте признаки и свойства параллельности прямых.
5. Сформулируйте и докажите теорему о сумме углов треугольника.
6. Сформулируйте и докажите теорему о сумме углов n-угольника.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вариант 1

1. Укажите два угла, каждый из которых образует с углом KLM пару односторонних углов (рис. 151).

Ответ: ____________________

____

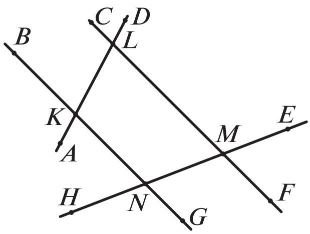


Рис. 151

2. Укажите два угла, каждый из которых образует с углом KLM пару накрест лежащих углов (см. рис. 151).

Ответ: ____________________

3. Укажите два угла, каждый из которых образует с углом KLM пару соответственных углов (см. рис. 151).

Ответ: ____________________

4. Внутри угла ABC, равного 38°, отмечена точка F. Через точку F проведены прямые, параллельные сторонам угла. Найдите меньший угол с вершиной в точке F.

Ответ: ____________________

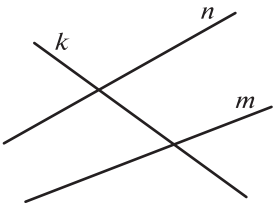


Рис. 152

5. Сумма двух внутренних односторонних углов, образованных пересечением прямых m и n секущей k, равна 148° (рис. 152). Определите взаимное расположение прямых n и m.

А. Прямые n и m пересекаются.

Б. Прямые n и m параллельны.

В. Прямые n и m перпендикулярны.

Вариант 2

1. Укажите два угла, каждый из которых образует с углом NML пару односторонних углов (см. рис. 151).

Ответ: ______________________________

2. Укажите два угла, каждый из которых образует с углом NML пару накрест лежащих углов (см. рис. 151).

Ответ: ______________________________

3. Укажите два угла, каждый из которых образует с углом NML пару соответственных углов (см. рис. 151).

Ответ: ______________________________

4. Внутри угла ABC, равного 38°, отмечена точка F. Через точку F проведены прямые, параллельные сторонам угла. Найдите больший угол с вершиной в точке F.

Ответ: ______________________________

Рис. 153

5. Угол α, образованный при пересечении прямых n и k, равен 30°, а угол β, образованный при пересечении прямых m и k, на 120° больше угла α. Определите взаимное расположение прямых n и m (рис. 153).

А. Прямые n и m пересекаются.

Б. Прямые n и m параллельны.

В. Прямые n и m перпендикулярны.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Вариант 1

1. Определите вид треугольника, если сумма двух его углов равна третьему углу.

А. Треугольник — остроугольный.
Б. Треугольник — прямоугольный.
В. Треугольник — тупоугольный.

2. В равностороннем треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BF, которые пересекаются в точке O. Найдите угол AOF (рис. 154).

Ответ: ________________________

3. Внутри $\triangle ABC$ отмечена точка O такая, что $OA = OB = OC$. Известно, что $\angle BOC = 160°$, $\angle COA = 130°$. Найдите угол BCA $\triangle ABC$ (рис. 155).

Ответ: ________________________

Вариант 2

1. Определите вид треугольника, если сумма двух его углов больше третьего угла.

А. Треугольник — остроугольный.
Б. Треугольник — прямоугольный.
В. Треугольник — тупоугольный.

2. Определите величину угла между высотами AM и CN равностороннего $\triangle ABC$ (рис. 156).

Ответ: ________________________

3. В равнобедренном $\triangle ABC$ с основанием AC проведена биссектриса AP. Найдите угол APB, если угол ABC равен 88°.

Ответ: ________________________

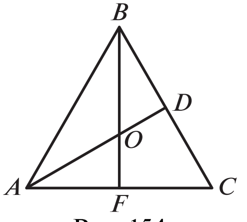


Рис. 154

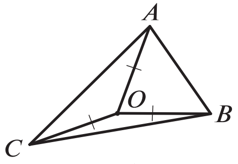


Рис. 155

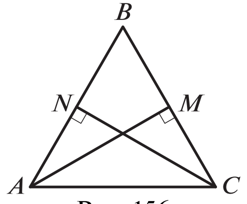


Рис. 156

Основная часть задач параграфа решается устно с выполнением чертежа на доске и в тетради. № 479, 498, 519, 552.

498. Нет, не следует. Эти три прямые могут быть параллельными, а могут образовывать равнобедренный треугольник, боковые стороны которого лежат на прямых *a* и *b* (рис. 157, *а* и *б*).

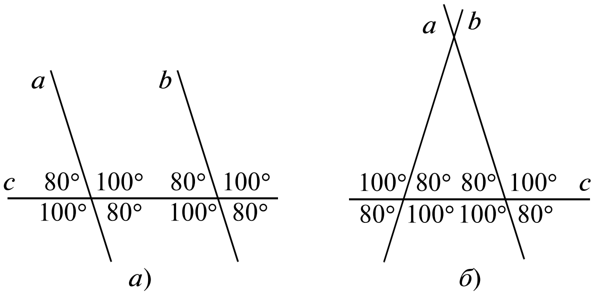


Рис. 157

504. Возьмём равносторонний треугольник со стороной, равной гипотенузе данного прямоугольного треугольника, и проведём в нём одну высоту. Она разобьёт этот треугольник на два прямоугольных треугольника, равных данному.

521. Решение задачи следует из рисунка 158.

522. Пусть $\angle ABC = \alpha$ (рис. 159). Тогда:

$$\angle BAC = \angle BCA = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\angle BDC = \angle BCD = \frac{1}{2}\alpha. \text{ Значит,}$$

$$\angle ACD = \angle ACB + \angle BCD = \left(90° - \frac{1}{2}\alpha\right) + \frac{1}{2}\alpha = 90°.$$

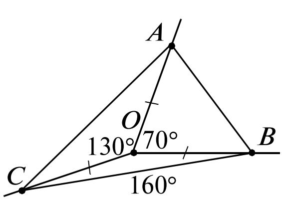


Рис. 158

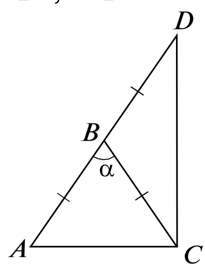


Рис. 159

529. Решение задачи следует из рисунка 160.

$\angle MKC = \frac{1}{2}\alpha$, $\angle KMC = \frac{1}{2}\beta$,

$\angle KCM = 180° - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

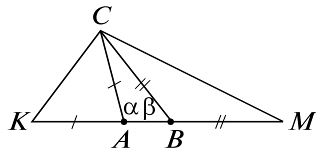


Рис. 160

530. См. № 522.

531. См. № 522 и 530.

532. Пусть $\angle BAC = 2\alpha$ (рис. 161). Тогда: $\angle DAC = \angle DAB = \angle ABC = \alpha$, значит, $\angle ADC = \angle ACB = 2\alpha$. $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180°$. $\angle BAC = 72°$, $\angle ABC = 36°$, $\angle ACB = 72°$.

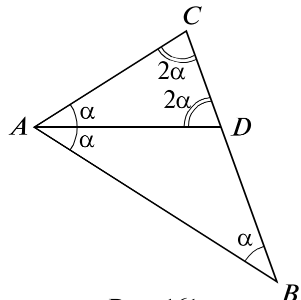


Рис. 161

534. Возможны два случая: 1) см. № 532; 2) прямоугольный равнобедренный треугольник.

535. Чтобы построить угол, равный 60°, можно построить равносторонний треугольник — его угол 60°; чтобы построить угол, равный 30°, можно провести высоту равностороннего треугольника — получим угол 30°; чтобы построить угол, равный 15°, можно построить биссектрису угла 30° — получим угол 15°.

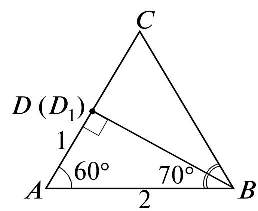


Рис. 162

539. В $\triangle ABC$ из вершины B к стороне AC проведём высоту BD_1 (рис. 162). Так как в прямоугольном $\triangle ABD_1$ угол BAC равен 60°, то $AD_1 = \frac{1}{2}AB$ в силу результата № 504. Значит, точки D и D_1 совпадают. Получаем $\angle BDC = 90°$, $\angle DBC = 40°$, $\angle DCB = 50°$.

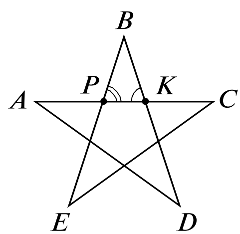


Рис. 163

550. Заметим (рис. 163), что $\angle KAD + \angle KDA = \angle BKP$ и $\angle PEC + \angle PCE = \angle BPK$, так как внешний угол тре-

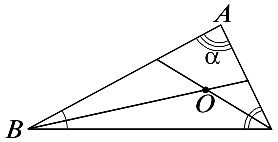


Рис. 164

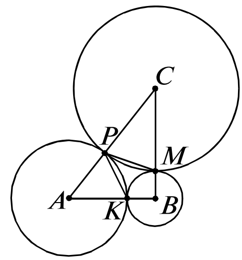


Рис. 165

угольника равен сумме внутренних, с ним не смежных. Сумма углов «звёздочки» равна

$\angle PBK + \angle BKP + \angle BPK = 180°$.

551. $\angle BOC = 180° - (\angle OBC + \angle OCB) =$

$= 180° - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle BAC) =$

$= 180° - \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° + \frac{1}{2}\alpha$ (рис. 164).

552. Так как у треугольника два внешних угла не могут быть острыми, а все указанные углы острые, значит, один из них внешний, а два других угла — внутренние. А так как внешний угол треугольника равен сумме внутренних, с ним не смежных, то 20° + 30° = 50°. Следовательно, углы треугольника равны 20°; 30°; 130°.

553. Пусть точка K лежит на стороне AB, а точка M — на стороне BC (рис. 165). Треугольники AKP и CMP равнобедренные. Значит, $\angle APK = 90° - \frac{1}{2}\angle KAP$.

$\angle CPM = 90° - \frac{1}{2}\angle PCM$. $\angle KPM = 180° - \angle APK -$

$- \angle CPM = 180° - \left(90° - \frac{1}{2}\angle APK\right) - \left(90° - \frac{1}{2}\angle PCM\right) =$

$= \frac{1}{2}(\angle APK + \angle PCM) = 45°$.

554. Пусть точка K лежит на стороне AB, а точка M — на стороне BC (рис. 166). Нужно доказать, что треугольники MBK, MCP и KAP равнобедренные. $\angle KPM =$ $= 90° - \alpha$.

559. Утверждение задачи следует из того, что сумма внешних углов любого выпуклого многоугольника равна 360°.

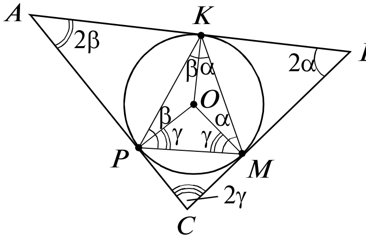


Рис. 166

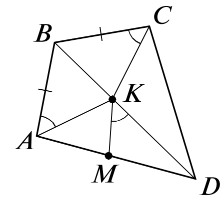


Рис. 167

560. *Способ 1* (рис. 167). Из равенства треугольников BCD и BAC следует, что BD — биссектриса $\angle BAC$.

Из равенства $\triangle\ BCK$ и $\triangle\ BAK$ следует, что $\angle BCK = \angle BAK = \angle MKD$. $\angle AKD$ — внешний угол $\triangle BAK$. $\angle AKD = \angle AKM + \angle MKD$. Отсюда $\angle AKM = \alpha$.

Способ 2. Ввиду симметрии относительно BD, $\angle BAK = \angle BCK = \angle MKD$. Значит, $\angle AKM = 180° - \angle BKA - \angle MKD = \angle ABK + \angle BAK - \angle MKD = \angle ABK = \alpha$.

561. а) Для того чтобы найти углы $\triangle A_1A_4A_5$, докажите, что $A_2A_4 = A_1A_2$ (рис. 168).

562. Пусть $\angle BAC = x$, тогда $\angle ADC = x$. Внешний угол $\triangle ACD$ при вершине C равен $2x$ (рис. 169). Этот угол есть половина внешнего угла C $\triangle ABC$. Значит, $\angle AEC = \angle ACE = 4x$, $\angle EAC = 180° - 8x$. Но $\angle EAC$

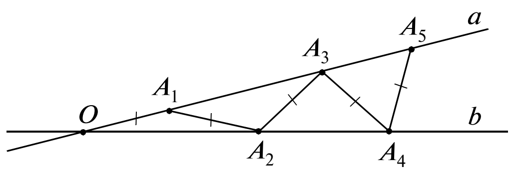


Рис. 168

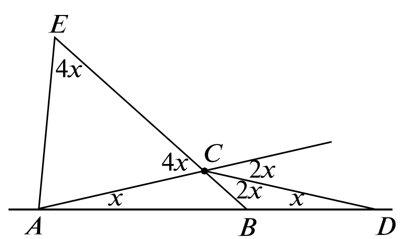


Рис. 169

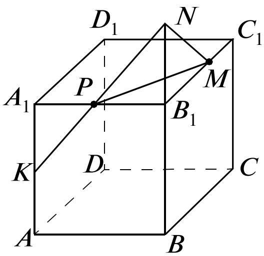


Рис. 170

есть половина внешнего угла при вершине A, т. е. $\angle EAC = \frac{1}{2}(180° - x)$. Из уравнения $180° - 8x = \frac{1}{2}(180° - x)$ найдём $x = 12°$.

565. Заметим, что $\triangle ACB_1$ — равносторонний. Отсюда $\angle ACB_1 = 60°$ (рис. 170). Обозначим через N точку пересечения KP и BB_1. Докажите, что $\triangle PNM$ — равносторонний ($B_1N = B_1P = B_1M$).

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Докажите, что если некоторая прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

2. На рисунке 171 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 \neq \angle 4$. Определите, какие из трёх прямых c, d, e параллельны.

3. $\triangle ABC$ — равнобедренный с основанием AC. Известно, что соответственные углы при прямых AB и KM и секущей AC равны. Докажите, что $\triangle KMC$ — равнобедренный (рис. 172).

4. Чему равны внутренние односторонние углы при двух параллельных прямых и секущей, если один из них в два раза меньше другого.

5. Докажите, что прямая, параллельная основанию AC равнобедренного $\triangle ABC$, перпендикулярна его медиане BD.

6. В $\triangle ABC$ и $\triangle ABC_1$ проведены высоты CD и C_1D_1. Докажите, что прямые CD и C_1D_1 параллельны или совпадают.

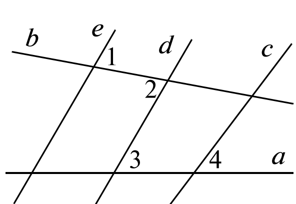


Рис. 171

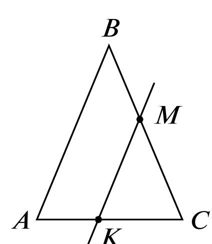


Рис. 172

7. Найдите неизвестный угол треугольника, если у него два других угла равны 75° и 40°.

8. Найдите углы треугольника, если они пропорциональны числам 5, 6 и 7.

9. Могут ли у треугольника быть два внешних угла прямыми?

10. Могут ли у треугольника быть два внешних угла острыми?

11. Один из углов треугольника равен 35°, а один из его внешних углов равен 100°. Найдите наибольший угол этого треугольника.

12. Наименьший угол треугольника в три раза меньше наибольшего угла и на 20° меньше среднего угла. Найдите углы треугольника.

13. Может ли равносторонний треугольник быть прямоугольным?

14. Может ли равносторонний треугольник быть тупоугольным?

15. Найдите градусные меры внешних углов равностороннего треугольника.

16. В равностороннем треугольнике ABC проведена высота BD. Найдите углы $\triangle ABD$.

17. Медиана BD $\triangle ABC$ отсекает от него равносторонний треугольник DAB. Определите углы $\triangle CDB$ (рис. 173).

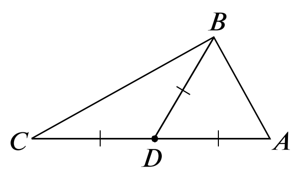


Рис. 173

18. Докажите, что в равностороннем треугольнике расстояние от точки пересечения двух биссектрис до стороны в два раза меньше расстояния от этой же точки до вершины.

19. Найдите углы равнобедренного треугольника, если угол при вершине равен 72°.

20. Докажите, что в равнобедренном треугольнике внешние углы при основании равны.

21. Найдите углы равнобедренного треугольника, если внешний угол при основании равен 112°.

22. Докажите, что если один из внешних углов треугольника в два раза больше внутреннего не смежного с ним угла, то треугольник — равнобедренный.

23. Чему равна сумма острых углов прямоугольного треугольника?

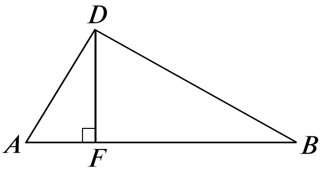


Рис. 174

24. Найдите внешний угол при основании прямоугольного равнобедренного треугольника.

25. Найдите наибольший угол треугольника, если известно, что один из его внешних углов равен одному из внутренних углов.

26. DF — высота прямоугольного треугольника ADB ($\angle ADB$ — прямой). Укажите соответственно равные углы в $\triangle ADF$ и $\triangle ADB$ (рис. 174).

27. Сумма углов выпуклого многоугольника в два раза меньше суммы внешних углов, взятых по одному при каждой вершине. Найдите число сторон этого многоугольника.

28. Сумма углов выпуклого многоугольника равна сумме его внешних углов, взятых по одному при каждой вершине. Найдите число сторон этого многоугольника.

29. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, если все его внешние углы тупые?

30. Какое наибольшее число острых углов может быть у выпуклого многоугольника?

31. Определите вид выпуклого многоугольника, если все его внешние углы прямые.

32. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, у которого все углы равны, если сумма его внешних углов с одним из внутренних равна 468°?

33. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, если сумма его внутренних углов с одним из внешних равна 2250°?

5.2. Измерение углов, связанных с окружностью (3 ч)

В параграфе рассматриваются теоремы: о вписанном угле, об угле с вершиной внутри круга (традиционное название: угол между хордами); об угле с вершиной вне круга (традиционное название: угол между секущими); и об угле между хордой и касательной. Кроме того, вводится понятие «центральный угол в окружности» и устанавливается соотношение между центральным углом и дугой окружности, соответствующей этому углу.

При изучении § 5.2 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках вписанные углы, углы с вершиной внутри круга, углы с вершиной вне круга, углы между хордой и касательной, центральный угол в окружности;

— формулировать, иллюстрировать и доказывать теоремы о вписанных углах, углах с вершиной внутри круга, углах с вершиной вне круга, углах между хордой и касательной;

— решать задачи, применяя: теоремы о вписанных углах, углах с вершиной внутри круга, углах с вершиной вне круга, углах между хордой и касательной.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

(1) Понятие «центральный угол» вводится с опорой на рисунок 175. При этом следует на рисунке выделить ту часть окружности, которая соответствует данному углу. Необходимо заметить, что теперь рассматриваемые углы могут быть больше 180°. На закрепление понятия выполнить у п р а ж н е н и я по готовым чертежам на плакате.

1. Каждая из окружностей разделена на равные части. Найдите градусную меру центральных углов, отмеченных на рисунке 176.

2. Найдите градусную меру дуг окружностей, соответствующих углам, отмеченным на рисунке 177.

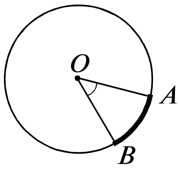


Рис. 175

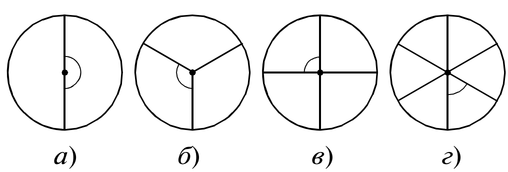


Рис. 176

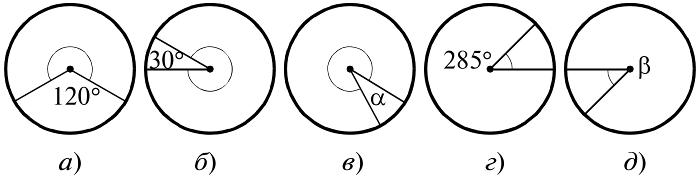


Рис. 177

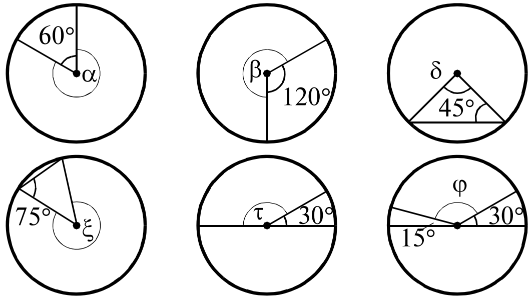


Рис. 178

3. Найдите градусную меру углов α, β, δ, ζ, τ и φ (рис. 178).

Устное обсуждение решения № 577 на уроке поможет учащимся решить № 578 дома (полезно прокомментировать его на уроке, объяснив, что фраза «постройте одним циркулем» значит — при построении не используется линейка).

2 Рассмотрение теоремы об измерении вписанного угла можно провести в форме беседы, в ходе которой последовательно решить з а д а ч и.

1. Угол ABC — вписанный, причём BC — диаметр. Выразите $\angle ABC$ через $\angle AOC$ (рис. 220У).

2. Угол ABC — вписанный. Выразите $\angle ABC$ через $\angle AOC$ (рис. 221У).

3. Угол ABC — вписанный. Выразите $\angle ABC$ через $\angle AOC$ (рис. 222У).

Обсуждение решения этих задач позволяет сделать следующее о б о б щ е н и е. Рассмотрены все возможные случаи расположения центра окружности относительно сторон вписанного угла: на стороне угла, внутри угла, вне угла — и во всех случаях вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла и измеряется половиной дуги окружности, на которую он опирается. После этого сформулировать теорему 5.3.

3 При решении задач очень важно, чтобы учащиеся умели на наглядном уровне находить вписанный угол и соответствующий ему центральный, и наоборот. Поэтому полезно выполнить следующие у п р а ж н е н и я.

1. Нарисуйте несколько вписанных углов, соответствующих данному центральному углу (рис. 179).

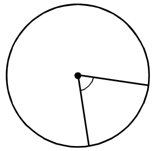


Рис. 179

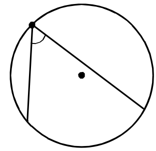


Рис. 180

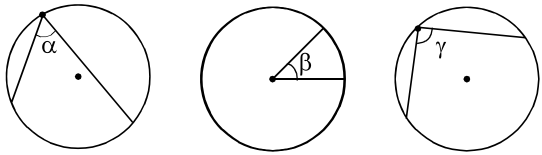


Рис. 181

2. Нарисуйте центральный угол, соответствующий данному вписанному углу (рис. 180).

3. В соответствующей окружности нарисуйте угол, равный:

а) 2α; б) $\frac{1}{2}\beta$; в) γ (рис. 181).

Затем решить № 572 и № 2ДЗ, рассмотреть № 20Т и обратить внимание учащихся на вывод решения.

4 Рассмотрение теорем об измерении угла с вершиной внутри круга (теорема 5.5), угла с вершиной вне круга (теорема 5.6), угла между хордой и касательной (теорема 5.7) можно провести в форме беседы, в ходе которой последовательно решить з а д а ч и.

1. Докажите, что градусная мера угла, вершина которого лежит внутри окружности, равна полусумме градусных мер дуг, из которых одна заключена между его сторонами, а другая между продолжениями сторон.

2. Докажите, что градусная мера угла, вершина которого лежит вне окружности, равна полуразности градусных мер дуг, заключённых между его сторонами.

3. Докажите, что градусная мера угла, образованного касательной и хордой, равна половине градусной меры дуги, заключённой внутри него.

Далее решить № 579, 580 и 581.

5 Проверку домашнего задания по темам измерение углов, связанных с окружностью, можно провести в форме самостоятельной работы, которая содержит три задачи со свободным ответом.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — пункты: центральный угол в окружности, вписанный угол, измерение вписанного угла; № 2ДЗ и № 572, 577; дома — № 1—5В, № 568, 569, 575 и 578.

На втором уроке: в классе — пункты: угол с вершиной внутри круга, угол с вершиной вне круга, угол между хордой и касательной; № 579, 580 и 581; дома — № 6—8В, № 582, 586.

На третьем уроке: в классе — СР5; № 584, 585 и 587; дома — № 570, 571, 576 и № 391, 396.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Объясните, что такое центральный угол в окружности.
2. Объясните, как измеряется центральный угол в окружности.
3. Сформулируйте определение вписанного угла.
4. Сформулируйте и докажите теорему 5.3 об измерении вписанного угла.
5. Сформулируйте и докажите теорему 5.4 об измерении вписанного угла, опирающегося на диаметр окружности.
6. Сформулируйте и докажите теорему 5.5 об измерении угла с вершиной внутри круга.
7. Сформулируйте и докажите теорему 5.6 об измерении угла с вершиной вне круга.
8. Сформулируйте и докажите теорему 5.7 об измерении угла между хордой и касательной.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Вариант 1

1. Центральный угол на 75° больше вписанного, опирающегося на ту же дугу. Определите, чему равна градусная мера дуги, на которую опирается вписанный угол.

Ответ: ____________________

2. Точки A, B и C делят окружность на три части так, что $\cup AB : \cup BC : \cup AC = 3 : 7 : 8$ (рис. 182). Найдите градусную меру большего угла $\triangle ABC$.

Ответ: ____________________

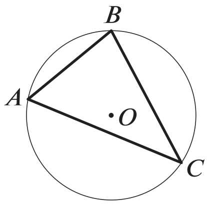


Рис. 182

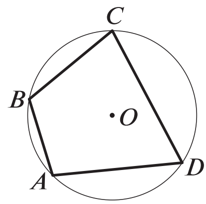


Рис. 183

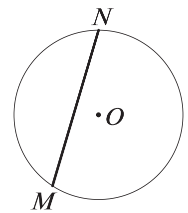


Рис. 184

3. Вершины четырёхугольника $ABCD$ (рис. 183) лежат на окружности и разбивают её на четыре дуги, градусные меры которых равны 56°, 74°, 97° и 133°. Найдите градусную меру меньшего угла четырёхугольника.

Ответ: ______________________________

Вариант 2

1. Хорда разбивает окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как 4 : 5 (рис. 184). Под каким углом видна эта хорда из точек большей дуги?

Ответ: ______________________________

2. Точки A, B и C делят окружность на три части так, что $\cup AB : \cup BC : \cup AC = 3 : 4 : 5$ (см. рис. 182). Найдите градусную меру большего угла $\triangle ABC$.

Ответ: ______________________________

3. В окружность с центром в точке O вписан четырёхугольник $ABCD$. Найдите больший угол этого четырёхугольника, если $\angle AOB = 40°$, $\angle BOC = 50°$, $\angle COD = 60°$ (см. рис. 183).

Ответ: ______________________________

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

Основная часть задач решается устно с выполнением чертежа на доске и в тетради. № 568, 569, 574, 576, 580 и 581.

572. Если точка O — центр окружности, то $\angle AOC = 60°$, $\triangle AOC$ — равносторонний.

577. В результате данного построения на каждом его шаге получаем равносторонний треугольник. Всего таких треугольников будет шесть, так как сумма углов при вершинах треугольников, лежащих против хорд, составляет центральный угол, которому соответствует вся окружность. Отсюда следует утверждение задачи.

578. Построим окружность радиуса AB. Построим на ней последовательность четырёх точек: первая точка берётся произвольно, а начиная со второй, каждая следующая удалена от предыдущей на расстояние, равное радиусу окружности. Расстояние между первой и четвёртой точками равно $2AB$. Доказательство аналогично задаче № 577.

579. Дуга, на которую опирается $\angle AMB$, равна $280°$(рис. 185), значит, $\angle AMB = 140°$.

580. *Способ 1.* Пусть $\angle ACD = x$, тогда $\angle BCA = 102° - x$, $\angle ABD = \angle ACD = x$, $\angle CBD = 72°$. Имеем $\angle BCM + \angle CBM + \angle BMC = (102° - x) + (72° - x) + 110° = 180°$, откуда $x = 52°$.

Способ 2. $\smile AD + \smile CD = 144°$, $\smile AD + \smile AB = 204°$, $\smile AD + \smile BC = 220°$. $\smile AD + \smile CD + \smile AD + \smile AB + \smile AD + \smile BC = 568°$. $2\smile AD + (\smile AB + \smile BC + \smile CD + \smile AD) = 568°$. $2\smile AD + 360° = 568°$. $\smile AD = 104°$, значит, $\angle ACD = 52°$ (рис. 186).

581. Обозначим градусную меру дуг AB, BC, CD и DA соответственно x_1, x_2, x_3 и x_4 (рис. 187). Тогда $x_2 - x_4 = 40°$, по условию задачи и в силу теоремы об измерении угла с вершиной вне круга. $x_2 + x_4 = 200°$, по условию задачи и в силу теоремы об измерении угла с вершиной внутри круга. $x_1 - x_3 = 80°$, по условию задачи и в силу теоремы об измерении угла с вершиной вне круга. $x_1 + x_3 = 160°$, по условию задачи и в силу теоремы об измерении угла с вершиной внутри круга.

Отсюда $x_1 = 120°$, $x_2 = 120°$, $x_3 = 40°$, $x_4 = 80°$. По теореме об измерении вписанного угла $\angle DAB = \frac{1}{2}(120° +$

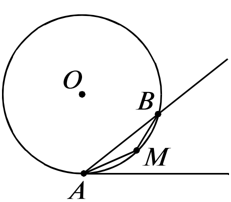


Рис. 185

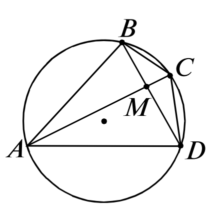


Рис. 186

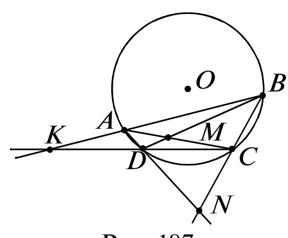


Рис. 187

$+ 40°) = 80°$, так как опирается на дугу BD, равную сумме дуг BC и DC, $\angle ABC = \frac{1}{2}(40° + 80°) = 60°$, так как опирается на дугу CA, равную сумме дуг DC и AD, $\angle BCD = \frac{1}{2}(120° + 80°) = 100°$, так как опирается на дугу DB, равную сумме дуг AB и AD, $\angle ADC = \frac{1}{2}(120° + 120°) = 120°$, так как опирается на дугу AC, равную сумме дуг AB и BC.

582. В первом случае сумма углов равна 180°, так как сумма дуг, на которую опираются данные углы, составляет полную окружность. Во втором — 540°, так как сумма дуг, на которую опираются данные углы, составляет три полных окружности.

584. Продолжим AM и BM за точку M до пересечения с окружностью в точках A_1 и B_1 (рис. 188). Дуга A_1B_1 симметрична дуге AB относительно диаметра. Поскольку $\angle AMB$ измеряется полусуммой равных дуг AB и A_1B_1, то он измеряется каждой из этих дуг, т. е. равен центральному углу AOB.

585. Пусть меньшая дуга $AC = x$, тогда бо́льшая $AC = 360° - x$. $\angle ABC = \frac{1}{2}(360° - x - x) = 120°$, отсюда $x = 60°$ и $\angle CDA = 30°$. Далее следует воспользоваться утверждением задачи № 572 (рис. 189).

586. Решение задачи понятно из рисунка 190. Так как общая точка лежит на линии центров, то радиусы, проведённые в точку касания в каждой из окружностей, лежат на одной прямой. А значит, углы $\angle OAB$ и $\angle O_1AC$ вертикальные.

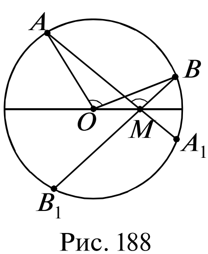


Рис. 188

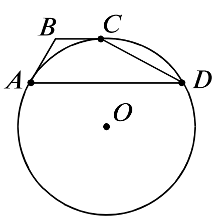


Рис. 189

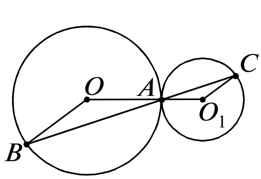


Рис. 190

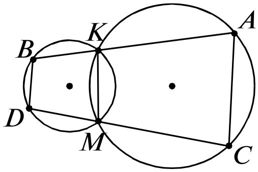


Рис. 191

587. Если точки пересечения окружностей K и M, а точки A, B, C и D расположены как на рисунке 191, то $\angle KMC + \angle KAC = 180°$ (их сумма измеряется половиной всей окружности). Значит, $\angle KMD = \angle KAC$. Точно так же $\angle KMD + \angle KBD = 180°$, т. е. $\angle KAC + \angle KBD = 180°$, что означает параллельность AC и BD. Разберите другие случаи взаимного расположения точек A, B, C, D, K, M.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Окружность разделена на две дуги, причём градусная мера одной из них в три раза больше градусной меры другой. Чему равны соответствующие этим дугам центральные углы?

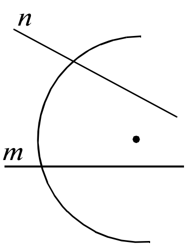


Рис. 192

2. На рисунке 192 прямые m и n пересекаются под углом 30°. Как определить, является ли $\angle(mn)$ вписанным в окружность, часть которой представлена на рисунке, а остальная часть недоступна?

3. На диаметре окружности построен равносторонний треугольник. Определите градусную меру дуг, на которые стороны треугольника делят полуокружность.

4. Из точки полуокружности проведены к концам диаметра две хорды. Одна из них равна 17 см и образует с диаметром угол, равный 45°. Найдите длину второй хорды.

5.3. Задачи на построение и геометрические места точек (3 ч)

Содержание параграфа за исключением пункта «Существование окружности, проходящей через три точки. Описанная окружность» составляет материал, не традиционный для курса планиметрии.

«Планируемые результаты обучения основного общего образования» в требованиях к геометрической подготовке учащихся требования к уровню изучения данного материала формулируются следующим образом: «Выпускник получит возможность научиться решать задачи на построение методом геометрического места точек». Тема должна быть изложена на уроке, однако как организовать контроль за усвоением данного материала и в каком объёме требовать от учащихся воспроизведения учебного материала, решать учителю.

Основная цель такого урока — познакомить учащихся с примерами решения задач на построение методом геометрических мест точек. Предлагаемая учебником система задач на построение позволяет объединить теоретические и практические аспекты курса, способствует установлению новых связей между отдельными частями учебного материала, активизирует процесс обучения и повышает к нему интерес ученика.

При изучении § 5.3 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках окружность, описанную около треугольника;

— формулировать и объяснять определение окружности, описанной около треугольника, формулировку теоремы об окружности, проходящей через три точки;

— доказывать теорему об окружности, проходящей через три точки;

— решать задачи с использованием определений окружности, описанной около треугольника, и теоремы об окружности, проходящей через три точки;

— иллюстрировать и объяснять метод геометрического места точек на примерах решения задач на построение.

Учащиеся получат возможность научиться решать задачи на построение методом геометрического места точек; ознакомиться с признаками принадлежности четырёх точек окружности.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

1 Решение задач «построение перпендикуляра к прямой», и «построение касательной» уже было рассмотрено в курсе 7 класса (задачи № 396 и 401 § 4.2), поэтому можно предложить учащимся самостоятельно разобрать решения, приведённые в тексте параграфа.

Затем в ходе беседы сравнить их с ранее предложенными решениями с помощью в о п р о с о в.

1. На чём основывается «построение перпендикуляра к прямой» в ***Задаче 1*** (§ 4.2)?

2. На чём основывается «построение перпендикуляра к прямой» в ***Задаче 1*** (§ 5.3)?

3. На чём основывается «построение касательной» в ***Задаче 6*** (§ 4.2)?

4. На чём основывается «построение касательной» в ***Задаче 2*** (§ 5.3)?

Устно решить № 1ДЗ и затем решить № 605 и 613 устно с выполнением чертежа на доске и в тетрадях. При обсуждении условия № 1ДЗ обратить внимание на вопрос задачи: «Найдите геометрическое место точек плоскости, из которых эти отрезки видны под равными углами». Это значит, что из каждой точки, принадлежащей искомому геометрическому месту точек, отрезки видны под равными углами, хотя для разных точек эти углы не обязательно равны.

(2) Формулируя теорему 5.8, обратить внимание учащихся на то, что в ней содержится два утверждения: существование окружности (через любые три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность) и её единственность (единственную окружность). Доказательство теоремы лучше провести учителю с минимальным участием школьников.

После введения определения окружности, описанной около треугольника, полезно обратить внимание учащихся на то, что в ходе доказательства теоремы 5.8 определяется способ построения окружности, проходящей через любые три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, т. е. способ построения описанной около треугольника окружности. При этом следует заметить, что точка пересечения серединных перпендикуляров является центром окружности, описанной около треугольника, и равноудалена от его вершин. На непосредственное применение свойств окружности, описанной около треугольника, устно № 2—3ДЗ.

(3) Так как доказательство теоремы 5.9 и решение ***Задачи 3*** достаточно трудны для восприятия учащихся, то лучше провести их полностью учителю. Включение учащихся в фронтальную работу при разборе данных утверждений может привести не только к значительным потерям времени, но и к тому, что от школьников ускользнёт основная идея и логическая последовательность рассуждений.

Затем решить устно с выполнением чертежа на доске и в тетрадях № 611, а после решения ***Задачи 3*** — № 602.

④ Метод ГМТ уже обсуждался в 7 классе при решении задач на построение. Поэтому пункт «Метод геометрических мест в задачах на построение» вполне доступен учащимся в качестве домашнего задания или самостоятельной работы с учебником на уроке с последующим обсуждением. № 26—36Т разного уровня сложности можно использовать для дифференцированной работы в классе и в качестве домашнего задания.

⑤ В № 606 необходимо рассмотреть несколько случаев различного расположения данных отрезков и их длины, решение следует организовать в форме беседы, сопровождая серией рисунков, иллюстрирующих решение. При обсуждении условия задачи следует обратить внимание учащихся на вопрос задачи: «Может ли искомое геометрическое место содержать более четырёх точек?» Это значит, что достаточно привести хотя бы один пример, когда число точек, принадлежащих искомому геометрическому месту точек, будет больше четырёх.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — пункты: построение перпендикуляра к прямой, построение касательной, существование окружности, проходящей через три точки, описанная окружность; № 1—2ДЗ, № 605, 613; дома — № 1—2В, № 600, 601 и 604.

На втором уроке: в классе — пункты: четыре точки на одной окружности; дуга, вмещающая данный угол; № 602 и 611; дома — № 3—5В; пункт «Метод геометрических мест в задачах на построение» для самостоятельной работы; № 607, 608.

На третьем уроке: в классе — СР6; № 606, 609 и 612; дома — № 603, 610.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

М 1. Сформулируйте и докажите теорему 5.8 о существовании окружности, проходящей через любые три точки плоскости.

2. Сформулируйте определение окружности, описанной около треугольника.

М 3. Сформулируйте и докажите теорему 5.9.

М 4. Сформулируйте и докажите теорему 5.10.

5. Объясните, как построить дугу, вмещающую данный угол.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Вариант 1

1. Определите, как расположен центр описанной около треугольника окружности, если его углы относятся, как 1 : 2 : 3.

2. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу описанной окружности.

Вариант 2

1. Определите, как расположен центр описанной около треугольника окружности, если его углы относятся, как 3 : 4 : 5.

2. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на одну из них.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

Основная часть задач параграфа решается устно с выполнением чертежа на доске и в тетради.

№ 597, 600—605, 608, 611 .

600. Внутренняя часть круга с диаметром AB.

601. Продолжим в искомом треугольнике медиану на расстояние, равное ей. Задача сводится к построению треугольника по стороне (удвоенная медиана) и двум прилежащим к ней углам.

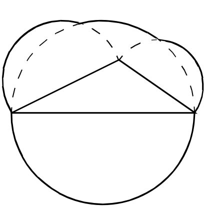


Рис. 193

602. Построим на каждой стороне как на диаметре окружность. Искомое геометрическое место состоит из четырёх дуг этих окружностей (рис. 193).

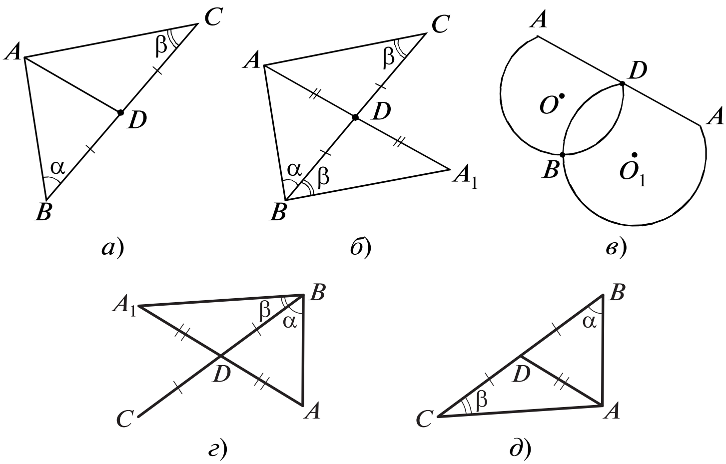


Рис. 194

603. Пусть $\triangle ABC$ искомый, в котором известны углы $\angle B = \alpha$ и $\angle C = \beta$ и медиана AD к стороне BC (рис. 194, *а*). На продолжении AD за точку D возьмём точку A_1 так, что $DA_1 = AD$ (рис. 194, *б*). В $\triangle AA_1B$ знаем AA_1 и углы $\angle ABD = \alpha$ и $\angle A_1BD = \angle ACB = \beta$. Точку B можно построить как пересечение двух дуг, построенных на AD и DA_1 и соответствующих $\angle B$ и $\angle C$ (рис. 194, *в*). Затем построим искомый треугольник (рис. 194, *г* и *д*).

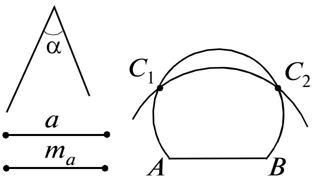
604. Окружность, концентрическая данной.

605. Серединный перпендикуляр к отрезку с концами в крайних точках данных отрезков.

606. Искомое геометрическое место может содержать более четырёх точек. Например, на рисунке 195 искомое геометрическое место точек состоит из шести точек. Более того, это геометрическое место может содержать бесконечное число точек. Это возможно в том случае, когда AB и CD — хорды одной окружности, которым соответствуют центральные углы, равные $2 \cdot 20° = 40°$ и $2 \cdot 30° = 60°$.

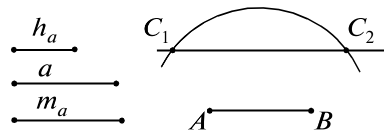
Рис. 195

607. Даны два отрезка a и m_a, один из которых равен стороне треугольника a,



а) *б*)

Рис. 196



а) *б*)

Рис. 197

а другой — медиане m_a, проведённой к этой стороне, и угол α, равный противолежащему данной стороне углу треугольника. Построим отрезок $AB = a$ (рис. 196). Вершина C искомого треугольника должна находиться, с одной стороны, на дуге, радиус которой равен m_a, а центром является середина отрезка AB, с другой — на дуге с концами A и B, вмещающей данный угол α. Построив эти две дуги, мы найдём точку C как точку пересечения двух дуг. Таких точек может быть две. И им соответствуют два равных треугольника. В случае касания треугольник — один. Построенные дуги могут и не пересекаться. В этом случае задача не имеет решения.

608. Даны три отрезка a, m_a и h_a, один из которых равен стороне треугольника, другой — медиане m_a, проведённой к этой стороне, а третий — высоте, опущенной на эту сторону. Построим отрезок $AB = a$ (рис. 197). Вершина C искомого треугольника должна находиться, с одной стороны, на дуге, радиус которой равен m_a, а центром является середина отрезка AB, с другой — на прямой, параллельной AB, проходящей на расстоянии h_a от AB. Построив эти прямую и дугу, найдём точку C как точку пересечения прямой и окружности. Таких точек может быть две, им соответствуют два равных треугольника. В случае касания такой треугольник один. Построенные прямая и дуга могут и не пересекаться. В этом случае задача не имеет решения.

609. Так как для любой точки B, принадлежащей искомому геометрическому месту точек, $\triangle ABC$ — прямоугольный ($\angle BAC = 90°$), то его гипотенуза BC равна $2AK$. Точки A и K — фиксированы, значит, и длина отрезка BC постоянна. Отсюда следует, что искомое гео-

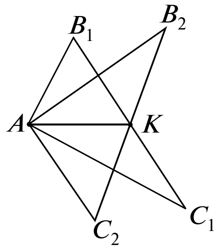


Рис. 198

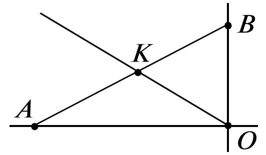


Рис. 199

метрическое место есть окружность с центром в K и радиусом AK (рис. 198).

610. Пусть O — точка пересечения прямых, точки A и B — концы отрезка, точка K — середина отрезка AB. Так как длина отрезка AB — постоянна, значит, и длина отрезка AK — постоянна, поскольку AK — медиана прямоугольного треугольника ABO. В силу того, что «окружность есть геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки», середина отрезка AB описывает окружность с центром в точке пересечения прямых и радиусом, равным половине отрезка (рис. 199).

611. Искомым геометрическим местом является окружность. Докажем это. Рассмотрим два положения точек C, D, C_1 и D_1, C_2 и D_2 (рис. 200). Им соответствуют точки M_1 и M_2. Если $\angle AM_1B$ измеряется полусуммой дуг AB и C_1D_1, при этом $\cup AB = 2\alpha$, $\cup C_1D_1 = 2\beta$, то $\angle AM_1B = \alpha + \beta$. Тогда $\angle AM_2B = (\pi - \alpha) - \beta$. Значит, точки A, B, M_1 и M_2 лежат на одной окружности, которая делится хордой AB на дуги, равные $2(\alpha + \beta)$ и $2\pi - 2(\alpha + \beta)$.

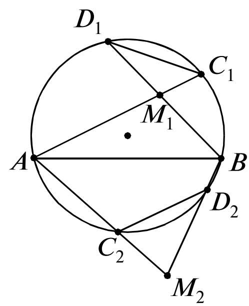


Рис. 200

612. Рассмотрим случай, когда отрезок AB пересекает прямую l. Обозначим точку пересечения через C. Найдутся две окружности, проходящие через A и B и касающиеся прямой l. Точки касания M_1 и M_2 расположены по разные стороны от точки C (рис. 201). Для любой точки M_0, лежащей на прямой l с той же стороны, что

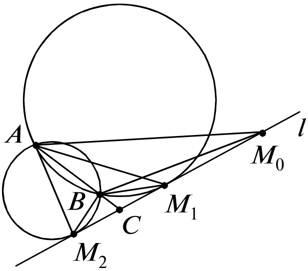


Рис. 201

и точка M_1, будет $\angle AM_0B < \angle AM_1B$. Для точек M_0 по другую сторону от точки C будет $\angle AM_0B < \angle AM_1B$. Искомой точкой M является одна из точек M_1 или M_2 (в нашем случае M_1).

613. Возьмём на дуге три точки K, L и M. Построим точки K_1, L_1 и M_1, симметричные им относительно A. Проведём окружность через точки K, L и M и построим касательные к этой окружности, проходящие через точку A. Эти касательные будут касаться и данной окружности.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

М **1.** В равнобедренном треугольнике ABC на основании CB от вершин отложены равные отрезки CD и BF. Докажите, что $\angle CAD = \angle BAF$.

М **2.** Докажите, что центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника, лежит на медиане, проведённой к основанию.

3. Найдите углы треугольника, если из центра описанной окружности его стороны видны под углами 100°, 120° и 140°.

4. На окружности отмечены точки A, B, C и D. Известно, что дуги AB, BC и CD равны 80°, 110° и 70° соответственно. Чему равен угол между прямыми AC и BD? (Укажите все возможности.)

5.4. Метод вспомогательной окружности. Задачи на вычисление и доказательство (3 ч)

Содержание § 5.4 за исключением пунктов «Теорема о высотах. Первое доказательство» и «Вписанная окружность треугольника» составляет материал, не традиционный для курса планиметрии. Так как одной из основных задач данного курса геометрии является задача обучения школьников методам решения геометрических задач, то в учебнике довольно часто встречаются одни и те же задачи, решаемые разными методами.

В параграфе такой задачей является «Теорема о высотах. Первое доказательство». Здесь, как заявлено, даётся первое доказательство, далее эта теорема, представленная здесь как задача, будет доказана с помощью других методов.

При изучении § 5.4 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках окружность, вписанную в треугольник;

— формулировать и объяснять определение окружности, вписанной в треугольник, формулировку теоремы о существовании окружности, вписанной в треугольник;

— доказывать теорему о существовании окружности, вписанной в треугольник;

— решать задачи с использованием определения окружности, вписанной в треугольник, и теоремы о существовании окружности, вписанной в треугольник;

— иллюстрировать и объяснять метод геометрического места точек на примерах решения задач на построение.

Учащиеся получат возможность научиться решать задачи на вычисление и доказательство методом вспомогательной окружности.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

(1) В решении ***Задачи 1*** утверждается, что «точки O, M, A, B и C согласно теореме 5.10 лежат на одной окружности с диаметром OM». Однако в условии теоремы рассматриваются не пять, а четыре точки. Поэтому формально следует заметить, что теорема 5.10 применяется последовательно сначала — к точкам O, M, A и B, а затем к точкам O, M, A и C. После этого следует сослаться на единственность окружности, проходящей через любые три точки плоскости, не лежащие на одной прямой (точки O, M, A — общие для обеих окружностей).

Для того чтобы учащиеся лучше усвоили метод вспомогательной окружности, полезно кратко записать ход доказательства ***Задачи 1***.

1. $\angle MBO = \angle MAO = 90°$, так как $MB \perp BO$ и $MA \perp AO$, значит, по теореме 5.10 точки O, M, A и B лежат на одной окружности с диаметром OM (рис. 242У).

2. $\angle MBO = \angle MCO = 90°$, так как $MB \perp BO$ и $MC \perp CO$, значит, по теореме 5.10 точки O, M, C и B лежат на одной окружности с диаметром OM.

3. Точки O, M, B — общие для обеих окружностей, тогда по теореме 5.8 окружности, полученные в пунктах 1 и 2, являются одной окружностью, на которой лежат точки O, M, A, B и C.

4. $\angle ABC = \angle AOC$, так как они опираются на общую хорду AC окружности с диаметром OM. Значит, $\angle ABC = 60°$.

5. Аналогично доказывается, что $\angle ACB = \angle AOB = 60°$.

6. $\triangle ACB$ — равносторонний треугольник.

Вообще, можно было бы и не ссылаться на теорему 5.10: то, что точки A, B и C лежат на окружности с диаметром OM, следует из того, что все углы OAM, OBM и OCM — прямые.

2 При решении ***Задачи 2*** полезно производить дополнительные построения на чертеже или воспользоваться заранее заготовленными рисунками (рис. 202). На рисунке 202, *а* отражено условие задачи.

Как и в случае решения ***Задачи 1***, для того, чтобы учащиеся лучше усвоили метод вспомогательной окружности, полезно записать п л а н решения.

1. $\angle A_1C_1C = \angle A_1AC$, как опирающиеся на общую дугу A_1C, что следует из того, что в силу теоремы 5.10 точки A, C, A_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром AC (рис. 202, *б*).

2. $\angle A_1BH = \angle A_1C_1H$, как опирающиеся на общую дугу A_1H, что следует из того, что в силу теоремы 5.10 точки B, H, A_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BH (рис. 202, *в*).

3. В $\triangle A_1C_1C$ и $\triangle CBB_1$: $\angle A_1C_1C = \angle CBB_1$, $\angle C$ — общий для обоих треугольников. Значит, $\angle AA_1C = \angle BBC_1 = 90°$.

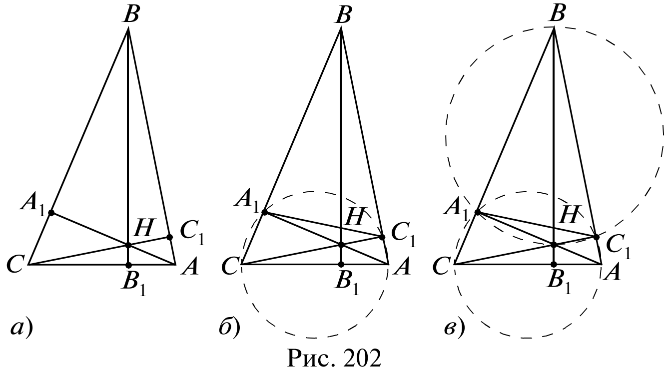


Рис. 202

③ Рекомендуется разобрать решения ***Задачи 1 и 2*** на одном уроке, и при подведении итогов следует сообщить учащимся, что метод вспомогательной окружности основывается на теоремах 5.9 и 5.10. При применении метода вспомогательной окружности устанавливается факт принадлежности точек некоторой окружности, что в дальнейшем ходе решения позволяет воспользоваться свойствами окружности.

④ Метод решения ***Задачи 3*** уже обсуждался в 7 классе при решении № 443 и 444 § 4.5, он основывается на известном учащимся факте: «касательные к окружности, выходящие из одной точки, равны».

⑤ Формулируя теорему 5.11, следует обратить внимание учащихся на то, что в ней содержатся два утверждения: существование окружности (у каждого треугольника существует вписанная окружность) и её единственность (единственная вписанная окружность). Затем обратить внимание учащихся на то, что в ходе доказательства теоремы 5.11 указывается способ построения окружности, вписанной в данный треугольник. При этом точка пересечения биссектрис является центром окружности, вписанной в треугольник, и равноудалена от его сторон.

На применение свойств окружности, вписанной в треугольник, устно решить задачи № 1—3ДЗ или подобрать задачи из № 614—620. Следует обратить внимание на № 619, в котором сформулировано полезное свойство равностороннего треугольника.

⑥ Полезно при задании домашней работы комментировать условия задач, объясняя, какой из изученных методов используется при их решении. Следует также учитывать, что задачи 634—637 очень трудоёмки, поэтому часть из них можно оставить для решения на резервном уроке или в конце учебного года при повторении.

При решении № 647 напомнить учащимся, что если при решении № 578 построение проводилось одним циркулем, то в данной задаче, наоборот, следует пользоваться только линейкой без применения циркуля.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — пункты: метод вспомогательной окружности, теорема о высотах; № 625 и 626; дома — повторить решение ***Задач 1 и 2***, № 621, 622, 623 и 624.

На втором уроке: в классе — пункты: окружности и касательные, вписанная окружность треугольника; № 640 и 645; дома — № 1—4В; № 634 (а), 635, 636 и 637 (а).

На третьем уроке: в классе — № 627, 639, 644 и 646; дома — № 634 (б), 637 (б), 638.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Объясните, что такое общая внешняя касательная к двум окружностям.
2. Объясните, что такое общая внутренняя касательная к двум окружностям.
3. Объясните, что такое вписанная окружность треугольника.
4. Сформулируйте и докажите теорему о вписанной окружности треугольника.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

№ 621, 623, 630, 635, 636.

622. Так как $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$, значит, $\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = 102° - 44° = 58°$, $\angle ABD = \angle ACD$ и точки B и C лежат по одну сторону от прямой AD, следовательно, по теореме 5.9 точки A, B, C и D лежат на одной окружности. $\angle DAC = \angle DBC = 44°$, так как опираются на одну дугу AD.

623. Так как $\angle OAM = \angle OBM = 90°$, следовательно, по теореме 5.10 точки A, B, O и M лежат на одной окружности с диаметром OM. Отсюда, используя теоремы о измерении углов, связанных с окружностью, находим углы $\triangle ABC$.

624. Так как $\angle OAM = \angle OBM = 90°$, значит, по теореме 5.10 точки O, M, A и B лежат на одной окружности с диаметром OM. Середина отрезка OM — точка P — центр этой окружности. $\triangle PAB$ — равнобедренный, $PA = PB$, значит, медиана, проведённая из вершины

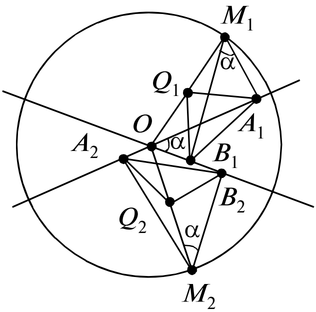


Рис. 203

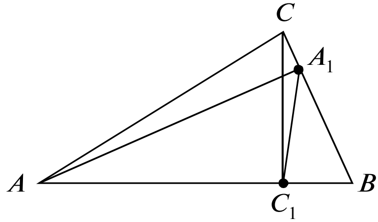


Рис. 204

равнобедренного треугольника к основанию AB, перпендикулярна AB.

625. $AB = 1$. См. решение № 626.

626. Пусть величина данного угла равна α, радиус окружности равен R, A и B — основания перпендикуляров, опущенных из M на стороны угла. В силу теоремы 5.10 точки O, M, A и B лежат на одной окружности с постоянным диаметром $OM = R$. В этой окружности угол, опирающийся на AB, равен α или $180° - \alpha$. Значит, величина AB — постоянна. На рисунке 203 показаны два возможных положения точки M: M_1 и M_2.

627. Точки A, A_1, C и C_1 лежат на одной окружности с диаметром AC. Если $\triangle ABC$ — остроугольный (рис. 204), то $\angle CAC_1 + \angle C_1A_1C = 180°$ (сумма углов измеряется половиной окружности). Значит, $\angle C_1A_1B = 180° - \angle C_1A_1C = \alpha$. Аналогично найдём $\angle A_1C_1B = \beta$. В случае, когда $\triangle ABC$ — тупоугольный, проводятся те же рассуждения.

630, 631, 632. Решение проводится методом, описанным в № 235.

634. а) и б). Пусть точка K — точка касания с прямой AC окружности, вписанной в $\triangle ABC$, а точка M — точка касания с прямой AC окружности, вписанной в $\triangle ADC$ (рис. 205). В соответствии с формулой, полученной при решении ***<u>Задачи 3</u>***, имеем:

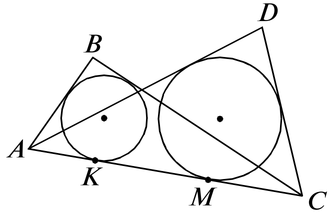


Рис. 205

$AK = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$, $AM = \frac{1}{2}(AC + AD - DC)$. Значит, $KM = \frac{1}{2}(BC + AD - AB - DC)$.

635. Пусть $ABCDE$ — данный пятиугольник и $AE = 5$. Обозначим касательные, выходящие из вершины A, через x. «Обойдём» пятиугольник, выражая последовательно длины касательных, проведённых соответственно из вершин, через x: B (равны $6 - x$), C (равны $7 - (6 - x) = 1 + x$), D (равны $8 - (1 + x) = 7 - x$), E (равны $9 - (7 - x) = 2 + x$). Получаем, что сторона AE точкой касания делится на отрезки x и $2 + x$. Из уравнения $x + (2 + x) = 5$ найдём $x = 1{,}5$.

636. Рассуждая так же, как и при решении задачи 635, получим, что сторона 4 разделена на отрезки x и $4 + x$, т. е. $x = 0$, что невозможно.

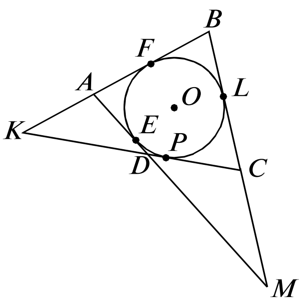


Рис. 206

637. Обозначим точки касания, как на рисунке 206. Докажем пункт в) (другие пункты доказываются точно так же). $KA + AM = (KF - AF) + (AE + EM)$. Учитывая равенство касательных, выходящих из одной точки, $KF = KP$, $AF = AE$, $EM = LM$, имеем $KA + AM = (KP - AF) + (AF + LM) = KP + LM = (KC - CP) + (LC + CM) = (KC - CP) + (CP + CM) = KC + CM$.

638. Для первой семиконечной звезды она равна 180°, а для второй 540°. Для доказательства построим большую окружность, внутри которой содержится наша звезда. Продолжим стороны каждого угла в обе стороны до пересечения с окружностью. Каждый угол измеряется полусуммой соответствующих дуг. Для первой звезды в сумму всех её углов каждая дуга окружности $\left(\text{с коэффициентом } \frac{1}{2}\right)$ войдёт ровно один раз. Значит, сумма углов в первом случае равна 180°. Во втором случае каждая дуга окружности будет учтена трижды. Сумма будет равна $\frac{1}{2}(3 \cdot 360°) = 540°$.

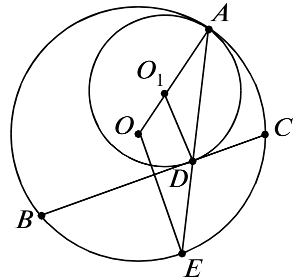


Рис. 207

639. Соединим O_1 — центр меньшей окружности с D — точкой касания и O — центр большей окружности с точкой E — серединой дуги BC (рис. 207). Точки A, O_1 и O расположены на одной прямой — линии центров. Кроме того, $O_1D \perp BC$, как радиус, проведённый в точку касания, и $OE \perp BC$, как радиус, проходящий через середину хорды. Значит, $O_1D \parallel OE$ и $\angle AO_1D = \angle AOE$, как соответственные. Так как $\triangle AO_1D$ и $\triangle AOE$ равнобедренные, у которых равны углы при вершинах O_1 и O. Отсюда следует, что $\angle O_1AD = \angle OAE$, т. е. точки A, D и E лежат на одной прямой.

640. В $\triangle ABC$ угол ACB равен 60°. Продолжим AM и BM до пересечения со сторонами треугольника BC (точка K) и AC (точка N) соответственно. Имеем $\angle AKC = 180° - \angle KAC - \angle ACK = 180° - 30° - 60° = 90°$. Точно также $\angle BNC = 90°$, т. е. M — точка пересечения высот треугольника ABC. Отсюда $\angle MBC = 20°$.

644. Как мы знаем (глава 4 § 4.3), наименьшее значение суммы $B_1M + C_1M$ достигается для такой (единственной) точки M_0 на прямой BC, для которой $\angle B_1M_0C = \angle C_1M_0B$. Докажем, что это равенство выполняется, если M_0 — основание A_1 высоты, опущенной из A (рис. 208). Точки B, A, B_1 и A_1 лежат на окружнос-

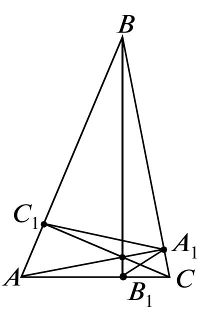


Рис. 208

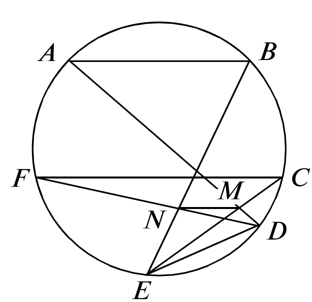


Рис. 209

ти с диаметром AB. Из этого следует, что $\angle B_1A_1C = \angle A$ ($\angle A + \angle BA_1B_1 = 180°$ и $\angle BA_1B_1 + \angle B_1A_1C = 180°$). Точно так же получим, что $\angle C_1A_1B = \angle A$.

645. См. решение предыдущей задачи.

648. Заметим, что точки E, D, M и N лежат на одной окружности (в случае, изображённом на рисунке 209, это следует из равенства $\angle END = \angle EMD$). Значит, $\angle NME = \angle NDE = \angle FDE = \angle FCE$. Это доказывает параллельность NM и FC.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Докажите, что центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, лежит на высоте, проведённой к основанию.

2. Докажите, что в равностороннем треугольнике высота треугольника равна трём радиусам вписанной окружности.

3. Два угла треугольника равны 80° и 70°. Под каким углом видна каждая его сторона из центра вписанной в него окружности?

4. Определите вид треугольника, если центр вписанной в него окружности совпадает с центром, описанной около него окружности.

Контрольная работа № 4

Вариант 1

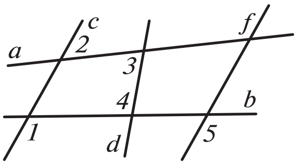


Рис. 210

1. Дано $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 4 \neq \angle 5$. Определите, какие из трёх прямых c, d и f параллельны (рис. 210).

А. $c \parallel d \nparallel f$. В. $c \parallel f \nparallel d$.
Б. $c \nparallel d \parallel f$. Г. $c \nparallel d \nparallel f$.

2. Угол между диаметром AB и хордой AC окружности равен 60°. Через точку C проведена касательная к окружности, которая пересекает прямую AB в точке D. Определите вид треугольника ACD.

А. Равнобедренный.
Б. Равносторонний.
В. Разносторонний.

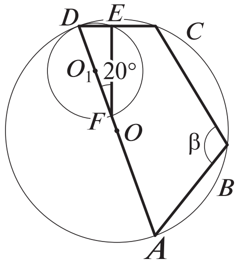


Рис. 211

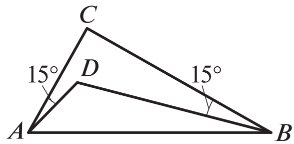


Рис. 212

3. Две окружности касаются в точке D. Угол между диаметром FD и хордой FE меньшей окружности равен 20°. Найдите градусную меру угла β (рис. 211).

Ответ: ________________________________

4. Внутри прямоугольного треугольника ABC ($\angle C$ — прямой) отмечена точка D такая, что $\angle CAD = \angle CBD = 15°$. Найдите угол ADB (рис. 212).

Ответ: ________________________________

5. Центр описанной около треугольника окружности лежит на его медиане. Докажите, что этот треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный.

6. Окружность с центром в точке O описана около четырёхугольника $ABCD$, стороны BC и AD которого параллельны. Докажите, что точка O лежит на прямой, проходящей через середины сторон AB и CD.

Вариант 2

1. Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 \neq \angle 4$. Определите, какие из трёх прямых c, d, e параллельны (рис. 213).

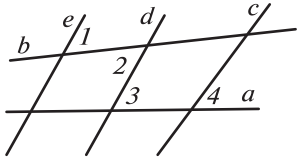


Рис. 213

А. $c \parallel d \nparallel e$.   В. $c \parallel e \nparallel d$.

Б. $c \nparallel d \parallel e$.   Г. $c \nparallel d \nparallel e$.

2. Угол между диаметром AB и хордой AC окружности равен 70°. Через точку C проведена касательная к окружности, которая пересекает прямую AB в точке D. Определите вид треугольника ACD.

А. Равнобедренный.

Б. Равносторонний.

В. Разносторонний.

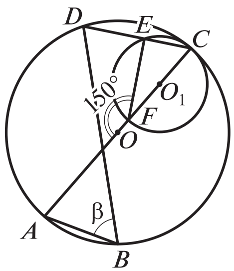


Рис. 214

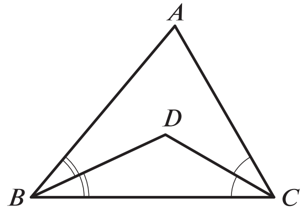


Рис. 215

3. Две окружности касаются внутренним образом в точке C (рис. 214). Линия центров AC проходит через точку касания C и образует с хордой FE $\angle AFE$, равный 150°. Найдите градусную меру угла β.

Ответ: ______________________

4. В $\triangle ABC$ угол BAC равен 64° (рис. 215). Биссектрисы углов ABC и ACB пересекаются в точке D. Найдите $\angle CDB$.

Ответ: ______________________

5. Докажите, что если треугольник — равнобедренный, то центр вписанной в этот треугольник окружности и центр описанной около этого треугольника окружности лежат на серединном перпендикуляре к основанию треугольника.

6. Две окружности касаются внешним образом в точке M, через которую проходит общая касательная. Прямая AB касается одной окружности в точке A, а другой окружности в точке B. Докажите, что точка M лежит на окружности с диаметром AB.

Глава 6
Подобие (20 ч)

Содержание главы составляют признаки и свойства четырёхугольников и теоремы о подобии треугольников. Как правило, эти темы в других курсах геометрии отстоят друг от друга достаточно далеко по времени, часто даже в разных классах. При этом содержание главы составляет материал, традиционный для любого курса планиметрии: четырёхугольники, пропорциональные отрезки, теорема Фалеса, подобие треугольников, признаки подобия треугольников. С помощью теоремы Фалеса доказываются важные свойства треугольника и трапеции: теоремы о средней линии треугольника и о средней линии трапеции.

Усвоение учащимися свойств и признаков изучаемых четырёхугольников, признаков подобия треугольников и формирование умения их применения являются одной из основных задач этой главы. Сведения о четырёхугольниках и подобие фигур широко применяются при изучении последующих разделов курса, а также в курсе стереометрии. Поэтому значительное внимание при изучении данной главы должно быть уделено решению задач, в ходе которых отрабатываются умения их применения, как в дальнейшем изучении математики, так и в практической деятельности.

В главе приведено большое количество задач, что даёт возможность учителю при планировании урока подбирать задачи, учитывая уровень подготовки класса. Часть задач можно использовать позднее при подготовке к контрольным работам, как тематическим, так и итоговой. Основная часть этих задач может быть решена устно с выполнением чертежа.

В планировании указано минимальное количество уроков, рекомендуемых для каждого фрагмента теоретического материала темы, и указан большой резерв времени. Это позволяет учителю скорректировать планирование в зависимости от уровня подготовки класса.

При изучении главы 6 ученики должны достичь следующих предметных результатов:

— распознавать на чертежах и изображать на чертежах и рисунках параллелограммы, прямоугольники, ромбы, трапеции, средние линии треугольников и трапеции;

— выделять в конфигурации, данной в условии задачи, подобные треугольники;

— иллюстрировать и объяснять основные свойства и признаки четырёхугольников, формулировки: теоремы Фалеса, теоремы о пропорциональных отрезках, теоремы о средней линии треугольника, теоремы о средней линии трапеции; признаков подобия треугольников;

— объяснять понятие подобия;

— применять при решении задач на вычисление и доказательство определения, свойства и признаки четырёхугольников; теорему Ферма и теорему о пропорциональных отрезках; теоремы о средней линии треугольника и о средней линии трапеции; алгебраический аппарат; признаки подобия треугольников;

— применять при решении задач на построение понятие подобия.

6.1. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат (3 ч)

Учебный материал параграфа группируется вокруг четырёхугольников, при этом доказательство почти всех теорем, а также решения многих задач ведётся с использованием признаков равенства треугольников. Так же активно применяются свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, и признаки параллельности прямых, теорема о сумме углов треугольника.

Исходя из авторской концепции в теоретической части параграфа, как, впрочем, и в теоретической части всего учебника, рассматриваются только те свойства изучаемых четырёхугольников, которые необходимы для построения курса геометрии. Значительное внимание должно быть уделено задачам, в ходе решения которых применяются определения, свойства и признаки четырёхугольников, а в результате их решения доказываются дополнительные свойства и признаки четырёхугольников (№ 670, 684, 685), которые в дальнейшем можно и нужно использовать для обоснования решения задач.

Уровень геометрической подготовки учащихся к моменту изучения данной темы и её содержание позволяют определить основную форму учебной деятельности, как беседа с активным привлечением школьников на всех этапах урока: при введении нового материала; его закреплении; решении задач.

В результате изучения § 6.1 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках параллелограммы, прямоугольники, ромбы, квадраты, трапеции;

— формулировать, иллюстрировать определения параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата и трапеции;

— формулировать, иллюстрировать и доказывать свойства и признаки параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата и трапеции;

— решать задачи на вычисление и доказательство, используя определения, свойства и признаки параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата и трапеции.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

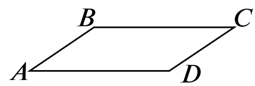


Рис. 216

(1) Определение параллелограмма вводится с опорой на рисунок 216. Следует обратить внимание учащихся на то, что определение параллелограмма позволяет сделать два в ы в о д а.

1. Если известно, что некоторый четырёхугольник является параллелограммом, то его противоположные стороны параллельны.

2. Если известно, что у некоторого четырёхугольника противоположные стороны попарно параллельны, то он является параллелограммом.

После введения понятия параллелограмма можно выполнить у п р а ж н е н и я.

М 1. При пересечении двух прямых a и b прямыми c и d получается четырёхугольник. Определите, в каком случае полученный четырёхугольник является параллелограммом: а) $a \parallel b$, $c \nparallel d$; б) $a \parallel b$, $c \parallel d$; в) $a \nparallel b$, $c \nparallel d$?

2. В $\triangle ABC$ параллельно сторонам AB и AC проведены прямые DG и FG. Определите вид четырёхугольника $AFGD$.

3. В параллелограмме $ABCD$ параллельно стороне AB проведена прямая FG. Определите вид четырёхугольника $ABFG$.

(2) При рассмотрении формулировки теоремы о свойствах и признаках параллелограмма следует обратить внимание учащихся на три свойства и соответствующие им три признака параллелограмма (табл. 1), которые между собой являются взаимообратными утверждениями.

Рекомендуется на доске сделать аналогичную запись. При проведении доказательства теоремы краткая запись доказательства каждого фрагмента делается под соответствующей формулировкой. В результате запись на доске будет представлять собой конспект доказательст-

Таблица 1

Свойства	Признаки
В любом параллелограмме: 1) противоположные стороны равны; 2) противоположные углы равны; 3) диагонали делятся пополам точкой пересечения	Если у четырёхугольника: 1) противоположные стороны равны; 2) противоположные углы равны; 3) диагонали делятся пополам точкой пересечения, то этот четырёхугольник — параллелограмм

ва теоремы. Это позволит лучше усвоить как содержание теоремы, так и способы доказательства каждого фрагмента.

Работу над теоремой лучше организовать в форме беседы, записи на доске должны появляться постепенно в процессе доказательств. В тетрадях учащимся достаточно сделать запись одного из пунктов 1)—3), т. е. одной из прямых теорем — доказательство свойства параллелограмма и обратной ей теоремы — признака параллелограмма.

На применение теоремы устно решить по готовым чертежам (см. табл. 1):

для пункта 1) № 2, 4, 5ДЗ и № 655;

для пункта 2) № 7, 9ДЗ и № 656, 657;

для пункта 3) № 12—16ДЗ.

Кроме того, очень полезно обсудить задачу № 670.

(3) Пункт «Прямоугольник» вполне доступен учащимся в качестве домашнего задания: в тетрадях законспектировать теорему 6.2 по образцу конспекта теоремы 6.1, сделанного в классе. При этом, комментируя задание, продиктовать в о п р о с ы, на которые при доказательстве теоремы 6.2 учащиеся должны дать ответы.

1. Почему перпендикуляры одной прямой параллельны? [Следует или из признака параллельности прямых, или из теоремы 2.4, изученной в 7 классе.]

2. При доказательстве свойства прямоугольника укажите три пары равных элементов треугольников BAD и CDA.

3. При доказательстве признака прямоугольника укажите три пары равных элементов треугольников BAD и CDA.

4 Работу над пунктом «Ромб» можно организовать в виде беседы по плану. Вначале, пока класс проверяет домашнее задание, предложить трём учащимся на доске решить задачи.

1. Докажите, что параллелограмм, все стороны которого равны, является ромбом.

2. Докажите, что параллелограмм, у которого диагонали перпендикулярны, является ромбом.

3. Докажите, что параллелограмм, у которого одна из диагоналей делит пополам каждый из углов, через которые она проходит, является ромбом.

Доказательства сформулированных в задачах утверждений могут отличаться от данных в учебнике. Это позволит обратить внимание учащихся на достаточно большой запас геометрических знаний, который они накопили и который позволяет им проводить обоснование одного и того же утверждения разными способами.

На применение теоремы 6.3 устно решить № 23ДЗ и № 656, 687.

5 После введения определения квадрата записать традиционную схему (рис. 217), из которой видно, что прямоугольник и ромб обладают всеми свойствами параллелограмма и, кроме того, имеют свои, только им присущие свойства, а квадрат является универсальным четырёхугольником, обладающим всеми свойствами как параллелограмма, так и прямоугольника и ромба. Затем устно решить № 24ДЗ.

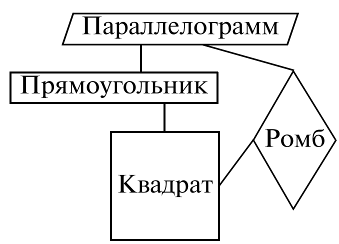


Рис. 217

6 Условия многих задач перед решением полезно прокомментировать.

В № 671 сказано «На плоскости расположены точки ...», это совершенно не означает, что они являются вершинами четырёхугольника. При проверке решения № 681 обратить внимание учащихся, что центры окружностей, описанных около треугольников ABC и CDA, могут как совпадать, так и не совпадать. Очень важно этот комментарий дать именно после того, как учащиеся попробуют решить задачу. При пояснении условия № 688 полезно, чтобы один из возможных способов разрезания параллелограмма показал учитель, а остальные предложил сделать учащимся.

(7) При проверке домашнего задания по теме «Прямоугольник» достаточно провести фронтальный опрос, в процессе которого использовать часть задач № 17—23ДЗ, решая их устно по готовым чертежам.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — пункт параллелограмм; № 2, 4, 5, 7, 9, 12—16ДЗ, № 655, 656, 657, 670; дома — № 1—4В, пункт прямоугольник для самостоятельной работы; № 652, 653, 671, 683, 688.

На втором уроке: в классе — пункты: ромб, квадрат; № 17—24ДЗ, № 654, 681, 682; дома — № 5—6В, № 664, 672, 673, 698.

На третьем уроке: в классе — СР7; № 25ДЗ, № 650, 651, 680; дома — № 697, 699.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Сформулируйте определение параллелограмма.
2. М Сформулируйте и докажите теорему о свойствах и признаках параллелограмма.
3. Сформулируйте определение прямоугольника.
4. М Сформулируйте и докажите теорему о свойствах и признаках прямоугольника.
5. Сформулируйте определение ромба.
6. М Сформулируйте и докажите теорему о свойствах и признаках ромба.
7. Сформулируйте определение квадрата.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 7

Вариант 1

1. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ (рис. 218) точка O является точкой пересечения диагоналей. Известно, что $AO = OC$, а стороны AB и CD параллельны. Определите вид четырёхугольника $ABCD$.

А. Параллелограмм. В. Ромб.
Б. Прямоугольник. Г. Квадрат.

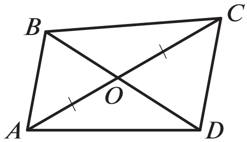


Рис. 218

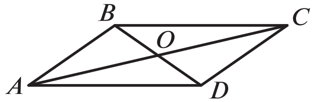


Рис. 219

2. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ равна 9 см, а его диагонали равны 14 см и 10 см. Точка O является точкой пересечения диагоналей. Найдите периметр $\triangle BOC$ (рис. 219).

А. 26 см. Б. 33 см. В. 21 см. Г. 28 см.

3. Найдите тупой угол ромба, в котором одна из его диагоналей равна стороне.

Ответ: ____________________

4. В равнобедренный треугольник вписан параллелограмм так, что угол параллелограмма совпадает с углом при вершине треугольника, а вершина противолежащего угла лежит на основании. Докажите, что периметр параллелограмма есть величина постоянная для данного треугольника.

Вариант 2

1. В каждой из двух окружностей с центрами в точке O (рис. 220) проведены диаметры AC и BD так, что $\angle AOB = 45°$. Определите вид четырёхугольника $ABCD$.

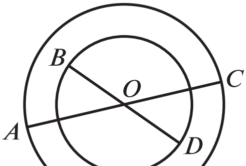


Рис. 220

А. Параллелограмм, отличный от прямоугольника и ромба.

Б. Прямоугольник.

В. Ромб.

Г. Квадрат.

2. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ равна 8 см. Периметр $\triangle ABD$ равен 23 см. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$ (см. рис. 219).

А. 46 см. Б. 31см. В. 32 см. Г. 30 см.

3. В параллелограмме $ABCD$ сумма двух углов равна 132°. Найдите градусную меру тупого угла параллелограмма.

Ответ: ____________________

4. В прямоугольный равнобедренный треугольник вписан прямоугольник так, что угол прямоугольника совпадает с углом при вершине треугольника, а вершина противолежащего угла лежит на гипотенузе. Докажите, что периметр прямоугольника есть величина постоянная для данного треугольника.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

Основная часть задач решается устно с выполнением чертежа на доске и в тетради. № 568, 569, 574, 576, 580 и 581.

651. У прямоугольника и ромба две оси симметрии, у квадрата — четыре.

652. Можно доказать, что если $ABCD$ — четырёхугольник, то из равенств $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle BAD = \angle BCD$ следует, что $ABCD$ — параллелограмм. Примером точек, удовлетворяющих условию, но не являющихся вершинами параллелограмма, служат точки A, B, C и D, лежащие на одной окружности, как на рисунке 221.

670. а) Нет, не верно. Проведём параллельные прямые BC и AD. Радиусом, равным $AB = CD$, проведём две окружности с центрами в точках A и D. На прямой BC получим четыре точки пересечения B_1 и B_2, C_1 и C_2 (рис. 222). Отсюда видно, что среди четырёхугольников, вершинами которых являются точки A и одна из пар точек B_1, B_2, C_1 и C_2, есть параллелограммы, но не все полученные четырёхугольники — параллелограммы (например, AB_1C_2D). б) Верно. Решение видно из рисунка 223. в) Нет, не верно. Покажем, что четырёхугольник,

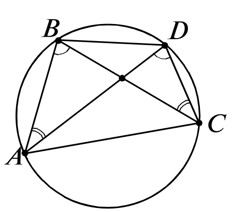


Рис. 221

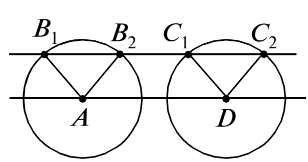


Рис. 222

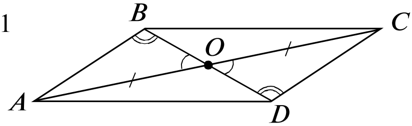


Рис. 223

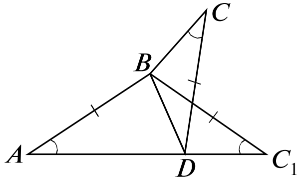


Рис. 224

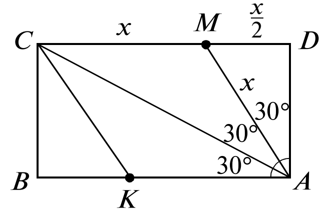


Рис. 225

удовлетворяющий условию, может и не быть параллелограммом. Рассмотрим равнобедренный $\triangle ABC_1$ ($AB = BC_1$), возьмём любую, кроме середины, точку D на его основании AC_1, затем построим $\triangle BDC$, равный $\triangle BDC_1$ ($BC = DC_1$, $DC = BC_1$) (рис. 230). Четырёхугольник $ABCD$ удовлетворяет условиям, но не является параллелограммом. г) Нет, не верно. Контрпример приведён на рисунке 224. д) Верно. Возьмём точку B_1, симметричную B относительно O. Из условий получим, что B_1 совпадает с D.

673. Поскольку по свойству ромба AC — биссектриса угла KAM (рис. 225), то $\angle MAC = \angle CAK = 30°$. В прямоугольном треугольнике MDA угол при вершине A равен 30°. Из этого следует, что $MD = \frac{1}{2}AM$. Если сторона ромба равна x, то $CM = x$, $DM = \frac{1}{2}x$. Имеем уравнение $x + \frac{1}{2}x = 3$.

680. 1) Так как все вершины вписанного в окружность четырёхугольника должны лежать на окружности, то его противолежащие углы должны дополнять друг друга до 180°. Этому условию из рассматриваемых четырёхугольников соответствуют квадрат и прямоугольник. 2) Геометрическое место точек центров окружностей, касающихся двух параллельных прямых, является прямая, параллельная данным и отстоящая от них на расстоянии $\frac{1}{2}h$, где h — расстояние между данными параллельными прямыми. Пусть расстояние между прямыми AB и CD (рис. 226) равно h_1, а между прямыми AD

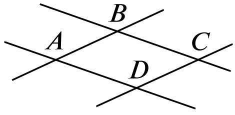


Рис. 226

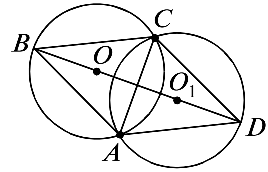


Рис. 227

и BC — h_2. Значит, радиус вписанной окружности равен с одной стороны $\frac{1}{2}h_1$, а с другой — $\frac{1}{2}h_2$, т. е. $h_1 = h_2$. Этому условию из рассматриваемых четырёхугольников соответствуют квадрат и ромб.

681. Сначала проанализируем условие задачи. Точки O и O_1 могут быть двумя разными точками или совпадать. 1) Пусть O и O_1 — центры описанных окружностей и две разные точки (рис. 227). Точки A и C лежат на обеих окружностях, значит, являются точками их пересечения. $CD = AD$, как радиусы одной окружности с центром в точке O. $BC = AB$, как радиусы одной окружности с центром в точке O_1. $CD = AB$, так как $ABCD$ — параллелограмм. Отсюда $ABCD$ — ромб. Следовательно, $\angle DBC = 40°$. 2) Пусть O и O_1 — центры описанных окружностей совпадают, значит, точки A, B, C и D лежат на одной окружности. Значит, $ABCD$ — прямоугольник. Следовательно, $\angle DBC = 50°$.

682. Пусть M — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ (рис. 228). Так как углы, вписанные в одну окружность и опирающиеся на равные хорды, либо равны, либо в сумме составляют 180°, то и углы, вписанные в равные окружности и опирающиеся на равные хорды, либо равны, либо в сумме составляют 180°. По условию окружности, описанные около $\triangle ABM$ и $\triangle ADM$, равны. Но сумма углов ABM и ADM не может равняться 180°. Значит, $\angle ABM = \angle ADM$, $AB = AD$.

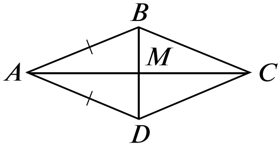


Рис. 228

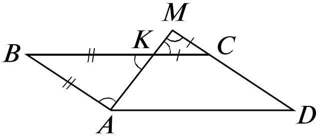


Рис. 229

683. Решение понятно из рисунка 229. Достаточно доказать, что $CM = CK$.

686. Задача имеет восемь решений. Стороны исходного параллелограмма равны 1 и 5; 4 и 5; 3 и 7; 4 и 7; 3 и 8; 5 и 8; 5 и 7; 2 и 7. Самое удобное — решать задачу с конца. Выяснить сначала, какие параллелограммы могут быть на предпоследнем шаге, затем на предыдущем и т. д.

697. Пусть угол A ромба равен α. Рассмотрим случай, когда $60° \leqslant \alpha < 120°$. Имеем (рис. 230): $\angle BAK = \alpha - 60°$, $\angle KBA = 90° - \frac{1}{2}\alpha - 60° = 120° - \frac{1}{2}\alpha$, $\angle CBK = \angle ABC - \angle KBA = (180° - \alpha) - \left(120° - \frac{1}{2}\alpha\right) = 60° - \frac{1}{2}\alpha$. С другой стороны, $\angle BCM = \alpha + 60°$, $\angle CBM = 90° - \frac{1}{2}(\alpha + 60°) = 60° - \frac{1}{2}\alpha$. Из равенства $\angle CBK$ и $\angle CBM$ заключаем, что точки B, K и M лежат на одной прямой.

698. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$; $KLMN$ — четырёхугольник, образованный при пересечении его биссектрис (рис. 231). То, что $KLMN$ — прямоугольник, следует из перпендикулярности двух соседних биссектрис. Пусть биссектрисы углов B и D пересекают противоположные стороны в точках E и F соответственно. $AB = AE$, поскольку $\angle AEB = \angle EBC = \angle EBA$. K — середина BE. Точно так же M — середина DF. Отрезок KM параллелен AD и BC и равен $ED = AD - AB$.

700. Предположим, что это не так. Пусть KH пересекает прямую DB в точке F. Тогда точки M, P и F прина-

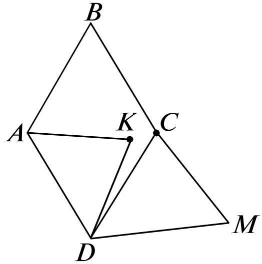


Рис. 230

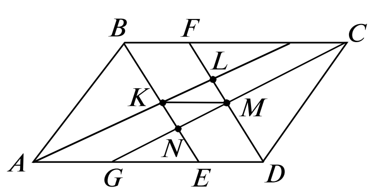


Рис. 231

длежат двум плоскостям BCD и $KPMH$, а значит, лежат на одной прямой, т. е. прямые KH и MP пересекаются в точке F.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса угла A, которая пересекает прямую BC в точке F. Докажите, что треугольник ABF равнобедренный.

2. Стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ равны 9 см и 6 см. Чему равны стороны CD и AD?

3. Стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ равны 9 см и 6 см. Чему равен периметр параллелограмма $ABCD$?

4. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 38 см. Чему равна сумма двух соседних сторон параллелограмма?

5. Периметр параллелограмма равен 28 см, одна из сторон параллелограмма равна 9 см. Определите все стороны параллелограмма.

6. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 43°$. Найдите градусную меру остальных углов параллелограмма.

7. В параллелограмме сумма двух противолежащих углов равна 132°. Найдите градусную меру каждого из этих углов.

8. В параллелограмме сумма двух углов равна 120°. Могут ли эти углы прилежать к одной стороне параллелограмма?

9. Известно, что в параллелограмме один угол на 12° меньше другого. Могут ли эти углы быть противолежащими?

10. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD равна 12 см. O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Чему равен отрезок DO?

11. O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Чему равна диагональ AC, если отрезок $AO = 9$ см?

12. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ равна 9 см, а его диагонали равны 14 см и 10 см. O — точка пересечения диагоналей. Чему равен периметр $\triangle AOD$?

13. В четырёхугольнике $ABCD$ $AC = 12$ см; $BD = 8$ см; $BO = 4$ см; $AO = 6$ см. Определите вид четырёхугольника $ABCD$.

14. В $\triangle ABC$ проведена медиана BF. На её продолжении за точку F отложен отрезок FD, равный BF

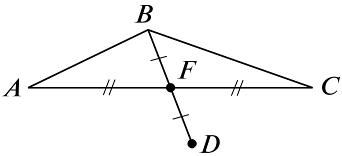


Рис. 232

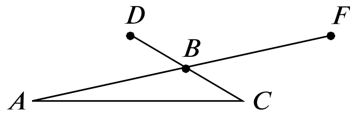


Рис. 233

(рис. 232). Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

15. В $\triangle ABC$ стороны AB и BC продолжены за точку B. На их продолжении отложены отрезки $BF = AB$ и $BD = CB$ (рис. 233). Докажите, что четырёхугольник $ADFC$ — параллелограмм.

16. В каждой из двух концентрических окружностей проведён диаметр AC и BD соответственно. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм (см. рис. 220).

17. В прямоугольнике $ABCD$ диагональ AC образует со стороной AD угол, равный 37°. Найдите градусную меру $\angle ACD$.

18. В параллелограмме $KLMN$ $\angle LKM = \angle MNL$. Определите, является ли параллелограмм $KLMN$ прямоугольником.

19. Докажите, что если в четырёхугольнике три угла прямые, то он является прямоугольником.

20. $ABCD$ — прямоугольник. O — точка пересечения диагоналей. Докажите, что $\angle AOB$ — равнобедренный.

21. Периметр прямоугольника равен 17 см. Найдите сумму расстояний от точки K до всех его сторон (рис. 234).

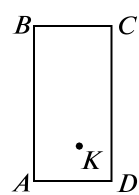


Рис. 234

22. Две окружности с центрами в точках O и O_1 и равными радиусами пересекаются в точках A и B. Докажите, что четырёхугольник AO_1BO — параллелограмм.

23. Сторона ромба равна 18 см, а один из углов равен 150°. Найдите расстояние между его противолежащими сторонами.

24. Докажите, что ромб, у которого один угол — прямой, является квадратом.

25. Докажите, что точка пересечения диагоналей ромба равноудалена от его сторон.

6.2. Теорема Фалеса и следствия из неё (4 ч)

Теорема Фалеса, теорема о средней линии треугольника, теорема о средней линии трапеции, теорема о пропорциональных отрезках, рассматриваемые в параграфе, — вопросы традиционные. Теорема Фалеса в данном курсе используется для доказательства теоремы о средней линии треугольника и теоремы о пропорциональных отрезках. Кроме того, она позволяет значительно расширить круг задач на вычисление и доказательство.

При изучении § 6.2 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— выделять на чертеже, сделанном по условию задачи, конфигурацию, позволяющую применять теорему Фалеса;

— иллюстрировать и объяснять определения средней линии треугольника и средней линии трапеции;

— иллюстрировать, объяснять и доказывать: теорему Фалеса, теорему о пропорциональных отрезках, теорему о средней линии треугольника и теорему о средней линии трапеции;

— применять при решении задач на вычисление и доказательство: определения средней линии треугольника и средней линии трапеции; теорему Фалеса и теорему о пропорциональных отрезках; теоремы о средней линии треугольника и о средней линии трапеции; алгебраический аппарат.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

1 Рассмотрение теоремы Фалеса можно сопроводить краткой записью основных этапов доказательства (рис. 276У).

1. Параллелограммы $AB_2B_1A_1$ и $CD_2D_1C_1$.

2. $\triangle ABB_2 = \triangle CDD_2$.

3. $A_1B_1 = C_1D_1$.

Для закрепления теоремы Фалеса использовать следующие упражнения по готовым чертежам.

1. По рисунку 235. Дано: $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$;
$A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$;
$OB_4 = 28$ см.

Найти: OB_1; OB_2; OB_3.

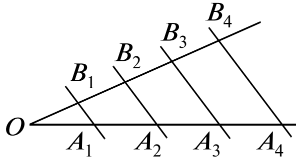


Рис. 235

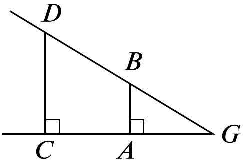


Рис. 236

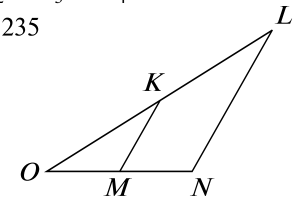


Рис. 237

2. По рисунку 236. Дано: $\angle DCG = \angle BAG = 90°$;
$GB = BD = 7$ см; $AC = 4$ см.
Найти: AG.

3. По рисунку 237: Дано: $\angle KMO = \angle LNO = 116°$;
$OM = MN = 8$ см; $OK = 13$ см.
Найти: KL.

На непосредственное применение теоремы Фалеса фронтально решить № 701—703.

(2) Для проверки усвоения учащимися определения средней линии треугольника и умения распознавать её на чертежах и рисунках в стандартных ситуациях можно выполнить з а д а н и я по готовым чертежам (рис. 238, включив в набор контрпримеры в) и д)).

1. Среди треугольников, приведённых на рисунках, найдите треугольники, в которых проведена средняя линия треугольника.

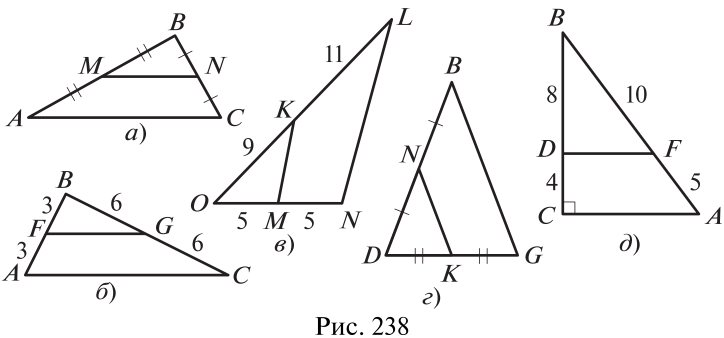


Рис. 238

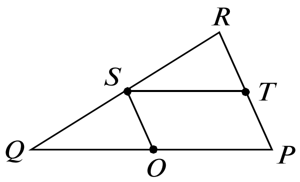


Рис. 239

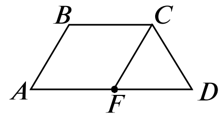


Рис. 240

2. Определите, является ли отрезок MN на рисунке 238, *а* средней линией треугольника, и объясните почему.

3. Определите, является ли отрезок DF на рисунке 238, *д* средней линией треугольника, и объясните почему.

4. На рисунке 238, *г* отрезок KN является средней линей $\triangle DBG$, $DB = 14$ см, $DG = 10$ см. Чему равны отрезка DK, KG, DN, NB?

5. Сколько средних линий можно построить в данном треугольнике?

6. ST и SO — средние линии треугольника QRP (рис. 239). Определите, является ли отрезок OT средней линией данного треугольника.

На применение определения средней линии треугольника устно решить № 725, № 1—3ДЗ, № 707, 723.

(3) Перед введением понятия трапеции полезно вспомнить определение параллелограмма. У параллелограмма по определению противоположные стороны параллельны. Теперь рассмотрим такой четырёхугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие — нет, т. е. трапецию. На закрепление понятия — у п р а ж н е н и я по готовым чертежам.

1. В трапеции $ABCD$ проведите прямую CF, параллельную AB. Определите вид четырёхугольника $ABCF$ (рис. 240).

2. В трапеции $ABCD$ углы, прилежащие к стороне AD, равны 74° и 81°. Определите углы, прилежащие к стороне BC.

3. Средняя линия равностороннего треугольника отсекает от него четырёхугольник. Определите вид полученного четырёхугольника и найдите его стороны, если сторона треугольника равна 8.

(4) Для закрепления понятия равнобочной трапеции фронтально по готовому чертежу решить з а д а ч у:

«Докажите, что в равнобочной трапеции $ABCD$ высоты BK и CL отсекают на основании AD равные отрезки AK и LD (рис. 241)».

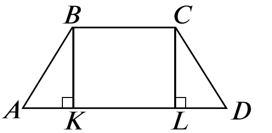


Рис. 241

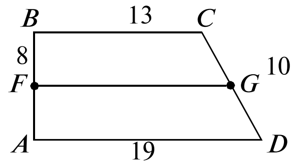


Рис. 242

Затем отметить, что в математической литературе термин равнобочной трапеции является неустановившимся, поэтому такую трапецию называют и равнобедренной, и равнобокой.

(5) На закрепление теоремы о средней линии трапеции устно по готовому чертежу решить з а д а ч и.

1. В трапеции $ABCD$ стороны равны: $AB = 8$ см, $BC = 13$ см, $CD = 10$ см, $AD = 19$ см. FG — средняя линия трапеции. Найдите стороны трапеции $AFGD$ (рис. 242).

2. В трапеции, одно из оснований которой равно 5 см, проведена средняя линия, длина которой равна 6 см. Чему равно другое основание трапеции?

3. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 12$ см и $BC = 8$ см проведена средняя линия ML, которая пересекает диагональ AC в точке K. Чему равны отрезки MK и KL (рис. 243)?

4. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекают среднюю линию RP в точках M и N. Докажите, что $RM = NP$ (рис. 244).

5. Докажите, что в равнобочной трапеции проекция диагонали на основание трапеции равна средней линии трапеции.

(6) Доказательство теоремы о пропорциональных отрезках, приведённое в учебнике, в силу объективных причин является достаточно трудным. Можно рекомендовать изложение доказательства провести учителю в виде фрагмента лекции (воспроизведения доказатель-

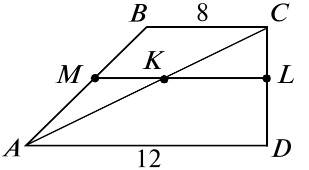


Рис. 243

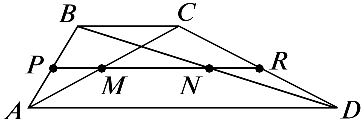


Рис. 244

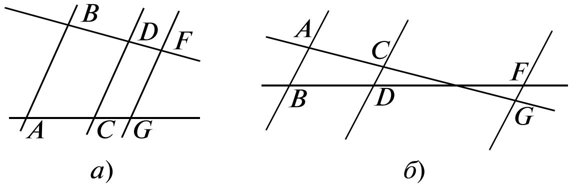


Рис. 245

ства теоремы от всех учащихся можно не требовать) и сделать замечание о том, что данная теорема, а также и теорема Фалеса, справедливы и в случае, когда речь идёт не о сторонах угла, а просто о двух прямых, например, как в следующей задаче.

По рисунку 245. *Дано*: $AB \parallel CD \parallel FG$;
$CG = 4$ см;
$DF = 5$ см;
$BD = 10$ см.

Найти: AC.

На прямое применение теоремы о пропорциональных отрезках решить № 739 и рассмотреть № 77—80Т, в которых исследуются конфигурации, образованные двумя четырёхугольниками (такие задачи редко попадают в учебники).

7 При решении № 716—719 использовать результат решения № 708, а при решении № 731, 733—735 — № 730. Полезно при изучении темы или при повторении рассмотреть решения № 708—710, 716—719, 723.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — пункты: теорема Фалеса, теорема о средней линии треугольника; № 1—4ДЗ, № 701—703, 707, 708, 723, 725 и 737; дома — № 1—3В; № 707, 708, 717 и 726.

На втором уроке: в классе — пункт: трапеция; № 730, 733 и 735; дома — № 4—6В, № 727, 731, 734 и 743.

На третьем уроке: в классе — пункты: пропорциональные отрезки, теорема о пропорциональных отрезках; № 739 и 751; дома — № 7, 8В; № 724, 740 и 745.

На четвёртом уроке: в классе — № 718, 752—756; дома — № 719, 760, 761 и 762.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Сформулируйте и докажите теорему Фалеса.
2. Сформулируйте определение средней линии треугольника.
3. Сформулируйте и докажите теорему о средней линии треугольника.
4. Сформулируйте определение трапеции.
5. Сформулируйте определение средней линии трапеции.
6. Сформулируйте и докажите теорему о средней линии трапеции.
7. Объясните, что означает понятие «отношение отрезков».
8. Сформулируйте теорему о пропорциональных отрезках.

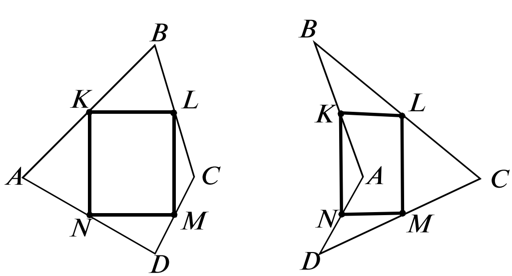
УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

Основная часть задач параграфа решается устно с выполнением чертежа на доске и в тетради. № 708, 713, 727, 730, 734, 735 и 737.

708. Обратите внимание, что утверждение верно для любых четырёхугольников — выпуклых и невыпуклых (рис. 246).

718. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, являются в силу задачи 708 диагоналями параллелограмма. Если у параллелограмма диагонали перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб. Его стороны равны, следовательно, диагонали исходного четырёхугольника равны.

719. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, являются в силу № 708 диагоналями параллелограмма. Если у параллелограмма диагонали равны, то этот параллелограмм — прямоугольник. Его стороны параллельны диагоналям



а) *б*)

Рис. 246

исходного четырёхугольника, следовательно, они перпендикулярны.

724. Проведите через точку K прямую, параллельную AB, и используйте теорему 6.7.

725. Средняя линия, параллельная BC.

726. Любой прямоугольный треугольник можно разрезать на четыре равных треугольника двумя различными способами: средними линиями и прямыми, выходящими из середины гипотенузы.

734. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC. Проведём через вершину B прямую, параллельную CD, и обозначим через M точку её пересечения с AD. В $\triangle ABM$ известны все стороны. Построим его. Через вершину B проведём прямую, параллельную основанию AB, и отложим на ней от точки B отрезок, равный b, получим точку C. А на прямой AM от точки A — отрезок, равный a, получим точку D. Точки A, B, C и D являются вершинами искомой трапеции.

735. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC. Проведём через B прямую, параллельную AC, и обозначим точку её пересечения с прямой AD через K. В $\triangle KBD$ известны все стороны, и его можно построить.

736. В случае, изображённом на рисунке 247, имеем: $\angle BCM + \angle BKM = (180° - \angle ADM) + (180° - \angle AKM) = 360° - (\angle ADM + \angle AKM) = 360° - 180° = 180°$. А это означает, что точки B, K, C и M лежат на одной окружности. Точно так же рассматриваются другие случаи расположения точек K и M на прямых AB и CD.

737. Проведём через конец A отрезка AB луч и отложим на нём равные отрезки $AK = KL = LM$ (рис. 248). Через точки K и L проведём прямые, параллельные BM. Эти прямые разделят AB на три равные части.

740. Решение задачи следует из рисунка 249. Можно предложить и другой подход к решению задачи. Обозначим искомые отрезки через x и y. Тогда их можно

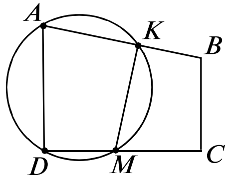


Рис. 247

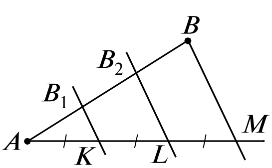


Рис. 248

найти из системы уравнений:

$$\begin{cases} a + y = 2x, \\ b + x = 2y. \end{cases}$$

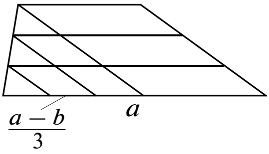


Рис. 249

743. Биссектриса угла A пересекает боковую сторону CD. Это следует из того, что эта биссектриса пересекает прямую BC в точке K, для которой $BK = AB = 5$, $= BC = 4$, $5 > 4$.

744. Пусть K и M — середины AB и CD, P — середина BD. Тогда $KP = \frac{1}{2}AD$, $PM = \frac{1}{2}BC$ (KP и PM — средние линии в $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$). По условию, $KM = \frac{1}{2}(AD + BC)$. Итак, $KP + PM = KM$. Значит, точка P лежит на отрезке KM, при этом $KM \parallel AD$ и $KM \parallel BC$, т. е. $AD \parallel BC$.

745. Для решения задачи достаточно выписать равенства отношений соответствующих отрезков:

$$\frac{AM_1}{M_1B} = \frac{CM_2}{M_2B};\ \frac{CM_2}{M_2B} = \frac{CM_3}{M_3B};\ \frac{CM_3}{M_3D} = \frac{AM_4}{M_4D};\ \frac{AM_4}{M_4D} = \frac{AM_5}{M_5B}.$$

Получим равенство: $\frac{AM_1}{M_1B} = \frac{CM_2}{M_2B} = \frac{CM_3}{M_3D} = \frac{AM_4}{M_4D} = \frac{AM_5}{M_5B}$,

отсюда $\frac{AM_1}{M_1B} = \frac{AM_5}{M_5B}$. Точка M_5 делит отрезок AB в том же отношении, что и точка M_1. Значит, точки M_1 и M_5 совпадают (рис. 250).

751. Решение задачи аналогично решению № 745.

752. Из условия задачи следует, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности (рис. 251). Теперь из равенства углов $\angle ACB$ и $\angle CAD$ будет следовать $AB = CD$.

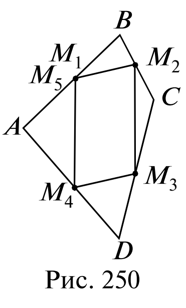


Рис. 250

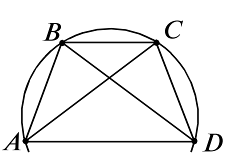


Рис. 251

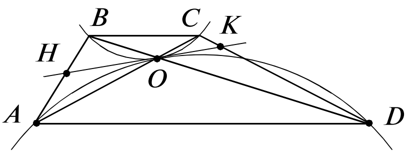


Рис. 252

753. Через точку O проведём касательную OK к окружности, описанной около $\triangle AOD$ (рис. 252). Угол между касательной и хордой равен половине дуги OD и $\angle OAD$ равен половине этой же дуги. $\angle BOH = \angle KOD$, как вертикальные. Значит, $\angle BOH = \angle OAD = \angle OCB$. Таким образом, прямая HK касается и окружности, описанной около $\triangle BOC$, т. е. указанные окружности касаются друг друга.

756. Продолжим до пересечения в точке K боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$. Если M и N — середины AD и BC, то точки K, M и N лежат на одной прямой. При этом $KN = \frac{1}{2}AD$, $KM = \frac{1}{2}BC$, как медианы соответствующих прямоугольных треугольников. Значит, $MN = \frac{1}{2}(AD - BC)$.

760. Пусть L и K соответственно середины AB и CB, прямая, проходящая через M параллельно CA, пересекает CL точке N (рис. 253). Имеем (поскольку $KL \parallel AC$)

$$\frac{CN}{CL} = \frac{CM}{CK} = 2\frac{CM}{CB} = \frac{CP}{CA}.$$

Из равенства $\frac{CN}{CL} = \frac{CP}{CA}$ следует параллельность NP и AB.

761. См. рисунок 254.

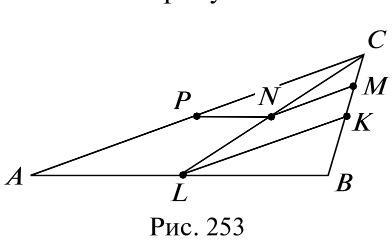


Рис. 253

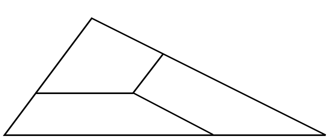


Рис. 254

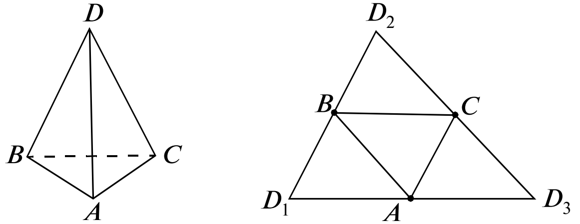


Рис. 255

762. По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{BK}{AB} = \frac{KC}{CM} = \frac{AD}{DM}$. Значит, $BK - DM = AB - AD$.

764. Рассмотрим пирамиду $ABCD$, у которой сумма углов при вершинах A, B и C равна 180°. Разрежем поверхность пирамиды по рёбрам DA, DB и DC и развернём (рис. 255). Получим $\triangle ABC$, к которому прилегают треугольники ABD_1, BCD_2, CAD_3 (вершине D пирамиды соответствуют три точки D_1, D_2 и D_3). Из условия задачи следует, что точки A, B и C являются серединами отрезков D_1D_3, D_1D_2 и D_2D_3. Значит, все $\triangle ABC$, ABD_1, ABD_2, CAD_3 равны между собой.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. В $\triangle QRP$ проведены средние линии ST, OT и OS. Докажите, что $\triangle QSO$, SRT, OTP и TOS равны.

2. В $\triangle QRP$ отмечены точки S, T и O, которые являются серединами сторон QR, RP и QP соответственно. Докажите, что $QSTO$ — параллелограмм.

3. В равностороннем $\triangle QRP$ отмечены точки S, T и O, которые являются серединами сторон QR, RP и QP соответственно. Найдите периметр параллелограмма $QSTO$, если периметр $\triangle SRT$ равен 27.

4. Сумма диагоналей четырёхугольника равна 26. Найдите периметр четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного.

5. Диагонали трапеции делят её среднюю линию на три равные части. Как относятся основания этой трапеции?

6. Докажите, что середины сторон равнобочной трапеции являются вершинами ромба.

6.3. Подобные треугольники. Признаки подобия треугольников (3 ч)

Тема параграфа в определённом смысле является центральной темой курса геометрии. Здесь рассматривается подобие фигур, которое является одним из основных свойств нашего пространства. Изучение геометрических свойств подобия начинается с изучения подобия треугольников. И это не случайно: свойства подобных треугольников будут многократно использоваться во всём курсе геометрии.

При изучении подобия треугольников необходимо уделить значительное время решению задач, направленных на формирование умений доказывать подобие треугольников с опорой на признаки их подобия, а также использовать подобие как инструментарий при решении задач на вычисление, доказательство и построение.

Заметим, что названия признаков подобия треугольников в учебнике авторские: первым признаком подобия треугольников общепринято называть подобие по равенству двух углов, а здесь этот признак определяется, как второй, и наоборот.

При изучении § 6.3 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— выделять в конфигурации, данной в условии задачи, подобные треугольники;

— иллюстрировать, объяснять и доказывать признаки и свойства подобных треугольников;

— объяснять понятие подобия;

— применять при решении задач на вычисление и доказательство признаки и свойства подобия треугольников; алгебраический аппарат.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

1 При введении определения подобных треугольников важно, указывая подобные треугольники, установить соответствие равных углов для того, чтобы правильно записывать пропорциональность сторон.

Используя определение подобных треугольников при решении задач, из подобия двух треугольников

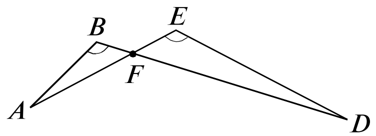


Рис. 256

можно сделать вывод о равенстве в данных треугольниках соответственных углов и пропорциональности соответственных сторон. На закрепление этого понятия использовать упражнения.

1. $\triangle ABF$ и $\triangle DEF$ подобны. Запишите отношение соответствующих сторон, используя данные рисунка 256.

2. $\triangle ABC$ и $\triangle MNL$ подобны и имеют коэффициент подобия 0,2. A и M, B и N, C и L — вершины соответственных углов данных треугольников. Выразите стороны $\triangle ABC$ через сходственные стороны $\triangle MNL$.

3. $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ подобны. Известно, что $AC = 15$ см. Найдите сходственную ей сторону DF, если коэффициент подобия треугольников равен 3.

(2) Перед доказательством основной теоремы о подобных треугольниках полезно обсудить ситуацию, изложенную в условии № 787. Эта теорема даёт ответ на вопрос задачи относительно треугольников, т. е. доказывает существование таких треугольников.

(3) Три признака подобия треугольников имеют общее доказательство, которое проводится по следующему плану.

1. Строится $\triangle AB_2C_2$, подобный $\triangle ABC$ в силу теоремы 6.8.
2. Доказывается равенство $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$.

Обучение применению признаков подобия треугольников желательно начать, как и при обучении применению признаков равенства треугольников, с обучения школьников умению выделять соответственные элементы данных треугольников, позволяющие применить один из признаков с использованием плакатов (рис. 267) и вопросов.

1. Определите, на каких рисунках есть подобные треугольники.
2. Почему эти треугольники подобны?

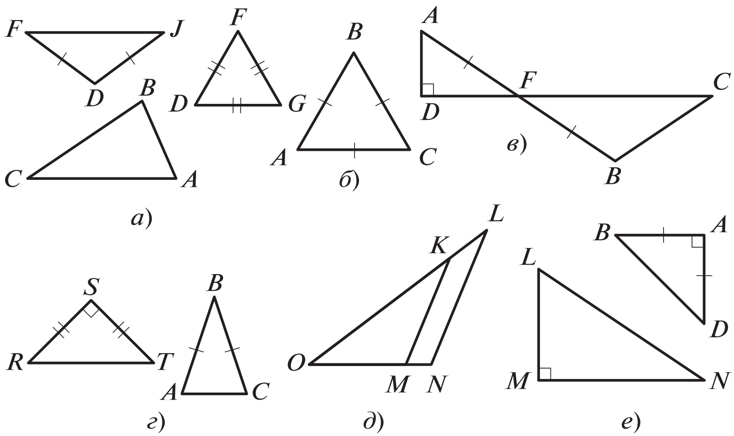


Рис. 257

Для закрепления признаков подобия треугольников использовать у п р а ж н е н и я по готовым чертежам.

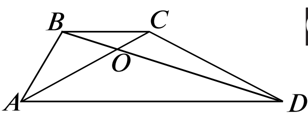


Рис. 258

M 1. В трапеции $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. В силу какого признака подобия треугольников $\triangle COB \backsim \triangle AOD$ (рис. 258)? (См. аналог № 793.)

M 2. $\triangle ABC$ и $\triangle DFG$ равносторонние. В силу какого признака подобия треугольников $\triangle ABC \backsim \triangle DFG$?

M 3. В равнобедренных $\triangle ABC$ ($AB = BC$) и $\triangle EDF$ ($ED = DF$) углы при вершинах B и D равны. В силу какого признака подобия треугольников $\triangle ABC \backsim \triangle EDF$?

4 В конце пункта «Признаки подобия треугольников» сказано: «Кроме трёх указанных признаков, можно доказать и специальный признак подобия прямоугольных треугольников...» Из-за отсутствия его формулировки и доказательства в учебнике желательно вместе с учащимися сформулировать и доказать *признак подобия для прямоугольных треугольников*.

Если отношение катета и гипотенузы одного прямоугольного треугольника равно отношению катета и гипотенузы другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны.

Используя определение равнобедренного треугольника, полезно устно решить задачи № 781—783 и сформулировать *признак подобия для равнобедренных треугольников*.

Если угол при основании одного равнобедренного треугольника равен углу при основании другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники подобны.

Для *равностороннего треугольника*

Все равносторонние треугольники подобны между собой.

5 Теорема 6.9, доказанная в пункте «Одно важное свойство подобных фигур», играет очень важную роль во всём курсе геометрии. При решении задач она позволяет из подобия треугольников сразу сделать вывод об отношении соответствующих высот, медиан, биссектрис, средних линий и других линейных элементов треугольников, а также о равенстве соответствующих углов (например, углов между соответствующими медианами).

6 В конце пункта «Одно важное свойство подобных фигур» вводится понятие подобия произвольных фигур. Соответствие точек подобных фигур, на основе которого и вводится подобие фигур, знакомо учащимся из жизненного опыта. Например, при проецировании киноленты на экран каждой точке изображения соответствует точка на экране, и наоборот, каждой точке изображения на экране соответствует точка на плёнке.

Примерами подобных четырёхугольников является любая пара квадратов, или пара прямоугольников, у которых две смежные стороны пропорциональны двум смежным сторонам другого. Две окружности также всегда подобны с коэффициентом подобия, равным отношению их радиусов.

Признаки подобия, доказанные для треугольников, лежащих в одной плоскости, справедливы и для треугольников, лежащих в разных плоскостях.

В учебнике сделано замечание: «Понятие подобия распространяется и на пространственные объекты, тела». Примерами подобных фигур могут быть любые два куба или шары. Свойства подобных пространственных фигур используется в моделировании. Прежде чем строить самолёт, корабль, здание, создают уменьшенные в несколько раз подобные им модели. Обратить внимание на задачи № 83 и 84Т, условия которых не однозначны и они редко включаются в задачи учебника. Далее полезно решить № 99—102Т, из решения которых следуют прямая и обратная теоремы Чевы.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — пункты: подобие треугольников, основная теорема о подобных треугольниках; № 787, 795 (а), 799 и 801; дома — № 1—3В; № 795 (б, в), 796, 797, 800.

На втором уроке: в классе — пункт: признаки подобия треугольников; № 1—3ДЗ, № 803, 804 и 807; дома — № 4В; № 794, 798, 802, 805 и 814.

На третьем уроке: в классе — пункт: одно важное свойство подобных фигур; № 808, 810 и 812 (а); дома — № 5, 6В; № 809, 811, 812 (б).

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Сформулируйте определение подобных треугольников.
2. Объясните, что означает понятие «коэффициент подобия».
3. Сформулируйте и докажите основную теорему о подобных треугольниках.
4. Сформулируйте и докажите признаки подобия треугольников.
5. Сформулируйте и докажите теорему об одном важном свойстве подобных фигур.
6. Объясните, какие фигуры называются подобными.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

Основная часть задач параграфа решается устно с выполнением чертежа на доске и в тетради. № 813.

781. Нет. Примером могут служить два прямоугольника с неравными отношениями сторон.

787. Нет, не будут, так как они закрываются одинаковыми крышками.

795. а) Три решения: 3, 4, $3\frac{3}{7}$; б) два решения: 3, $3\frac{6}{7}$; в) одно решение 3. Рассмотрим $\triangle ABC$, в котором AC — наибольшая сторона, D — середина AC. Прямая, проходящая через D, может пересекать либо AB, либо BC, либо обе эти стороны (т. е. проходить через вершину B). Пусть она пересекает AB в точке M. По условию, $\triangle AMD$ подобен $\triangle ABC$. Возможны два случая. 1) $\angle ADM = \angle ACB$ (DM — средняя линия); 2) $\angle ADM = \angle ABC$, при этом надо убедиться, что $AM = \dfrac{AC \cdot AD}{AB} \leqslant AB$.

796. Любой равнобедренный треугольник можно разрезать на два равных (а значит, подобных) треугольника. Кроме того, на два подобных треугольника можно разрезать любой прямоугольный треугольник (по высоте, опущенной на гипотенузу).

798. $\triangle ABM$ и $\triangle ACB$ подобны (по второму признаку), поэтому $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AM}{AB}$, откуда $AB = \sqrt{AM \cdot AC} = \sqrt{1 \cdot 4} = 2$.

800. в) Подобие треугольников понятно из рисунка 259.

801. Расположим стороны каждого треугольника в порядке возрастания. Пусть в меньшем стороны x, 12 и 18, а в большем 12, 18, y. Тогда $\dfrac{x}{12} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{18}{y}$.

802. Необходимо рассмотреть два случая: точки C и D расположены по разные стороны от прямой AB или по одну (рис. 260).

803. Утверждение задачи следует из того, что точки A, C, A_1 и C_1 лежат на одной окружности (AC — её диаметр). При этом надо рассмотреть, вообще говоря, три случая: 1) $\triangle ABC$ — остроугольный; 2) неострым является угол B; 3) неострым является угол A (или C).

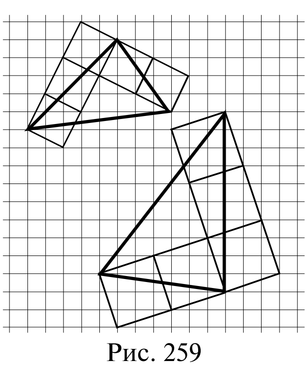


Рис. 259

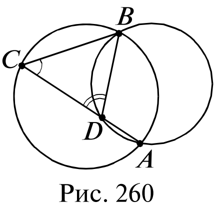


Рис. 260

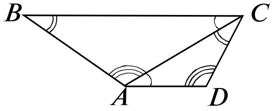


Рис. 261

804. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC (рис. 261). Пусть подобными являются $\triangle ABC$ и $\triangle DCA$. Единственная возможность при этом, когда соответственными являются вершины A и D, B и C, C и A. (Рассмотрите другие варианты.) Имеем $\frac{BC}{CA} = \frac{CA}{AD} = \frac{AB}{CD} = 2$.

805. $\triangle ABC$ подобен $\triangle ADB$ (по второму признаку). Из подобия следует равенство $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$. Пусть $AC = x$, $AD = x + 8$. Имеем уравнение $x(x + 8) = 9$, откуда $x = 1$.

806. Проведём через точку B прямую, параллельную CD, и обозначим точки её пересечения с KM и AD через L и E. Имеем $ED = BC = 3$. $AE = 4$. Из подобия $\triangle BKL$ и $\triangle BAE$ найдём $KL = \frac{3}{10}AE = 1{,}2$, а $KM = 1{,}2 + 3 = 4{,}2$.

807. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть P — точка пересечения прямых AB и CD, M — точка пересечения AC и BD, K — середина BC, L — середина AD (рис. 262). Докажите, что точки M, K и L лежат на одной прямой, а также, что на одной прямой лежат точки P, K и L.

808. Рассмотрим две параллельные прямые, по которым перемещаются отрезки AB и CD постоянной длины (по каждой прямой — свой отрезок). Обозначим через M точку пересечения AC и BD. Тогда при перемещении AB и CD точка M будет описывать прямую, параллельную данным (рис. 263). Теперь нужное построение следует из результата предыдущей задачи (рис. 264). Числа на рисунке указывают последовательность построений. Случай, когда точка N лежит между данными прямыми, рассмотрите самостоятельно.

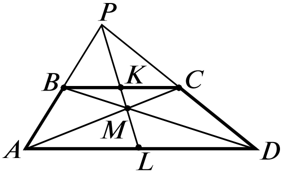


Рис. 262

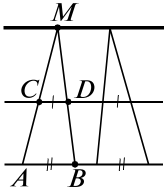


Рис. 263

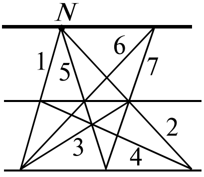


Рис. 264

809. Если x — длина искомого отрезка, то из подобия трапеций будет следовать равенство $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, откуда $x = \sqrt{ab}$.

810. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями $AD = a$, $BC = b$, O — точка пересечения диагоналей, M — точка на AB такая, что $OM \parallel AD$. Из соответствующих подобий имеем: $\frac{MO}{a} = \frac{BM}{AB}$, $\frac{MO}{b} = \frac{AM}{AB}$. Сложив эти равенства, получим $\frac{MO}{a} + \frac{MO}{b} = 1$, откуда $MO = \frac{ab}{a+b}$. Такой же будет и вторая часть искомого отрезка.

812. а) $\frac{3}{8}\sqrt{3}$ и $\frac{5}{8}\sqrt{3}$ или $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ и $\frac{5}{2}\sqrt{3}$; б) $\frac{3}{8}\sqrt{5}$ и $\frac{5}{8}\sqrt{5}$.

В случае а) возможно внутреннее и внешнее касание. В случае б) возможен лишь один вариант — внешнее касание, так как длина хорды $BC = \sqrt{5}$ больше разности диаметров окружностей $5 - 3 = 2$.

813. Большая сторона равна $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Точка M находится на расстояниях $\frac{\sqrt{5}}{5}$ и $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$ от левой и нижней сторон исходного прямоугольника. Докажем это. Если a — длина большей стороны, то для a имеем уравнение $\frac{a}{1} = \frac{1}{a-1}$, $a^2 - a - 1 = 0$, откуда $a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Пусть точка M удалена на расстояния x и y от левой и нижней сторон исходного прямоугольника (рис. 265). При этом из подобия всех прямоугольников следует, что точка M занимает одно и то же положение в каждом прямоугольнике. (Соответствующие расстояния лишь меняются с нужным коэффициентом.) Прямоугольник, оставшийся после первого отрезания, меньше исходного в a раз и расположен вертикально. Расстояние до ниж-

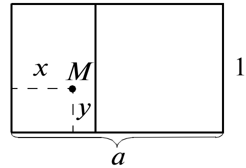


Рис. 265

ней стороны от M равно y, а до правой стороны $a - 1 - x$.

Получаем для x и y систему: $\begin{cases} y = \dfrac{x}{a}, \\ a - 1 - x = \dfrac{y}{a}. \end{cases}$

Из этой системы найдём (поскольку $a^2 - a - 1 = 0$) $y = \dfrac{1}{a^2 - 1} = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{10}$, $x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

815. а) 19,52; б) 38; в) такая пирамида невозможна. Из условия следует, что $\triangle ADB = \triangle CBD$, $\triangle ABC = \triangle CDA$, $\triangle ABD \sim \triangle CAD$ (сходственные вершины указаны в одинаковой последовательности). Пусть $DB = a$, $AD = BC = \lambda a$. Из подобия следует, что $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{AD}{DB} = \lambda$, но $CD = AB = \lambda AD = \lambda^2 a$. Значит, $AC = \lambda AB = \lambda^3 a$. В пункте б) $DB = a = 27$, $\dfrac{CA}{DB} = \lambda^3 = \dfrac{8}{27}$, $\lambda = \dfrac{2}{3}$. В пункте в) $DB = a = 21$, $\dfrac{BA}{DB} = \dfrac{8}{21} = \lambda^2$, $\lambda = \sqrt{\dfrac{8}{21}}$. $DA = \lambda a$. Рассмотрим $\triangle ABD$. Его стороны a, λa, $\lambda^2 a$, где $\lambda = \sqrt{\dfrac{8}{21}}$. Докажем, что $\lambda + \lambda^2 < 1$ (т. е. не выполняется неравенство треугольника). Нам надо доказать, что $\sqrt{\dfrac{8}{21}} < \dfrac{13}{21}$ или $168 < 169$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

М **1.** Докажите, что отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

2. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ BD и отрезок AF. Известно, что $BO = 6$ см, $OD = 18$ см. Укажите подобные треугольники и определите коэффициент их подобия (рис. 266).

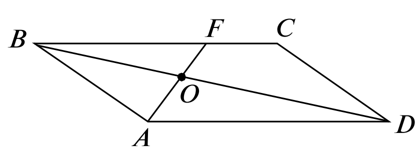


Рис. 266

3. Определите, подобны ли равнобедренные треугольники, если они имеют по равному углу.

4. Определите, подобны ли равнобедренные треугольники, если они имеют по равному углу и эти углы тупые.

5. Определите, подобны ли равнобедренные треугольники, если угол при вершине одного из них равен 54°, а угол при основании другого — 63°.

6. На сторонах равностороннего $\triangle ABC$ отложены отрезки $AP = BR = CQ$. Докажите, что $\triangle PRQ$ подобен $\triangle ABC$.

7. В $\triangle ABC$ и $\triangle EDF$ углы при вершинах B и D равны, а стороны AB и BC, заключающие $\angle B$, соответственно больше сторон ED и DF, заключающих $\angle D$, в три раза. Определите, подобны ли эти треугольники.

8. Боковая сторона и основание одного равнобедренного треугольника соответственно равны 34 см и 20 см, а боковая сторона и основание другого равнобедренного треугольника — 17 см и 10 см. Определите, подобны ли эти треугольники.

9. Докажите, что прямая, параллельная одной из сторон треугольника и пересекающая две другие стороны, отсекает от него подобный треугольник.

10. В треугольник, у которого основание равно 30 см, а высота 10 см, вписан прямоугольный равнобедренный треугольник так, что его гипотенуза параллельна основанию данного треугольника, а вершина прямого угла лежит на этом основании. Найдите гипотенузу.

Контрольная работа № 5

Вариант 1

1. Определите, вершинами какого четырёхугольника являются середины сторон ромба, отличного от квадрата.

А. Параллелограмма, отличного от прямоугольника и ромба.

Б. Прямоугольника, отличного от квадрата.

В. Ромба, отличного от квадрата.

Г. Квадрата.

2. Четырёхугольники $QGRF$ и $ABCD$ подобны, и их сходственные стороны относятся, как 3 : 5. Периметр четырёхугольника $ABCD$ на 12 см больше периметра четырёхугольника $QGRF$. Найдите периметр четырёхугольника $QGRF$.

А. 18 см. Б. 12 см. В. 7,5 см. Г. 4,5 см.

3. В $\triangle ABC$ проведены медианы BL и CK. Найдите сторону BC, если расстояние между их серединами равно 4 см.

Ответ: ______________________

4. Две окружности с радиусами 9 см и 3 см касаются внешним образом в точке A, через которую проходит их общая секущая BC. Найдите длину отрезка AB, если AC равен 5 см.

Ответ: ______________________

5. Точка K — середина медианы BF $\triangle ABC$. Прямая AK пересекает сторону BC в точке D. Докажите, что $BD = \frac{1}{3} BC$.

Вариант 2

1. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикулярны. Середины сторон трапеции являются вершинами четырёхугольника $KLMN$. Определите вид четырёхугольника $KLMN$.

А. Параллелограмм, отличный от прямоугольника и ромба.

Б. Прямоугольник, отличный от квадрата.

В. Ромб, отличный от квадрата.

Г. Квадрат.

2. Четырёхугольники $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$ подобны и их стороны A_1A_4 и B_1B_4 сходственные. Периметр четырёхугольника $A_1A_2A_3A_4$ относится к стороне A_1A_4, как 5 : 2. Найдите отношение стороны B_1B_4 к периметру четырёхугольника $B_1B_2B_3B_4$.

А. 5 : 2. Б. 7 : 5. В. 5 : 3. Г. 2 : 5.

3. В $\triangle ABC$ проведены медианы BL и CK. Найдите сторону BC, если расстояние между их серединами равно 4 см.

Ответ: ______________________

4. Две окружности радиусов 12 см и 9 см касаются внутренним образом в точке A, через которую проходит их общая секущая AB. Найдите длину отрезка AB, если отрезок AC равен 18 см (C — точка пересечения секущей с окружностью меньшего радиуса).

Ответ: ____

5. Точки K и L — середины сторон AD и BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AL и CK делят диагональ BD на три равные части.

Глава 7
Метрические соотношения в треугольнике и окружности (14 ч)

В данной главе рассматривается материал, традиционный для любого курса планиметрии: прямая и обратная теорема Пифагора, тригонометрические функции острого и тупого угла, теорема косинусов, теорема синусов, свойства отрезков, образованных пересечением прямых с окружностью.

Доказанные здесь теоремы и формулы служат основой алгебраического и тригонометрического методов геометрии.

Теоремы косинусов и синусов служат основой темы «Решение треугольников», являющейся одной из ведущих тем курса планиметрии, и позволяют по трём заданным элементам треугольника находить все остальные его элементы. Кроме того, полученные при изучении темы «Решение треугольников» знания широко применяются при решении большого класса вычислительных задач, при анализе условий задач на построение.

При изучении главы 7 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— иллюстрировать и объяснять формулировки: прямой и обратной теоремы Пифагора; теоремы синусов и косинусов; свойство хорд в окружности и свойство секущих к окружности;

— объяснять тригонометрические термины «синус», «косинус», «тангенс» и «котангенс»;

— оперировать с начальными понятиями тригонометрии;

— решать треугольники;

— применять при решении задач на вычисление и доказательство: теоремы Пифагора, синусов и косинусов, свойство хорд в окружности и свойство секущих к окружности; определения тригонометрических функций и тригонометрические тождества.

Учащиеся получат возможность научиться применять при решении задач на вычисления и доказательство обратную теорему Пифагора.

7.1. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора (2 ч)

В параграфе рассматривается материал, традиционный для любого курса планиметрии, — теорема Пифагора и в ознакомительном порядке теорема, обратная теореме Пифагора. Доказательство теоремы Пифагора ведётся с опорой на знания учащихся подобия треугольников. При подготовке к доказательству теоремы Пифагора доказываются важные свойства высоты прямоугольного треугольника и его катетов. Изучение теоремы Пифагора позволяет существенно расширить круг геометрических задач, решаемых школьниками, давая им в руки вместе с признаками равенства треугольников и свойствами и признаками четырёхугольников достаточно мощный аппарат. Это не только позволяет расширить представления учащихся об аналитических методах решения геометрических задач, но и играет важную роль в осуществлении внутрипредметных связей. Поэтому основное внимание уделяется решению задач.

Обобщённая теорема Пифагора может быть рассмотрена в качестве интересного дополнительного материала.

Основная часть задач параграфа может быть решена с выполнением чертежа и краткой записью вычислений. При решении этих задач очень важно проговаривать последовательность действий (схему решения), которые приводят к решению. Такое многократное повторение схем решения вслух способствует их усвоению.

В планировании указано минимальное количество уроков, рекомендуемых для каждого фрагмента теоретического материала темы, и указан большой резерв времени. Это позволяет учителю скорректировать планирование в зависимости от уровня подготовки класса.

При изучении § 7.1 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— изображать и выделять из ситуации, изображённой на чертежах или рисунках, конфигурацию, позволяющую применить теорему Пифагора;

— формулировать и объяснять формулировку теоремы Пифагора и свойства высоты прямоугольного треугольника и его катетов;

— доказывать теорему Пифагора и свойства высоты прямоугольного треугольника и его катетов;

— решать задачи на доказательство и вычисление с использованием теоремы Пифагора и свойств высоты прямоугольного треугольника и его катетов; алгебраический аппарат.

Учащиеся получат возможность научиться применять при решении задач на вычисления и доказательство обратную теорему Пифагора.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

1 Доказательства свойств высоты в прямоугольном треугольнике, теоремы Пифагора, обратной теоремы Пифагора достаточно просты, поэтому весь теоретический материал рекомендуется рассмотреть на одном уроке с активным привлечением учащихся. Урок можно организовать в форме беседы по плану, выполнить задания.

1. В прямоугольном $\triangle ABC$ провести высоту BD и внести обозначения рисунка 267. Укажите подобные треугольники.

2. В силу какого признака подобия треугольников $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ и $\triangle CBD$ подобны?

3. Записать пропорциональность соответственных сторон подобных треугольников $\triangle ACD$ и $\triangle CBD$ и определите коэффициент подобия $\triangle CBD$ по отношению к треугольнику $\triangle ACD$ $\left[\dfrac{b_1}{h} = \dfrac{h}{a_1} = \dfrac{a}{b}\right]$.

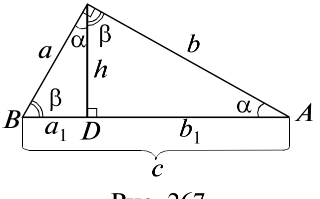


Рис. 267

4. Записать пропорциональность соответственных сторон $\triangle ACD$ и $\triangle ABC$ и определить коэффициент подобия $\triangle ACD$ по отношению к $\triangle ABC \left[\dfrac{b_1}{b} = \dfrac{h}{a} = \dfrac{b}{c} \right]$.

5. Записать пропорциональность соответственных сторон $\triangle CBD$ и $\triangle ABC$ и определить коэффициент подобия $\triangle CBD$ по отношению к $\triangle ABC \left[\dfrac{a_1}{a} = \dfrac{h}{b} = \dfrac{a}{c} \right]$.

6. Пользуясь соотношениями № 4, 5 и 6, выразить соответственно h, a и b [$h = \sqrt{a_1 b_1}$; $b = \sqrt{b_1 c}$; $a = \sqrt{a_1 c}$].

7. Сформулировать теорему 7.1, как в учебнике, и дать традиционные формулировки.

8. Сформулировать теорему Пифагора и записать её доказательство.

9. Сформулировать теорему, обратную теореме Пифагора, и записать её условие. Почему построенный прямоугольный треугольник с катетами a и b равен данному треугольнику со сторонами a, b и c?

2 Обучение применению свойств высоты в прямоугольном треугольнике, теоремы Пифагора, обратной теоремы Пифагора желательно начать с обучения школьников пониманию того, что все доказанные теоремы применимы только к прямоугольным треугольникам с использованием плакатов (рис. 268) и вопроса: «Определите, на каких рисунках есть треугольники, к которым применима теорема Пифагора».

Для закрепления свойств высоты в прямоугольном треугольнике решить устно № 818, 825 и 826 с краткими

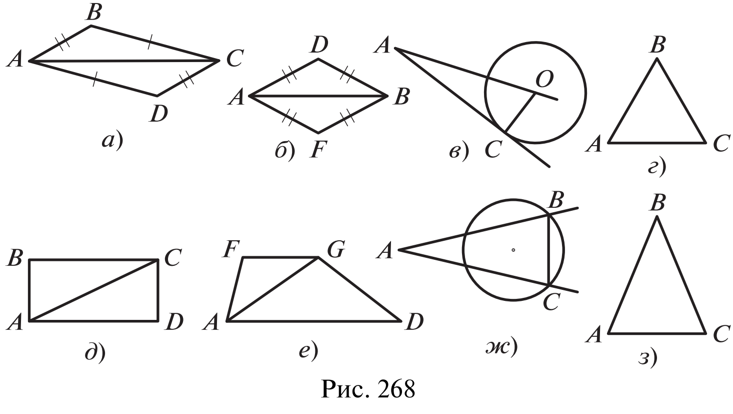


Рис. 268

записями вычислений (см. рис. 268). Используя тот же рисунок и выполняя краткие записи вычислений, для закрепления теоремы Пифагора аналогично решить № 827, 835 и 851 и обратной теоремы Пифагора № 860 (желательно чертежи к задачам сделать заранее для экономии времени на уроке) и обратить внимание учащихся на № 111Т и вывод 23.

(3) Обобщённая теорема Пифагора не входит в номенклатуру содержания и является авторским дополнением данной темы, её доказательство в учебнике в силу объективных причин является достаточно трудным (рекомендовать от изложения этой теоремы отказаться вообще). Однако, если уровень подготовки класса позволяет и учитель не ограничен временными рамками, будет полезно изложить теорему. Доказательства следует провести учителю в виде фрагмента лекции. Также можно этот материал вынести на внеклассную работу.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — параграф; № 818, 825, 826, 827 и 860; дома — № 1—4В, № 820, 823, 825, 834, 849, 854, 857 и 861.

На втором уроке: в классе — СР8; № 850, 852, 853, 855, 856 и 864; дома — № 858, 859, 862, 863, 868 и 869.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

М 1. Сформулируйте и докажите теорему о свойствах высоты прямоугольного треугольника.

М 2. Сформулируйте и докажите теорему о свойствах катетов прямоугольного треугольника.

М 3. Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.

М 4. Сформулируйте и докажите обратную теорему Пифагора.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 8

Вариант 1

1. Найдите значение выражения

$\sin 60° \cdot \cos 30° - \cos 60° \cdot \operatorname{tg} 45°$.

А. $\frac{1}{4}$. Б. $\frac{3}{4}$. В. $\frac{1}{2}$. Г. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

2. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника со сторонами 7 см и 24 см.

Ответ: ______________________

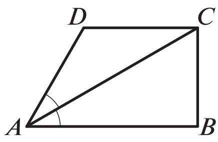


Рис. 269

3. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle D$ — прямой) диагональ AC является биссектрисой угла A. Боковые стороны равны 17 см и 8 см (рис. 269). Найдите большее основание трапеции.

Ответ: ______________________

4. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ равны 16 см и 30 см, а сторона AB равна 17 см. Найдите сторону BC.

Ответ: ______________________

Вариант 2

1. Найдите значение выражения
$\sin 45° \cdot \operatorname{tg} 60° - \cos 45° \cdot \cos 30°$.

А. $-\frac{\sqrt{6}}{12}$. Б. $\frac{3\sqrt{6}}{4}$. В. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. Г. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, катеты которого равны 12 см и 7 см.

Ответ: ______________________

3. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle C$ — прямой) диагональ BD делит эту трапецию на два прямоугольных равнобедренных треугольника (рис. 270). Найдите сторону CD трапеции, если её основание AD равно 8?

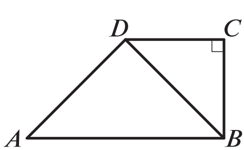


Рис. 270

Ответ: ______________________

4. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ равны 7 см и 8 см, а сторона AB равна 5 см. Найдите сторону BC.

Основная часть задач решается с выполнением чертежа и краткой записью. № 816, 831, 832, 833, 934, 849, 851 и 868.

853. Используйте обобщённую теорему Пифагора.

855. Касательные из вершины прямого угла равны r. Тогда касательные из вершин острых углов будут $a - r$ и $b - r$. Имеем уравнение $(a - r) + (b - r) = c$, $r = \dfrac{a + b - c}{2}$.

856. Пусть C — вершина прямого угла $\triangle ABC$, CD — высота, CM — медиана (рис. 271). Нам достаточно доказать равенство углов $\angle DCA = \angle MCB$. Мы знаем, что $MC = MB$ (№ 851). Значит,

$\angle MCB = \angle MBC = 90° - \angle A = \angle DCA$.

858. Если $2x$ — основание треугольника, то боковая сторона равна $\sqrt{25 + x^2}$. Из подобия соответствующих прямоугольных треугольников имеем соотношение $\dfrac{5}{\sqrt{25 + x^2}} = \dfrac{6}{2x}$.

859. Рассмотрим $\triangle ABC$ со сторонами $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Проведём высоту AD (рис. 272). Понятно, что D лежит на луче BC, поскольку угол B не может быть тупым. Пусть $BD = x$, тогда $CD = |x - a|$. Запишем теорему Пифагора для $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$: $c^2 - x^2 = AD^2 = b^2 - (x - a)^2$. Теперь найдём $x = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2a}$. Из условия следует, что $x > a$. Значит, D лежит на продолжении BC за точку C.

860. Проведём через конец меньшего основания трапеции прямую, параллельную противоположной боковой стороне, получится треугольник со сторонами 6, 8 и 10. Этот треугольник прямоугольный.

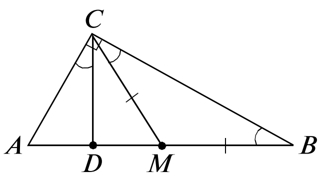


Рис. 271

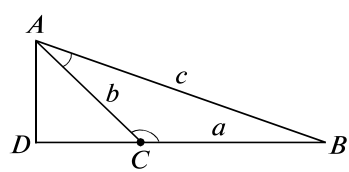


Рис. 272

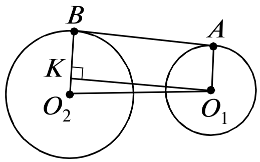


Рис. 273

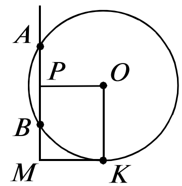


Рис. 274

862. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей с радиусами r и R, AB — общая внешняя касательная (рис. 273). Как известно, O_1A и O_2B перпендикулярны AB. Возьмём на O_2B точку K так, что $O_1K \parallel AB$. Тогда $O_1K = AB$. В прямоугольном треугольнике O_1O_2K гипотенуза $O_1O_2 = a$ и катет $O_2K = |R - r|$.

863. Пусть M — вершина угла, O — центр окружности, K — точка касания (рис. 274). Проведём из O перпендикуляр OP к AB. P — середина AB, $MPOK$ — прямоугольник, радиус равен $OK = MP = \frac{a + b}{2}$.

864. Боковые стороны трапеции при продолжении пересекаются под прямым углом (см. задачу 860). Поэтому наша задача сводится к № 863. Заметим, что $\angle BPC = \angle BOC = 120°$ (рис. 275). Значит, точки B, O, P и C лежат на одной окружности, $\angle POC = \angle PBC =$ $= 15°$.

866. Рассмотрим равнобедренный $\triangle ABC$, в котором $\angle ABC = 30°$, $AB = BC = 1$. Проведём в нём две высоты BF и AD (рис. 276). Нам надо найти BF и $FC = \frac{1}{2}AC$.

Мы знаем, что $AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}$. Далее имеем $BD = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

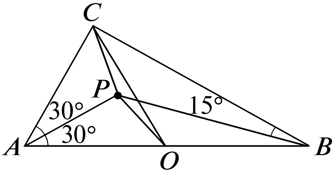


Рис. 275

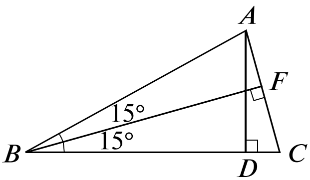


Рис. 276

$DC = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$

$= \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $BF = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$, $FC = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$.

867. Рассмотрим прямоугольный $\triangle ABC$, CD — высота, опущенная на гипотенузу, O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в ACD и BCD, r_1 и r_2 — их радиусы (рис. 277). Поскольку

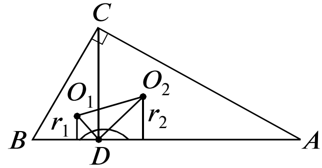


Рис. 277

DO_1 и DO_2 — биссектрисы соответствующих углов, то $\angle O_1DO_2 = 90°$. Далее имеем $O_1D = r_1\sqrt{2}$, $O_2D = r_2\sqrt{2}$. Значит, $2r_1^2 + 2r_2^2 = O_1O_2^2 = 1$. Но по обобщённой теореме Пифагора $r_1^2 + r_2^2 = r^2$.

869. Высота к AC в $\triangle ABC$ равна 20, высота к AC в $\triangle ADC$ равна $\sqrt{39^2 - 15^2} = \sqrt{24 \cdot 54} = 36$. А поскольку $BD = 56 = 20 + 36$, то все точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

870. Докажите, что высоты в $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$, проведённые к стороне AC, имеют общее основание на AC и соответственно равны $BK = 1$ и $DK = 4$, т. е. $BK + DK = BD$. Точки B, K и D лежат на одной прямой, а данные точки — в одной плоскости.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 20 см, а гипотенуза больше второго катета на 8 см. Вычислите периметр треугольника.

2. В $\triangle ABC$ высота CD, опущенная из вершины прямого угла C, делит гипотенузу AB на отрезки $AD = 9$ см и $DB = 16$ см. Найдите катет AC и высоту CD этого треугольника.

3. Радиус окружности, описанной около квадрата, равен 3 см. Определите сторону квадрата.

4. Сторона квадрата равна 7 см. Определите диаметр окружности, описанной около квадрата.

5. Найдите отношение диагонали квадрата к его стороне.

6. К окружности радиуса 10 см проведена касательная, на которой взята точка M на расстоянии 24 см от точки касания. Найдите расстояние от точки M до центра окружности.

7. Из точки M, отстоящей от центра окружности на расстоянии 29 см, проведена касательная $KM = 21$ см, где K — точки касания. Найдите радиус окружности.

8. В окружности радиуса 17 см проведена хорда, равная 16 см. Найдите расстояние от центра окружности до хорды.

9. Две окружности, радиусы которых равны 20 и 5, касаются внешним образом и имеют общую касательную AB. Найдите длину отрезка AB.

M **10.** Докажите, что если диагонали четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, то $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$ (рис. 278).

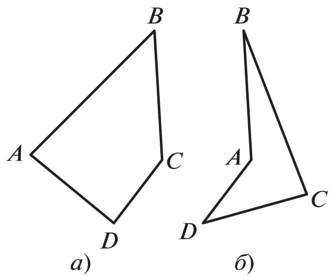


Рис. 278

11. В равнобедренной трапеции основания равны 30 см и 72 см, боковая сторона — 75 см. Найдите высоту трапеции.

12. Основания равнобедренной трапеции равны 22 см и 42 см, боковая сторона — 26 см. Найдите диагонали трапеции.

13. Основания трапеции равны 13 см и 53 см, а боковые стороны — 13 см и 37 см. Найдите высоту трапеции.

7.2. Тригонометрические функции. Теоремы косинусов и синусов (3 ч)

В параграфе рассматривается материал, традиционный для любого курса планиметрии: тригонометрические функции острого и тупого углов (косинус, синус, тангенс и котангенс), теоремы синусов и косинусов, решение прямоугольных и произвольных треугольников.

При изучении тригонометрического материала, который составляет значительную часть параграфа, основное внимание следует уделить прочному усвоению определений косинуса, синуса, тангенса и котангенса. Определения тригонометрических функций острого угла описываются как отношения катетов и гипотенузы прямоугольного треугольника. Уверенное владение указанными определениями позволит сформировать умение решать прямоугольные треугольники. Способы решения произвольных треугольников основываются на теоремах синусов и косинусов.

Система задач, рекомендованных к параграфу, диктует необходимость весь материал параграфа дать одним блоком на первом уроке изучения темы в форме лекции с небольшим привлечением учащихся. Однако опрос учащихся можно проводить в течение двух уроков. Тем самым можно на одном уроке уделить больше внимания формулировкам новых понятий и теорем, а на другом методам доказательств и обоснований.

Рассматриваются три типа задач на решение треугольников: 1) по данной стороне и двум углам; 2) по двум сторонам и углу между ними; 3) по трём сторонам. Изучение темы позволяет провести обобщающее повторение построения треугольников. Умение решать произвольный треугольник по трём заданным элементам широко применяется в курсе стереометрии.

При изучении § 7.2 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— изображать и выделять из конфигурации, изображённой на чертежах или рисунках, прямоугольный треугольник, позволяющий применять определения косинуса, синуса, тангенса и котангенса острого угла;

— формулировать и доказывать теоремы синусов и косинусов;

— объяснять термины «косинус», «синус», «тангенс» и «котангенс»;

— выводить основное тригонометрические тождество и формулы, выражающие связь тригонометрических функций острого угла;

— решать задачи на доказательство и вычисление, применяя определения косинуса, синуса, тангенса и котангенса острого угла; теоремы синусов и косинусов;

— решать задачи на построение острого угла по значению его тригонометрических функций;

— находить значения тригонометрических функций некоторых наиболее употребительных углов.

Учащиеся получат возможность научиться применять при решении задач на вычисления и доказательство формулы сложения для синусов и косинусов.

(1) Материал, данный в пунктах «Синус и косинус острого угла», «Тангенс и котангенс острого угла», «Изменение тригонометрических функций на интервале [0°, 90°] и вычисление некоторых значений» и «Тригонометрические функции тупого угла», несколько сложен для восприятия учащихся, можно организовать его изложение в форме рассказа учителя.

На закрепление определений тригонометрических функций острого угла — № 871—880, 888 и 889, № 916 и 924 (решить на уроке).

В классе выполнить вместе с учащимися в ходе решения № 906 таблицу 2, в которой даны значения косинуса, синуса, тангенса и котангенса некоторых наиболее употребительных углов.

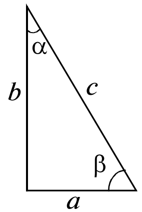
Таблица 2

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞

Определения косинуса, синуса, тангенса и котангенса для острого угла позволяют по стороне и острому углу прямоугольного треугольника находить другие стороны. Вместе с учащимися вывести эти соотношения и представить их в виде таблицы 3, которую следует записать в тетрадях, и выполнить № 881—887.

(2) При решении конкретных задач учащиеся сталкиваются не с изменением острого угла (его возрастанием или убыванием), а с двумя острыми углами. Поэтому представляется уместным после разбора содержания

Таблица 3

	**Гипотенуза**	**Катеты**	
	$c^2 = a^2 + b^2$ $c = \dfrac{a}{\cos\beta}$; $c = \dfrac{b}{\sin\beta}$; $c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$; $c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$	$a^2 = c^2 - b^2$ $a = c \cdot \sin\alpha$; $a = c \cdot \cos\beta$; $a = b \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$; $a = \dfrac{b}{\mathrm{tg}\,\beta}$. $a = b \cdot \mathrm{ctg}\,\beta$; $a = \dfrac{b}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$	$b^2 = c^2 - a^2$ $b = c \cdot \sin\beta$; $b = c \cdot \cos\alpha$; $b = a \cdot \mathrm{tg}\,\beta$; $b = \dfrac{a}{\mathrm{tg}\,\alpha}$. $b = a \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha$; $b = \dfrac{a}{\mathrm{ctg}\,\beta}$

пункта «Изменение тригонометрических функций на интервале [0°, 90°] и вычисление некоторых значений» сделать выводы.

1. Из двух углов большему острому углу соответствует больший синус и больший тангенс.

2. Из двух углов большему острому углу соответствует меньший косинус и меньший котангенс.

На закрепление выполнить упражнения.

1. Какой из острых углов α или β больше, если:

а) $\sin\alpha = \frac{4}{7}$, $\sin\beta = \frac{5}{8}$; в) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{8}{5}$, $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{5}{2}$;

б) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$; г) $\mathrm{ctg}\,\alpha = 0{,}6$, $\mathrm{ctg}\,\beta = 0{,}3$.

2. Сравните косинусы, синусы, тангенсы и котангенсы углов $\alpha = 24°$ и $\beta = 45°$.

3. Сравните два острых угла α и β, если известно, что: а) $\sin\alpha > \sin\beta$; б) $\cos\alpha > \cos\beta$; в) $\mathrm{tg}\,\alpha < \mathrm{tg}\,\beta = \frac{5}{2}$; г) $\mathrm{ctg}\,\alpha < \mathrm{ctg}\,\beta$.

3 Доказательство теоремы косинусов провести в форме беседы с использованием вопросов.

1. Сформулировать условие теоремы.

2. В $\triangle ABC$ провести высоту BD и внести обозначения, как на рисунке 326У. Укажите полученные прямоугольные треугольники. Из какого прямоугольного треугольника можно найти сторону BC и в силу какой теоремы? Как найти BD и DC?

3. Применить теорему Пифагора.

Далее решить № 944.

Из теоремы косинусов следует очень важный вывод.

Если a — наибольшая сторона треугольника, то этот треугольник будет остроугольным, прямоугольным или тупоугольным в зависимости от того, будет ли величина $b_2 + c_2 - a_2$ больше нуля, равна нулю или меньше нуля.

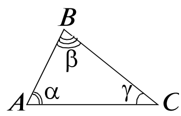
Устно решить № 926 или задачу:

«Дан треугольник со сторонами a, b и c. Против стороны c лежит угол γ. Определите, каким — прямым, тупым или острым — является угол γ, если:

1) $a = 8$, $b = 15$, $c = 17$;
2) $a = 8$, $b = 6$, $c = 11$;
3) $a = 7$, $b = 6$, $c = 8$».

Для проверки усвоения теоремы синусов можно решить № 949 и 951.

Таблица 4

<table>
<tr><td colspan="3">Дан $\triangle ABC$.
Обозначим его стороны и углы:
$BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.
$\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$.


Решение треугольника</td></tr>
<tr><td>По стороне и двум углам

<u>Дано: a, α, β.</u>

Найти: b, c, γ.</td><td>По двум сторонам и углу между ними

<u>Дано: a, b, γ.</u>

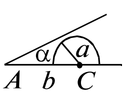
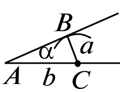
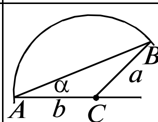
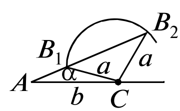
Найти: c, α, β.</td><td>По трём сторонам

<u>Дано: a, b, c.</u>

Найти: α, β, γ.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Единственность решения каждой задачи вытекает из соответствующего признака равенства треугольников.</td></tr>
<tr><td>$\gamma = 180° -$
$- (\alpha + \beta)$,
$\alpha + \beta < 180°$,
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$,
значит,
$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$,
значит,
$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$</td><td>$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$,
значит,
$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$.
Если 1) $\gamma > 90°$, значит, α и β — острые;
2) $\gamma < 90°$, пусть $a < b$, значит, $\angle\alpha$ — острый.
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$, значит,
$\sin\alpha = \frac{a\sin\gamma}{c}$,
$\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$</td><td>Пусть a — наибольшая сторона, $a < b + c$.
$a^2 = c^2 + b^2 -$
$- 2cb\cos\alpha$,
$\cos\alpha =$
$= \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb}$,
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$,
значит,
$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$,
$\gamma = 180° -$
$- (\alpha + \beta)$</td></tr>
</table>

④ Содержание, определяемое «Примерными программами основного общего образования» включают тему «Решение треугольников», которая в явном виде в учебнике не представлена. Поэтому на втором (третьем) уроке полезно рассмотреть традиционные во всех курсах геометрии задачи решения треугольников, воспользовавшись плакатами (табл. 4, 5). Для отработки этой темы уроки следует взять из резерва.

Таблица 5

<table>
<tr><td colspan="5">По двум сторонам и углу, лежащему против одной из них
Дано: a, b, γ.
Найти: c, α, β.
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, значит, $\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$</td></tr>
<tr><td>$\sin\beta > 1$</td><td>$\sin\beta = 1$</td><td colspan="3">$0 < \sin\beta < 1$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">$\beta = 90°$
$\gamma = 90° - \alpha$
$c = b \cdot \cos\alpha$</td><td rowspan="2">$a \geqslant b$
$\alpha \geqslant \beta$,
значит,
$\angle\beta$ — острый.
$\gamma = 180° -$
$- (\alpha + \beta)$.
$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$</td><td colspan="2">$a < b$
Существуют два угла β_1 — острый и β_2 — тупой $\beta_2 = (180° - \beta_1)$</td></tr>
<tr><td>$\gamma_1 = 180° -$
$- (\alpha + \beta_1)$
$c_1 =$
$\frac{a\sin\gamma_1}{\sin\alpha}$</td><td>$\gamma_2 = 180° -$
$- (\alpha + \beta_2)$
$c_2 = \frac{a\sin_2}{\sin\alpha}$</td></tr>
<tr><td>Нет решения</td><td>Одно решение</td><td>Одно решение</td><td colspan="2">Два решения</td></tr>
</table>

Следует обратить внимание учащихся на формулы 24—38Т и таблицу значений тригонометрических функций. Затем решить несколько задач № 120—125Т. В задачах № 141—156Т исследуются конфигурации: окружности и касательные к ним. Из решения № 146Т следует формула 45Т.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — пункты: тригонометрические функции, теоремы косинусов и синусов; № 871—873, 880, 884, 906, 923 (а и б), 924 (а); дома — № 1—5В, № 874, 878, 885, 916, 923 (в), 924 (б и в).

На втором уроке: в классе — пункты: теоремы косинусов и синусов; № 926, 944, 946, 948, 949, 951; дома — № 6—7В, № 939, 940, 942, 943 и 956.

На третьем уроке: в классе — СР9; № 955, 957, 959 и 960; дома — № 941, 945, 953.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Сделайте рисунок и объясните на нём, что такое косинус, синус, тангенс и котангенс острого угла.
2. Объясните, как изменяются тригонометрические функции угла на интервале [0°, 90°].
3. Объясните, как можно по стороне и острому углу прямоугольного треугольника найти его другие элементы.
4. Объясните, как можно по двум сторонам прямоугольного треугольника найти его другие элементы.
5. Сделайте рисунок и объясните на нём, что такое косинус, синус, тангенс и котангенс тупого угла.
6. Сформулируйте и докажите теорему косинусов.
7. Сформулируйте и докажите теорему синусов.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 9

Вариант 1

1. Стороны треугольника равны 8 см, 15 см и 16 см. Определите вид этого треугольника.

А. Тупоугольный.
Б. Прямоугольный.
В. Остроугольный.

2. В треугольнике стороны равны 1, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{7}$. Найдите угол, противолежащий большей стороне треугольника.

Ответ: ______________________________

3. В $\triangle ABC$ сторона AC равна 8 см, один из углов, прилежащих к этой стороне, равен 45°, а угол, противолежащий ей, равен 60°. Найдите сторону, противолежащую углу в 45°.

Ответ: ______________________________

Вариант 2

1. Стороны треугольника равны 3 см, 2 см и $\sqrt{3}$ см. Определите вид этого треугольника.

А. Остроугольный.

Б. Прямоугольный.

В. Тупоугольный.

2. Найдите меньший угол параллелограмма, если его стороны равны 1 и $\sqrt{3}$, а одна из диагоналей равна $\sqrt{7}$.

Ответ: ______________________________

3. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ делит его угол DAB на части BAC и CAD, равные 60° и 45° соответственно. Найдите большую сторону параллелограмма, если его меньшая сторона равна 4 см.

Ответ: ______________________________

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

Основная часть задач параграфа решается устно с выполнением чертежа на доске и в тетради. № № 906, 919, 923, 924 и 939.

940. Для $\alpha < 90°$ возможны следующие случаи: при $a < \sin\alpha$ задача не имеет решений; если $a = \sin\alpha$, то $AC = \cos\alpha$; если $\sin\alpha < a < 1$, то $AC = \cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - \sin^2\alpha}$; если $a \geqslant 1$, то $AC = \cos\alpha + \sqrt{a^2 - \sin^2\alpha}$. Для $a \geqslant 90°$ возможны следующие случаи: если $a \leqslant 1$, то задача не имеет решений, если $a > 1$, то $AC = \cos\alpha + \sqrt{a^2 - \sin^2\alpha}$. При исследовании удобно рассмотреть соответствующую задачу на построение.

945. Пусть α — угол между сторонами a и b. Тогда $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$, $m_a^2 = \dfrac{a^2}{4} + b^2 - ab\cos\alpha$. Умножим второе равенство на 2 и вычтем из первого.

948. Пусть AD — биссектриса угла A, $AB = BC = 1$, $AC = x$. Из подсчёта углов следует, что $\triangle CAD$ подобен $\triangle ABC$, а $AD = DB = x$, $DC = 1 - x$. Из подобия $\triangle CAD$ и $\triangle ABC$ следует равенство $\dfrac{1-x}{x} = \dfrac{x}{1}$, $x^2 + x - 1 = 0$, откуда $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ и $\sin 18° = \dfrac{AC}{2BC} = \dfrac{x}{2}$. Отсюда $\sin 18° =$ $= \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos 18° = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

951. При решении задачи можно обойтись без вычисления $\sin 75°$. Если x и y — две оставшиеся стороны, то имеем систему уравнений: $\begin{cases} x\cos 45° + y\cos 30° = 2, \\ \dfrac{x}{\sin 30°} = \dfrac{y}{\sin 45°}, \end{cases}$ из которой найдём x и y.

955. Рассмотрим $\triangle ABC$, в котором $AB = BC$. Возьмём на основании AC точку D. Тогда $\sin\angle BDA =$ $= \sin\angle BDC$. Значит, $\dfrac{AB}{\sin\angle BDA} = \dfrac{BC}{\sin\angle BDC}$, т. е. радиусы описанных около $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ окружностей равны.

957. Заметим, что точки A, B, C, D лежат на окружности. Это следует из равенства $\angle ABD = \angle ACD$. Значит, $\dfrac{AD}{\sin 45°} = \dfrac{BC}{\sin 30°}$.

958. Пусть в $\triangle ABC$ $\angle A = \alpha$, K и M — точки касания со сторонами AB и AC, Q — центр вписанной окружности. Мы знаем, что $BC = 2R \cdot \sin\alpha$. Кроме того, из прямоугольного $\triangle AKQ$ найдём $AK = r \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. Значит, периметр будет равен $(AK + AM) + (BK + CM) + BC =$ $= 2AK + 2BC = 2r \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} + 4R \cdot \sin\alpha$.

959. $2a(1 + \cos\alpha)$. Положим $AD = x$, $BC = y$. Приравняв выражения для BD^2, полученные по теореме косинусов для $\triangle BAD$ и $\triangle BCD$, получим $a^2 + x^2 - 2ax\cos\alpha =$ $= a^2 + y^2 - 2ay\cos\alpha$, откуда $(x - y)(x + y - 2a\cos\alpha) =$ $= 0$. Но $x \neq y$, значит, $x + y = 2a\cos\alpha$.

960. Рассмотрим расположение точек на рисунке 279. Положим $\angle BAM = \angle BCM = \alpha$, $\angle ABL = \varphi$. По теореме синусов $\dfrac{BL}{\sin\alpha} = \dfrac{AL}{\sin\varphi}$, $\dfrac{BK}{\sin\alpha} = \dfrac{CK}{\sin(180° - \varphi)}$ или $\dfrac{BL}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{\sin\varphi}$, $\dfrac{b}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\varphi}$, откуда $BL = \dfrac{ab}{c}$.

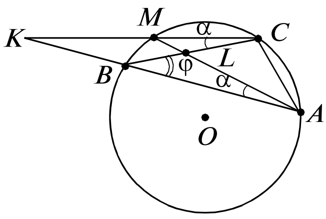


Рис. 279

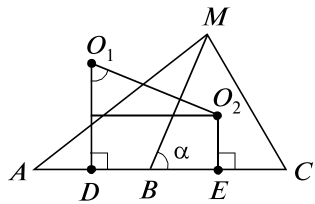


Рис. 280

961. Обозначим через D и E середины AB и BC, O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около $\triangle ABM$ и $\triangle BCM$ соответственно (рис. 280). Отрезок O_1O_2 перпендикулярен BM. Возьмём на O_1D точку K так, что $O_2K \parallel DE$. Имеем $O_2K = DE = \frac{a}{2}$, $\angle O_2O_1K = \alpha$, $O_1O_2 = \frac{a}{2\sin\alpha}$. (Для полноты решения надо рассмотреть и другие случаи расположения точек A, B и C, а также случай $\alpha > 90°$.)

963. Возьмём на AC точку K так, что $AK = 11\frac{1}{4}$. Рассмотрев $\triangle ABC$ $\left(\cos\angle BAC = \frac{24}{25}\right)$, найдём $BK = 5\frac{1}{4}$. Поскольку $\angle CAD = 90°$, то $DK = \sqrt{\left(\frac{45}{4}\right)^2 + 15^2} = \frac{75}{4} = 18\frac{1}{4}$.

Оказывается, что $BK + KD = 5\frac{1}{4} + 18\frac{3}{4} = 24 = BD$. Это означает, что точки B, K и D лежат на одной прямой, а точки A, B, C и D — в одной плоскости. Можно поступить следующим образом: расположим $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ так, чтобы они лежали в одной плоскости, причём точки B и D располагались бы по разные стороны от AC. (Мы как бы выкидываем условие, что $BD = 24$.) Оказывается (сделайте вычисления), для этого расположения длина BD равна 24.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Докажите, что из диагоналей параллелограмма больше та, которая соединяет вершины острых углов.

2. Три равных квадрата расположены так, как показано на рисунке 281. Найдите угол ABC.

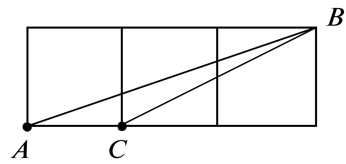


Рис. 281

3. Окружность, проходящая через вершины A и D единичного квадрата $ABCD$, пересекает прямые AB и AD в точках K и M, отличных от A. Найдите величину проекции KM на AC.

7.3. Соотношения между отрезками, возникающими при пересечении прямых с окружностью

В параграфе рассматривается материал, традиционный для любого курса планиметрии: пропорциональность отрезков хорд и секущих окружности.

Доказательство теорем о пропорциональности отрезков хорд и секущих окружности ведётся с опорой на знания учащихся подобия треугольников. Теоретический материал этого параграфа широко применяется при решении самых разнообразных геометрических задач. Поэтому основное внимание должно быть уделено решению задач.

При изучении § 7.3 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— изображать и выделять из ситуации, изображённой на чертежах или рисунках, конфигурацию, позволяющую применить теоремы о пропорциональности отрезков хорд и секущих окружности;

— формулировать и объяснять формулировку теоремы о пропорциональности отрезков хорд и секущих окружности;

— доказывать теоремы о пропорциональности отрезков хорд и секущих окружности;

— решать задачи на вычисление и доказательство с использованием теорем о пропорциональности отрезков хорд и секущих окружности.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

Две теоремы, доказанные в параграфе, являются фактически двумя задачами, с решением которых вполне могут справиться учащиеся самостоятельно. Урок можно организовать, как самостоятельную работу учащихся с учебником.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На уроке: в классе — параграф; № 976, 980, 984—988; дома — № 1—2В, № 977, 978, 979, 981, 982, 983, № 157Т.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

М 1. Сформулируйте и докажите теорему 7.7.
М 2. Сформулируйте и докажите теорему 7.8.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

Основная часть задач решается устно с выполнением чертежа на доске и в тетради. № 973, 974 и 975 .

977. Квадрат касательной как к одной, так и к другой окружности равен $MA \cdot MB$.

978. Из подобия $\triangle ABM$ и $\triangle DCM$ следует, что $\frac{DM}{AM} = \frac{CD}{AB} = \frac{3}{2}$. Значит, $DM = \frac{3}{2}AM = 3CM$, $DA = \frac{DM}{MC} \cdot BC = 3$.

983. Из равенства $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ найдём $MD = CM = 2$, т. е. M — середина CD.

984. Пусть K и M — середины катета AC и гипотенузы AB (рис. 282). Поскольку $KM = 2$ и $KM \parallel CB$, то точка касания окружности с CB лежит на серединном перпендикуляре к KM и делит CB на отрезки 1 и 3. Пусть длина искомой хорды равна x. По теореме о касательной и секущей имеем уравнение $\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2} + x\right) = 9$ $\left(\text{или } \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2} - x\right) = 9\right)$, откуда $x = 1{,}1$ (второй случай проводит к отрицательному x).

985. Пусть M — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ (рис. 283). Из подобия $\triangle ABM$ и

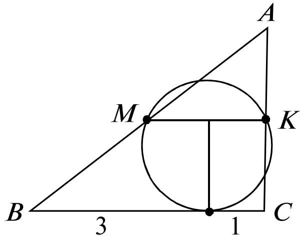


Рис. 282

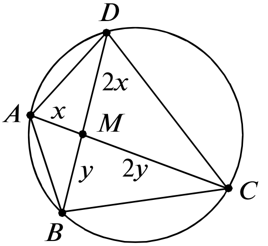


Рис. 283

$\triangle DCM$ следует $\frac{AM}{DM} = \frac{BM}{CM} = \frac{AB}{DC} = \frac{1}{2}$. Положим $AM = x$, $DM = 2x$, $BM = y$, $CM = 2y$. Имеем $\frac{2}{3} = \frac{BD}{AC} = \frac{2x+y}{x+2y}$, откуда $y = 4x$. Из подобия $\triangle ADM$ и $\triangle BCM$ имеем $\frac{AD}{BC} = \frac{AM}{BM} = \frac{1}{4}$.

986. M — центр окружности, а значит, любая хорда, проходящая через M, делится этой точкой пополам. Докажем это. Пусть AB и CD — две хорды, для которых M — середина. Из равенства $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ получим, что $AB = CD$. Отсюда получаем, что $ACBD$ — прямоугольник.

987. Положим $CD = a$, $AB = 2a$. Пусть окружности пересекаются в точках M и L, $BK = x$ (рис. 284). Имеем $AK \cdot KC = MK \cdot KD = BK \cdot KD$, откуда $(2a + x)(3 - x) = x(a + 3 - x)$, $x = 2$.

988. Пусть M — точка, через которую проведены прямые, EF — общая хорда (рис. 285). Имеем $AM \cdot MB = EM \cdot MF = CM \cdot MD$, т. е. $\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM}$. Значит, $\triangle AMC$ и $\triangle DMB$ подобны, $\angle ACM = \angle MBD$ или $\angle ACD = \angle ABD$, т. е. A, B, C и D лежат на одной окружности.

989. Воспользуемся тем, что плоскость пересекает сферу по окружности. Поэтому (точка L — середина отрезка CD) $CK \cdot CB = CL \cdot CD$. Значит, $CK = \frac{32}{7}$. Из подобия $\triangle CMK$ и $\triangle CBA$ имеем $\frac{MK}{AB} = \frac{CK}{CA} = \frac{32}{63}$, $MK = \frac{128}{63}$.

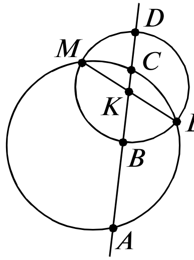


Рис. 284

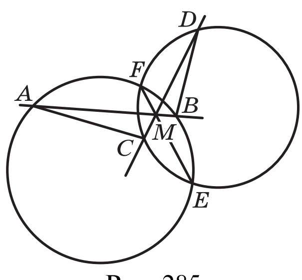


Рис. 285

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Вариант 1

1. В $\triangle ABC$ проведена медиана BM. Определите, какая из его сторон AB или BC больше, если $\angle BMA = 80°$.

А. $BC = AB$. Б. $BC > AB$. В. $BC < AB$.

2. Углы BAD и CDA при основании AD трапеции $ABCD$ равны 45° и 30° соответственно, боковая сторона AB равна $5\sqrt{2}$ см. Найдите сторону CD.

А. $10\sqrt{2}$ см. Б. $5\sqrt{\frac{1}{2}}$ см. В. 10 см. Г. $5\sqrt{2}$ см.

3. Найдите боковую сторону равнобокой трапеции $ABCD$, если длины её оснований равны 11 см и 27 см, а высота равна 15 см.

А. 16 см. Б. 17 см. В. $\sqrt{481}$ см. Г. $\sqrt{161}$ см.

4. Из точки A к окружности с центром в точке O проведены секущая AQ и касательная AB. Найдите отрезок AB, если $AQ = 9$ см и $AP = 4$ см (рис. 286).

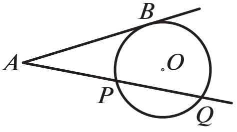


Рис. 286

Ответ: ________________________________

5. Стороны AB и BC $\triangle ABC$ соответственно равны 9 см и 6 см. Центр окружности (точка O), проходящей через вершины A и C $\triangle ABC$, лежит на стороне AB. Точки D и F являются точками пересечения продолжения сторон AB и BC с окружностью. Найдите радиус окружности, если BD равен 3 см.

Вариант 2

1. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Определите, какая из его сторон — BC или CD — меньше, если угол AOB — острый.

А. $BC > CD$. Б. $BC = CD$. В. $BC < CD$.

2. В $\triangle ABC$ углы BCA и ABC, прилежащие к стороне BC, равны 45° и 60° соответственно. Сторона AC равна 8 см. Найдите сторону, противоположную углу в 45°.

А. $4\sqrt{6}$ см. Б. $8\sqrt{6}$ см. В. $8\sqrt{\frac{2}{3}}$ см. Г. $4\sqrt{\frac{2}{3}}$ см.

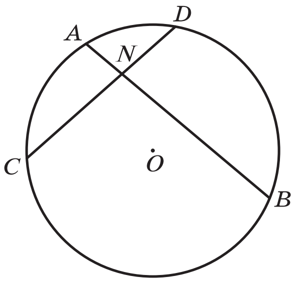


Рис. 287

3. Найдите боковую сторону равнобокой трапеции $ABCD$, если длины её оснований равны 11 см и 27 см, а высота равна 15 см.

А. 16 см. В. $\sqrt{481}$ см.

Б. 17 см. Г. $\sqrt{161}$ см.

4. Две хорды AB и CD окружности пересекаются в точке N. Найдите длину отрезка AN, если $BN = 30$ см, $CN = 15$ см и $DN = 6$ см (рис. 287).

Ответ: ______________________________

5. Стороны AB и BC $\triangle ABC$ соответственно равны 15 см и 12 см. Центр окружности (точка O), проходящей через вершины A и C треугольника ABC, лежит на стороне AB. Точки F и D являются точками пересечения сторон AB и BC с окружностью. Найдите радиус окружности, если BD равен 5 см.

Глава 8
Задачи и теоремы геометрии (10 ч)

В главе систематизируются и обобщаются знания учащихся не только по курсу 8 класса, но также и по курсу 7 класса.

Практически всё содержание главы составляет материал, совершенно не традиционный для курса планиметрии. Как и в 7 классе организация обобщения и систематизации знаний учащихся проводится на основе систематизации методов, с которыми учащиеся познакомились в процессе изучения курсов 7 и 8 классов, а также интересных и полезных методов, которые в силу авторской концепции способствуют развитию математического кругозора. Кроме того, здесь доказываются несколько теорем, которые расширяют знания учащихся о треугольниках и четырёхугольниках.

Предложенная автором методика повторения позволяет объединить теоретические и практические аспекты курса, способствует установлению новых связей между отдельными частями учебного материала, более широких выводов и обобщений, активизирует процесс усвоения предмета и повышает интерес ученика к математике.

Поскольку материал данной главы не является программным, выносить его весь для работы на уроке или только какую-то часть, решает сам учитель. Тема: «Вневписанные окружности» рекомендуется «Примерными программами основного общего образования» для классов повышенной математической подготовки. Кроме того, содержание этой главы в зависимости от уровня индивидуальных знаний учащихся позволяет организовать дифференцированную работу с классом.

Электронное приложение к учебнику даёт самое полное освещение этой темы и способствует лучшему пониманию методов геометрии и обучению их применению. Использование этих методов позволяет учащимся успешно справляться с широким классом задач, в том числе задач повышенного уровня трудности и высокого уровня сложности.

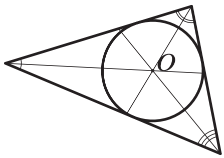
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

1 При работе над материалом по § 8.1 «Замечательные точки треугольника» сделать в тетрадях конспект в виде таблицы 6, первые пять строчек которой отражают наиболее важные геометрические факты параграфа. Кроме того, обсудить методы, с помощью которых определяются точки пересечения серединных перпендикуляров, высот, медиан и биссектрис треугольника, а также построения центров вневписанных окружностей.

Задача № 1020 — важный тип задач (на ГМТ) даёт возможность в ходе решения вспомнить свойства высот, биссектрис и медиан треугольника. Решение этой задачи следует организовать в форме беседы, при необходимости можно сделать в тетрадях чертёж или серию рисунков, иллюстрирующих решение.

Замечательные точки треугольника

Таблица 6

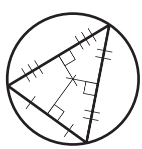


Центр вписанной в треугольник окружности — точка пересечения биссектрис внутренних углов треугольника

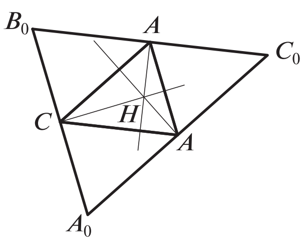
Свойства биссектрисы угла треугольника

Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные заключающим её сторонам.

Квадрат биссектрисы внутреннего угла треугольника равен произведению сторон, её заключающих, без произведения отрезков третьей стороны, возникающих при пересечении её с биссектрисой



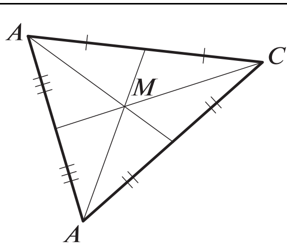
Центр описанной окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника



Точка пересечения высот H треугольника ABC:

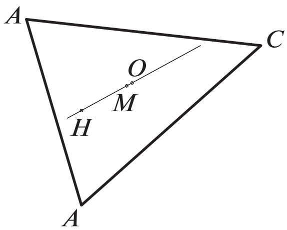
1) является центром окружности, описанной около $\triangle A_0B_0C_0$;

2) является центром окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются основания высот треугольника ABC



Точка пересечения медиан треугольника делит их в отношении 2 : 1 (считая от вершин)

Окончание табл. 6

	Прямая Эйлера Три замечательные точки треугольника: центр описанной окружности (O), точка пересечения медиан (M) и точка пересечения высот H — лежат на одной прямой

② В § 8.2 рассматривается очень важное свойство биссектрисы угла треугольника.

Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные заключающим её сторонам.

И формула вычисления её длины.

Квадрат биссектрисы внутреннего угла треугольника равен произведению сторон, её заключающих, без произведения отрезков третьей стороны, возникающих при пересечении её с биссектрисой.

Это позволяет внести в таблицу ещё одну строчку (шестая, табл. 5).

③ § 8.3 и 8.4 познакомят учащихся с нестандартными методами решения задач на построение. Если метод подобия в задачах на построение рассматривается в некоторых учебниках, то построение отрезка по формуле, как правило, применяется практически только при построении пропорциональных отрезков. Здесь же даётся достаточно полный набор алгоритмов решения задач типа построения отрезка по формуле. Эти параграфы полезнее.

④ В § 8.5 рассматриваются свойства и признаки вписанных и описанных четырёхугольников, позволяющих решать целый ряд интересных и содержательных задач. На уроках следует разобрать теоремы 8.5 и 8.6.

⑤ § 8.6 отмечен автором, как необязательный для классной работы, и его содержание можно вынести на внеклассную работу.

Предлагается решать задачи, рекомендованные к данной главе, в форме беседы, с привлечением электронного приложения.

8.1. Замечательные точки треугольника

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

№ 993, 1018, 1019, 1020 и 1028 .

995. $\angle BJC = 90° + \frac{\alpha}{2}$, $\angle BJ_aC = 90° - \frac{\alpha}{2}$, $\angle BJ_bC = \frac{\alpha}{2}$. Для нахождения углов применяется один способ. Найдём $\angle BJ_aC$. Пусть углы B и C данного треугольника равны β и γ, при этом $\beta + \gamma = 180° - \alpha$. Тогда $\angle J_aBC = \frac{1}{2}(180° - \beta) = 90° - \frac{\beta}{2}$. $\angle J_aCB = 90° - \frac{\gamma}{2}$. $\angle BJ_aC = 180° - \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) - \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\beta + \gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Углы BJ_bC и BJC находятся аналогично.

996. Докажите, что точка M совпадает с центром описанной около треугольника ABC окружности.

997. Диагонали AP, KC и BM являются биссектрисами внутренних углов $\triangle ABC$ (рис. 288). Одновременно PA, MB и KC перпендикулярны к соответствующим сторонам $\triangle KPM$. Докажем, что прямые KP и BM перпендикулярны. Сумма дуг KB и PM (PM содержит точку C) равна половине окружности, значит, KP и BM перпендикулярны. Аналогично доказывается, что прямые PM и KC, KM и AP перпендикулярны. Таким образом, указанные в условии задачи прямые пересекаются в одной точке, так как прямые BM, KC и AP содержат высоты $\triangle KPM$. А для $\triangle ABC$ эта точка есть точка пересечения биссектрис, т. е. центр вписанной окружности.

1000. Пусть M — середина дуги BC (рис. 289). Имеем $\angle MBC = \angle MCB = \angle MBA$, т. е. MB — биссектриса $\angle ACB$.

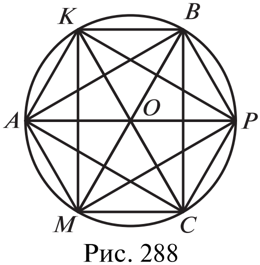


Рис. 288

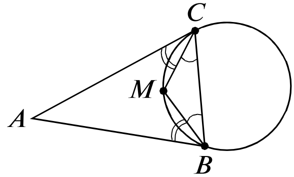


Рис. 289

1003. Докажите, что каждый угол BOC, BJC, BHC равен $120°$ ($\angle BJC = 120°$ (см. № 995), $\angle BJC = 90° + \frac{1}{2}60° = 120°$). При этом точки O, J и H расположены по одну сторону от BC. (Отдельно следует рассмотреть случай тупоугольного треугольника.) Угол OJC равен либо $30°$, либо $150°$.

1005. Утверждение задачи следует из теоремы синусов и равенства синусов углов BAC и BHC (и других пар).

1006. Рассмотрим $\triangle ABC$, H — точка пересечения его высот. Поскольку радиусы окружностей, описанных около $\triangle ABC$ и $\triangle HBC$ равны (см. № 1005), то эти окружности симметричны относительно общей хорды BC.

1008. Пусть медианы AA_1, BB_1, CC_1 $\triangle ABC$ пересекаются в точке M (рис. 290). Возьмём точку K — середину отрезка BM. Стороны $\triangle MA_1K$ равны $\frac{1}{3}$ соответствующих медиан $\left(KA_1 = \frac{1}{2}MC = \frac{1}{3}CC_1\right)$. Треугольник из медиан подобен $\triangle MA_1K$ с коэффициентом 3.

1009. Точка D является серединой дуги BC, так как $\angle BAD = \angle DAC$ (рис. 291). А поскольку A_3 — середина хорды BC, то DA_3 перпендикулярна BC, значит, параллельна AA_1. Так как A и D лежат по разные стороны от BC, то их проекции на BC будут лежать по разные стороны от A_2.

1018. Вернёмся к рисунку 289 и № 1009. Прямоугольный $\triangle A_1AA_2$ можем построить, так как знаем катет AA_1 и гипотенузу AA_2. Затем находим точку A_3. Восста-

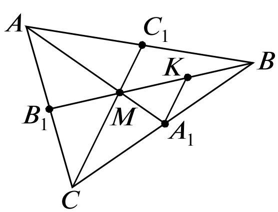


Рис. 290

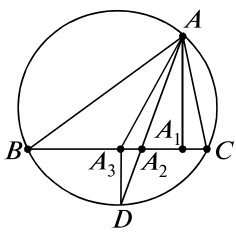


Рис. 291

вляя к прямой A_1A_2 в точке A_3 перпендикуляр и продолжая AA_2, найдём точку D. Центр окружности, описанной около искомого треугольника, находится на прямой DA_3 и серединном перпендикуляре к AD. Построив этот центр, построим и весь треугольник.

1019. См. № 1008.

1020. а) Окружность, симметричная данной относительно прямой BC, исключая точки B_1 и C_1 такие, что BCC_1B_1 — прямоугольник. (Эти точки соответствуют так называемым вырожденным треугольникам, когда A совпадает с B или C.) б) Искомое геометрическое место состоит из двух дуг, концами которых являются точки B и C. Задать эти дуги можно следующим образом. Пусть хорда BC делит данную окружность на две дуги, вмещающие углы α и $180° - \alpha$. Тогда (см. № 995), если точка A расположена по одну сторону от BC, то $\angle BJC = 90° + \frac{\alpha}{2}$, а если по другую, то $\angle BJC = 90° + \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 180° - \frac{\alpha}{2}$. в) Искомое геометрическое место есть окружность втрое меньшего радиуса. Доказать это можно следующим образом. Обозначим через A_1 середину BC, а через M — точку пересечения медиан. $A_1M = \frac{1}{3}A_1A$. Проведём через M прямые, параллельные AB и AC, и обозначим через B_1 и C_1 точки пересечения этих прямых с BC. При этом точки B_1 и C_1 постоянны, не зависят от положения точки A, $A_1B_1 = A_1C_1 = \frac{1}{6}BC$, а $\triangle B_1MC_1$ подобен $\triangle BAC$ с коэффициентом $\frac{1}{3}$. Из этого следует, что когда A описывает окружность, точка M также описывает втрое меньшую окружность, проходящую через точки B_1 и C_1 (сами точки в искомое множество не входят).

1021. Обозначим через O центр описанной окружности, A_1 и K соответственно середины BC и AH (рис. 292). При доказательстве теоремы 8.1 мы попутно доказали, что $AH = 2OA_1$. Значит, $OA_1 = AK$, т. е.

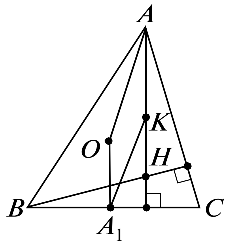


Рис. 292

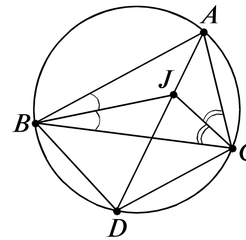


Рис. 293

OA_1KA — параллелограмм и $A_1K = OA = R$ (R — радиус описанной окружности).

1022. Рассмотрим точку M_0 такую, что $AEMM_0$ (и $BDMM_0$) параллелограмм. Точка M_0 будет точкой пересечения высот треугольника ABC.

1023. Радиус окружности, проходящей через середины сторон треугольника, равен $\frac{R}{2}$, с другой стороны, радиус этой окружности не меньше радиуса окружности, вписанной в данный треугольник, т. е. $\frac{R}{2} \geqslant r$, $R \geqslant 2r$.

1024. Рассмотрим несколько случаев. 1) Пусть точки O и M совпадают. Тогда каждая медиана треугольника является его высотой. 2) Пусть точки M и J совпадают. Тогда прямые, соединяющие M (J) с вершинами, будут делить пополам стороны и углы. Значит, этот треугольник равносторонний. 3) Пусть точки O и H совпадают. В этом случае, как и в первом, высоты будут совпадать с медианами.

1025. Имеем $\angle DJB = \angle JAB + \angle JBA = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$,

$\angle JBD = \angle JBC + \angle CBD = \angle JBC + \angle JAB = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

и $DJ = DB$. Точно так же $DJ = DC$ (рис. 293).

1026. См. предыдущую задачу.

1028. Как известно, $AJ - JD = R^2 - d^2$. С другой стороны (см. задачу 1027), $AJ - JD = 2Rr$, т. е. $R^2 - d^2 = 2Rr$, $d^2 = R^2 - 2Rr$.

1029. Рассмотрим пирамиду $ABCD$ (рис. 294, *а*). Пусть K — середина DC, L и M — точки пересечения

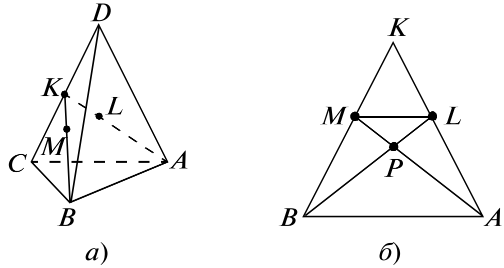


Рис. 294

медиан $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ соответственно. Рассмотрим $\triangle KAB$ (рис. 294, *б*). Так как $\frac{KL}{KA} = \frac{KM}{KB} = \frac{1}{3}$, то $LM \parallel AB$ и $\frac{LM}{AB} = \frac{1}{3}$. Таким образом, AM и BL пересекаются в точке P, которая делит AM и BL в отношении $3:1$. $\frac{BP}{PL} = \frac{AP}{PM} = \frac{AB}{LM} = 3$. Далее нетрудно доказать, что все четыре отрезка пересекаются в точке P.

8.2. Некоторые теоремы и задачи геометрии. Метод подобия

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

№ 1037, 1038, 1020 и 1028 .

1030. Утверждение задачи следует из теоремы 8.2 и равенства $\frac{8}{6} = \frac{12}{9}$.

1032. Задачу решим методом ***Задачи 1***. K — середина медианы BB_1 (рис. 295). Проведём через B прямую, параллельную AC. M — точка пересечения этой прямой с AK. Из подобия (даже равенства) $\triangle BMK$ и $\triangle B_1AK$ найдём $BM = AB_1 = \frac{1}{2}$. Значит, AK делит BC в отношении $\frac{BM}{AC} = \frac{1}{2}$.

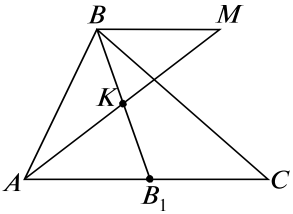


Рис. 295

1034. Обозначим через P — точку пересечения CK и AM, а через L точку пересечения AM и прямой, проходящей через C и параллельной AB. Из подобия $\triangle ABM$ и $\triangle LCM$ имеем $\dfrac{LK}{AB} = \dfrac{CM}{MB} = 2$, т. е. $LC = 2AB$. Теперь из подобия $\triangle AKP$ и $\triangle LCP$ будем иметь $\dfrac{CP}{PK} = \dfrac{CL}{AK} = \dfrac{2AB}{\frac{1}{3}AB} = 6$. Отсюда $CP : PK = 6 : 1$. Аналогично доказывается отношение $AP : PM = 3 : 4$. Для этого надо через A провести прямую, параллельную BC.

1037. а) $p = \dfrac{9}{2}$, $l = \dfrac{8}{3}$; б) $p = 5$, $l = 1$; в) $m = \dfrac{2}{3}$, $l = 5$; г) $m = \dfrac{1}{2}$, $p = 3$; д) $k = \dfrac{1}{4}$, $p = 15$; е) $k = \dfrac{1}{3}$, $m = 2$. Проведём через точку A прямую, параллельную BC, и продолжим CK до пересечения с этой прямой в точке D. Получаем две пары подобных треугольников: $\triangle ADK \sim \triangle BCK$, $\triangle AOD \sim \triangle MCO$. Из соответствующих соотношений найдём $l = k(m + 1)$. Рассматривая прямую, проходящую через C параллельно AB, найдём $p = \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{k} + 1\right)$.

1038. Проведём через C прямую, параллельную AB, и обозначим через L точку её пересечения с KM (рис. 296). Из соответствующих подобий найдём $\dfrac{KB}{CL} = \dfrac{BM}{MC}$, $\dfrac{CL}{AK} = \dfrac{CP}{AP}$. Перемножив эти равенства, найдём $\dfrac{KB}{AK} = \dfrac{BM}{MC} \cdot \dfrac{CP}{AP}$ или $\dfrac{AK}{KB} \cdot \dfrac{BM}{MC} \cdot \dfrac{CP}{AP} = 1$.

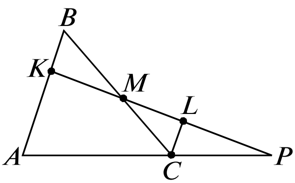


Рис. 296

Замечание. Фактически здесь рассматривается теорема Менелая. На сторонах AB, BC и AC $\triangle ABC$ отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1.$$ [1]

---

[1] *Шарыгин И. Ф.* Задачи по геометрии. (Планиметрия). — М.: Наука, 1986.

1039. $\sqrt{ab}$. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle DBA$.

1040. $\sqrt{ab}$. Из равенств $\angle KBC = \angle BCM$, $\angle BMC = \angle KCB$ следует, что $\triangle KBC \sim \triangle BCM$.

1041. $\sqrt{ab}$. В задаче № 639 (§ 5.4) утверждалось, что M — середина дуги BC (не содержащей A). Из этого следует подобие $\triangle MBD \sim \triangle MAB$ ($\angle MBD = \angle BAM$, $\angle BMD$ — общий).

1042. $\sqrt{ab}$. Пусть AD — высота в $\triangle ABC$, K — точка пересечения прямых l и BC, $\angle AKB = \alpha$. Имеем $KA^2 = KC \cdot KB$. Умножим это равенство на $(\sin\alpha)^2$. Получим $(KA\sin\alpha)^2 = (KC\sin\alpha) \cdot (KB\sin\alpha)$ или $AD^2 = ab$. Другое решение следует из двух подобий: $\triangle LBA \sim \triangle DAC$ и $\triangle DAB \sim \triangle MCA$, где точки L и M — проекции точек B и C на прямую l.

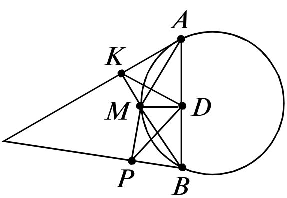


Рис. 297

1043. Точки K и P — проекции точки M на касательные, проходящие через точки A и B, точка D — является проекцией точки M на AB (рис. 297). Точки A, K, M и D лежат на окружности с диаметром AM. Значит, $\angle KDM = \angle MAK = \angle ABM$. С другой стороны, так как точки B, P, M и D расположены на одной окружности, то $\angle MPD = \angle MBD$. Итак, $\angle KDM = \angle MPD$. Точно так же доказывается, что $\angle MKD = \angle MDP$, значит, $\triangle MDK \sim \triangle MPD$, $\dfrac{KM}{MD} = \dfrac{MD}{MP}$, $MD = \sqrt{KM \cdot MP} = \sqrt{ab}$.

1044. $\sqrt{ab}$. Пусть O — центр описанной окружности. Докажите подобие $\triangle AOK$ и $\triangle AMO$.

1045. $\sqrt{ab}$. Пусть $ABCD$ — равнобокая трапеция с основаниями AD и BC, описанная около окружности. Для трапеции $ABCD$ выполняется равенство $AD + BC = AB + CD = 2a$ (см. № 637 § 5.4), т. е. средняя линия трапеции равна a. Пусть теперь точка L — середина стороны AB, точка K — точка касания окружности с центром в точке O со стороной AB. Точка P — середина отрезка, соединяющего точки касания окружности со сторонами AB и CD. Из подобия $\triangle KOP$ и $\triangle OLK$ ($\angle PKO =$

$= \angle KOL$, $\angle OPK = \angle OKL = 90°$) следует, что $\dfrac{LO}{KO} = \dfrac{KO}{KP}$, откуда

$$KO = R = \sqrt{LO \cdot KP} = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}}.$$

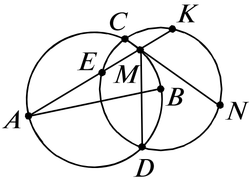


Рис. 298

1047. $\sqrt{ab}$. Точки K и N — вторые точки пересечения прямых AM и CM со второй окружностью (рис. 298). Поскольку $\angle AMB = 90°$, то $EM = MK$. Заметим, что $\angle CMA = \angle AMD$ (опираются на равные дуги). Из того, что M — середина EK и $\angle EMD = \angle NMK$, следует, что $MN = MD = b$. Теперь получаем $EM^2 = EM \cdot MK = CM \cdot MN = ab$.

1048. Отрезок CM — биссектриса угла C, при этом $AM = a$, $BM = b$. По теореме 8.1: $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{b}{a}$. Обозначим $BD = x$, $CD = y$, тогда из подобия $\triangle DCB$ и $\triangle DAC$ имеем $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{CB}{AC} = \dfrac{b}{a}$ или $\dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{x + a + b} = \dfrac{b}{a}$. Откуда $x = \dfrac{by}{a}$, значит, $\dfrac{y}{\dfrac{by}{a} + a + b} = \dfrac{b}{a}$, $a^2y = b^2y + ab(a + b)$, $y = \dfrac{ab}{a - b}$.

1049. Лишь одна точка G лежит на ребре AC пирамиды, а точки E и F — на продолжениях соответствующих рёбер. При этом $\dfrac{AE}{ED} = 2$, $\dfrac{BF}{CF} = 6$, $\dfrac{CG}{GA} = \dfrac{1}{6}$. Воспользуйтесь трижды теоремой Менелая, доказанной при решении № 1038.

8.3. Построение отрезка по формуле. Метод подобия в задачах на построение

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

№ 1050, 1052, 1058, 1063 и 1064.

1051. б) $\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}}$. г) Построим сначала $y = \dfrac{ab}{d}$, тогда $x = \dfrac{yc}{e}$. е) Умножим наше равенство на a^2, получим $\frac{a^2}{x} = a + \frac{a^2}{b} + \frac{a^2}{c} + \frac{a}{d} + \frac{a^2}{e}$. Построим отрезки $y = \frac{a^2}{b}$, $z = \frac{a^2}{c}$ и другие, затем сумму $a + y + z + ... = m$, тогда $x = \frac{a^2}{m}$.

1053. Пусть длина данного катета a, другого x, его проекция на гипотенузу b. Тогда гипотенуза равна $\sqrt{a^2 + x^2}$. И для x имеем уравнение $x^2 = \sqrt{a^2 + x^2} - b$, $x^4 - b^2x^2 - a^2b^2 = 0$, $x^2 = \frac{b^2 + b\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$. Затем поэтапно строим отрезок x.

1058. Зная два угла, можем построить треугольник, подобный искомому.

1061. Первые два условия задают треугольники, подобные искомому.

1063. Пусть точка A — вершина угла, внутри него дана точка M. Построим любую окружность, касающуюся сторон угла, с центром в O. Обозначим через B_1 и B_2 точки пересечения прямой AM с построенной окружностью. Проведём через вершину A прямую, параллельную B_1O (или B_2O). Точка пересечения этой прямой с биссектрисой угла будет центром одной из искомых окружностей.

1064. Обозначим данную прямую l, а данные точки A и B. Обозначим через C точку пересечения прямой AB с данной прямой l. (Случай $AB \parallel l$ достаточно простой.) Если M — точка касания прямой l с искомой окружностью, то $CM = \sqrt{CA \cdot CB}$, т. е. отрезок CM можно построить. Задача имеет два решения: точка M может располагаться по ту или другую стороны от C.

1065. Пусть в $\triangle ABC$ известны углы, образованные медианой BB_1 с AB и CB, и медиана AA_1. Продолжив BB_1 на расстояние BB_1, получим $\triangle BCA_2$, у которого известны все углы. То есть мы можем построить треугольник, подобный $\triangle BCA_2$, а затем и треугольник, подобный искомому $\triangle ABC$.

1066. Обозначим стороны $\triangle ABC$ $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Проведём в $\triangle ABC$ его высоты AA_1, BB_1, CC_1. Из подобия $\triangle CAA_1$ и $\triangle CBB_1$ следует, что $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a} = \frac{d^2}{h_a} : \frac{d^2}{h_b}$. Из этого следует подобие указанных в условии треугольников (по третьему признаку).

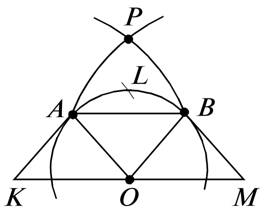


Рис. 299

1067. Построим точки K и M (рис. 299) такие, что $ABOK$ и $ABMO$ — параллелограммы. Затем строим две окружности с центрами K и M и радиусом $KB = AM$. Эти окружности пересекаются в точке P. Затем построим окружность с центром K (или M) и радиусом OP, находим на дуге AB точку L, являющуюся серединой дуги AB. Пусть $OA = OB = R$ и $AB = a$, тогда $KB^2 = MA^2 = 2a^2 + 2R^2 - R^2 = 2a^2 + R^2$. Далее $OP^2 = KP^2 - KO^2 = KB^2 - KO^2 = a^2 + R^2$. Если L — середина дуги AB, то нетрудно найти, что $KL^2 = a^2 + R^2 = PO^2$. Последнее равенство и доказывает наше построение.

8.4. Одно важное геометрическое место точек

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

№ 1071 и 1077 .

1072. Утверждение задачи следует из условия перпендикулярности двух прямых, доказанного в параграфе.

1073. Поскольку выполняется равенство $AB^2 - BC^2 = AD^2 - DA^2$ $(144 - 81 = 64 - 1)$, то диагонали этого четырёхугольника перпендикулярны. Значит, точка O — точка пересечения диагоналей — лежит на окружности с диаметром AB. При этом точка O описывает дугу этой окружности с концами D_1 и C_2, соответствующими положениям, изображённым на рисунке 300. (В этих случаях точка O совпадает соответственно либо с D_1, либо с C_2.) Докажем, что точка O не может лежать на дуге D_1B. Возьмём точку O на этой дуге и на

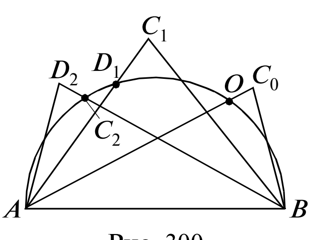


Рис. 300

луче AO, а точку C_0 так, что $BC_0 = 9$. Тогда $AC_0 > AC_1 = 9$. Это значит, что не существует четырёхугольника ABC_0D_0 с нужными сторонами.

1074. Если t — длины касательных, то $O_1M^2 = t^2 + R^2$, $O_2M^2 = t^2 + r^2$. Это означает, что M лежит на перпендикуляре к O_1O_2, для которого $O_1M^2 - O_2M^2 = R^2 - r^2$. При этом в наше геометрическое место входят все точки этого перпендикуляра, если окружности не пересекаются. Для пересекающихся окружностей исключается общая хорда.

1076. Обозначим центры и радиусы данных окружностей O_1, O_2 и O_3, R_1, R_2 и R_3. Общие хорды первой и второй окружностей, второй и третьей пересекаются в точке M. Тогда $O_1M^2 - O_2M^2 = R_1^2 - R_2^2$, $O_2M^2 - O_3M^2 = R_2^2 - R_3^2$. Сложив эти равенства, получим $O_1M^2 - O_3M^2 = R_1^2 - R_3^2$. Это означает, что M лежит на общей хорде первой и третьей окружностей.

1077. Проведём из M касательную MK к данной окружности (рис. 301). Имеем $MA^2 = MB \cdot MC = MK^2$. Значит, $MO^2 - MA^2 = MO^2 - MK^2 = R^2$ (R — радиус данной окружности). Отсюда следует, что M описывает прямую, перпендикулярную OA.

1178. Пусть M — точка касания вписанной в $\triangle ABC$ окружности со стороной AB (рис. 302). Имеем (см. № 623 § 5.4) $BM = \dfrac{AB + BC - AC}{2} = \dfrac{1}{2}(AB - a)$. Значит, точка M одна и та же для любого $\triangle ABC$. Кроме того, $\angle AOB$ — тупой. Искомое геометрическое место состоит из двух отрезков, перпендикулярных AB: MM_1

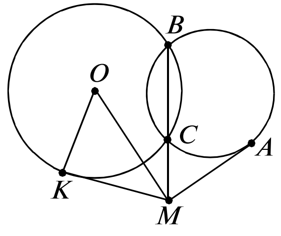


Рис. 301

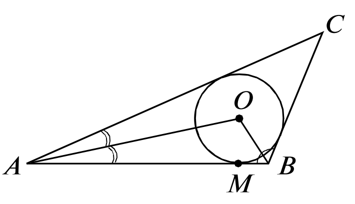


Рис. 302

и MM_2 таких, что $\angle AM_1B = \angle AM_2B = 90°$. (Концы отрезков — точки M, M_1, M_2 в наше геометрическое место не входят.)

8.5. Вписанные и описанные четырёхугольники

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

1079. На рисунке 303 точки B и C симметричны относительно AD, $\angle ADB > 90°$.

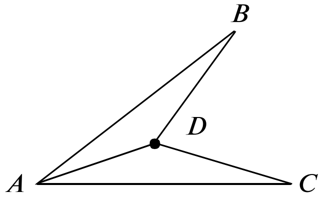


Рис. 303

1088. $\angle AOB = 2\angle C$, $\angle AJB = 90° + \frac{1}{2}\angle C$. Из равенства $2\angle C = 90° + \frac{1}{2}\angle C$ найдём $\angle C = 60°$.

1089. 60°. Решение аналогично решению № 1088.

1091. Воспользуйтесь теоремой 8.5.

1092. Обозначим, через M точку пересечения окружностей, описанных около $\triangle AB_1C_1$ и $\triangle A_1BC_1$. Пусть для определённости M внутри $\triangle ABC$. Тогда $\angle B_1MC_1 = 180° - \angle A$, $\angle A_1MC_1 = 180° - \angle B$. Значит, $\angle A_1MB_1 = 360° - (180° - \angle A) - (180° - \angle B) = \angle A + \angle B = 180° - \angle C$. Следовательно, четырёхугольник CA_1MB_1 является вписанным. Разберите самостоятельно случаи, когда M вне $\triangle ABC$[1].

1093. $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$. На продолжении дуги DC за точку C возьмём точку K так, что дуги CK и AB равны. Поскольку $\angle AMB$ измеряется полусуммой дуг AB и CD, то $\angle DCK = 180° - \alpha$. Нам осталось найти радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами a и b и углом между ними $180° - \alpha$.

1095. Докажите, что периметр $\triangle MBK$ равен сумме длин касательных, проведённых из B к вписанной окружности.

---

[1] Утверждение задачи остаётся верным, если A_1, B_1 и C_1 — произвольные точки на прямых BC, CA и AB, отличные от A, B и C.

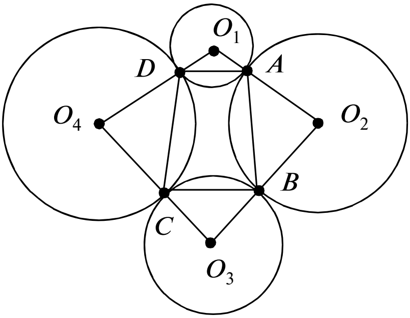


Рис. 304

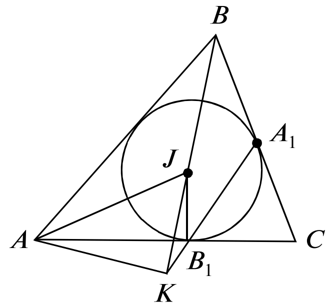


Рис. 305

1096. Обозначим через O_1, O_2, O_3 и O_4 центры окружностей, A, B, C и D — точки их касания (рис. 304). Можно выразить углы четырёхугольника $ABCD$ через углы четырёхугольника $O_1O_2O_3O_4$ и проверить, что сумма противоположных углов равна 180°. Есть и второй способ. Четырёхугольник $O_1O_2O_3O_4$ является описанным, так как суммы противоположных сторон равны. Значит, биссектрисы его углов пересекаются в одной точке. Но биссектрисы углов четырёхугольника $O_1O_2O_3O_4$ служат серединными перпендикулярами к соответствующим сторонам четырёхугольника $ABCD$.

1097. Пусть K вне отрезка AB_1 (рис. 305). Имеем $\angle AJK = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 90° - \frac{1}{2}\angle C$. $\angle AB_1K = \angle A_1B_1C = 90° - \frac{1}{2}\angle C$. Итак, точки A, J, B, K — на одной окружности. Значит, $\angle AKB = \angle AKJ = \angle AB_1J = 90°$.

1098. Пусть биссектрисы углов A и B четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а биссектрисы углов C и D — в точке K. Точки K и M — вершины соответствующих противоположных углов четырёхугольника, образованного биссектрисами. Сумма соответствующих углов этого четырёхугольника равна $\angle AMB + \angle CKD = 360° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 180°$.

1099. Рассмотрим вписанный четырёхугольник $ABCD$, сторона AD которого является диаметром окружности с центром O. Точки K, P и M являются проекциями точек A, O и D на прямую BC (рис. 306). Поскольку точка P — середина отрезков BC и KM, то $KB = CM$.

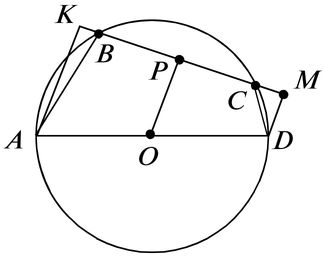


Рис. 306

8.6. Вычислительные методы в геометрии, или об одной задаче Архимеда

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

1100. а) $\frac{1}{3}$; б) $\sqrt{2} - 1$. Пусть O_1 — центр искомой окружности, K — точка её касания с OA, x — её радиус. Рассмотрим прямоугольный $\triangle OO_1K$. В этом треугольнике $O_1K = x$, $OO_1 = 1 - x$, $\angle O_1OK = \frac{1}{2}\angle AOB$.

а) $\frac{R^2 - a^2}{2R}$ $\frac{x}{1 - x} = \sin 30° = \frac{1}{2}$; б) $\frac{x}{1 - x} = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1101. $\frac{R^2 - a^2}{2R}$. Для искомого радиуса x имеет место уравнение $(R - x)^2 - x^2 = a$.

1104. Если a и b — радиусы меньших полуокружностей арбелоса, то $BD = 2\sqrt{ab}$. Длина общей указанной касательной равна $\sqrt{(a + b)^2 - (a - b)^2} = 2\sqrt{ab}$.

1105. $\frac{4Rr(R - r)}{(R + r)^2}$. Рассмотрим $\triangle O_1O_2O_3$, где O_1, O_2, O_3 — соответственно центры окружностей с радиусами R, r и x (рис. 307), а $O_1O_2 = R - r$, $O_1O_3 = R - x$, $O_2O_3 = r + x$ и высота O_3D к стороне O_1O_2 равна x. Получаем $O_1D = \sqrt{(R - x)^2 - x^2} = \sqrt{R^2 - 2Rx}$ и $O_2D = \sqrt{(r - x)^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - 2rx}$. Возможны два случая: $O_2D + O_1D = O_1O_2$ или $O_2D - O_1D = O_1O_2$. Заменяя в каждом случае все отрезки найденными выражения-

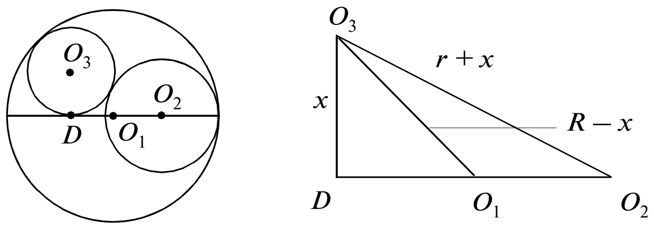


Рис. 307

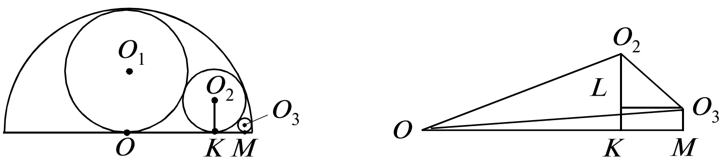


Рис. 308

ми, после двукратного возведения в квадрат (перед каждым возведением в квадрат один корень уединяется) найдём, что $x = \dfrac{4Rr}{(R+r)^2}$.

1109. Радиус второй окружности равен $\dfrac{R}{4}$ (рис. 308). Точки O_1, O_2, O_3 — центры этих окружностей. K и M — точки касания второй и третьей окружностей с радиусом OB. Изобразим отдельно эту конфигурацию ($O_3L \parallel KM$). Если радиус третьей окружности равен x, то $OO_3 = R - x$, $O_3M = x$, $O_2O_3 = \dfrac{R}{4} + x$. Откуда $O_2L = \dfrac{R}{4} - x$, $KM = O_3L = \sqrt{\left(\dfrac{R}{4} + x\right)^2 - \left(\dfrac{R}{4} - x\right)^2} = \sqrt{Rx}$. $OK = \sqrt{\left(\dfrac{3R}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{R}{4}\right)^2} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$, $OM = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} + \sqrt{Rx}$. По теореме Пифагора для $\triangle OMO_3$ получаем уравнение: $\left(\dfrac{R\sqrt{2}}{2} + \sqrt{Rx}\right)^2 + x^2 = (R - x)^2$, $\dfrac{R^2}{2} + R\sqrt{2Rx} + Rx = R^2 - 2Rx$, $6x + 2\sqrt{2Rx} - R = 0$.

Из этого уравнения $\sqrt{x} = \dfrac{-\sqrt{2R} + 2\sqrt{2R}}{6} = \dfrac{\sqrt{2R}}{6}$, $x = \dfrac{R}{18}$.

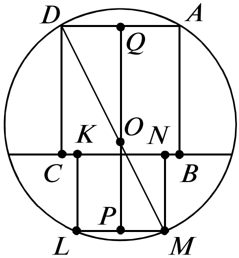


Рис. 309

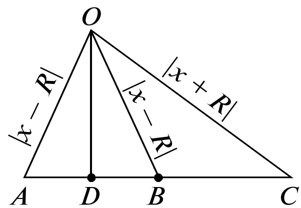


Рис. 310

1110. Пусть O — центр окружности, R — её радиус, x — сторона меньшего квадрата $KLMN$, y — большего, z — расстояние от O до BC. Обозначим через P и Q середины LM и AD (рис. 309). В прямоугольном $\triangle OMP$ знаем катеты $OP = x + z$, $PM = \frac{x}{2}$ и гипотенузу $OM = R$. По теореме Пифагора $(x + z)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = R^2$, $5x^2 + 8xz + 4(z^2 - R^2) = 0$. Рассмотрев точно так же $\triangle OQD$, получим уравнение $5y^2 - 8yz + 4(z^2 - R^2) = 0$. Выражая из этих уравнений R^2 и приравнивая полученные выражения, найдём $z = \frac{5}{8}(y - x) = \frac{5}{8}$.

1112. Решим задачу в общем виде. Обозначим через x радиус искомой окружности, точка O — её центр. Расстояния до центров данных окружностей от точки O может равняться либо $x + R$ (касание внешнее), либо $|x - R|$ (касание внутреннее). Все три отрезка равными быть не могут. Значит, возможны два случая.

1) $OA = OC = x + R$, $OB = |x - R|$. $\triangle OAB$ — прямоугольный: $(x + R)^2 - (x - R)^2 = 9$. Откуда $x = \frac{9}{4R}$.
2) $OA = OB = |x - R|$, $OC = x + R$. Пусть D — середина AB (рис. 310). Тогда $OD^2 = OA^2 - DA^2 = (x^2 - R^2) - \frac{9}{4}$ и $OD^2 = OC^2 - DC^2 = (x + R)^2 - \frac{81}{4}$, значит, $(x - R)^2 - \frac{9}{4} = (x + R)^2 - \frac{81}{4}$, $x = \frac{9}{2R}$. При этом должны выполняться

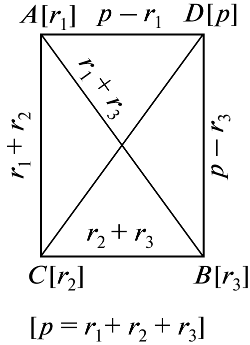


Рис. 311

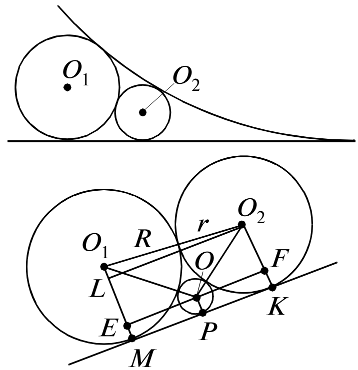


Рис. 312

условия $(x + R) + |x - R| \geqslant 6$, $x + R - |x - R| \geqslant 3$. Решение этих неравенств при $x = \dfrac{9}{2R}$ будет $R \leqslant \dfrac{3}{2}$ или $R \geqslant 3$.

1113. Вершины прямоугольного $\triangle ABC$ расположены в центрах окружностей, при этом $\angle BCA = 90°$ (рис. 311). Радиусы этих окружностей обозначим через r_1, r_2, r_3, причём $AC = r_1 + r_2$, $BC = r_1 + r_3$, $AB = r_2 + r_3$. Рассмотрим прямоугольник $ACBD$ и построим окружность с центром в точке D и радиусом p. Поскольку $DC = AB = r_2 + r_3 = p - r_1$, $DA = p - r_2$, $DB = p - r_3$, то окружности с центрами в точках C, A и B касаются изнутри окружности с центром в точке D. Нам осталось доказать, что найденная окружность единственна. В самом деле, если бы таких окружностей было две, то исходные три окружности располагались бы так, как показано на рисунке, а значит, не могли бы касаться друг друга попарно.

1114. Обратим внимание на то, что задача имеет два решения (рис. 312). Для нахождения радиуса искомой окружности можно поступить следующим образом. Обозначим центры данных и искомой окружностей через O_1, O_2 и O (или O' соответственно), M, K и P — их точки касания с некоторой прямой. Если x — искомый радиус, то $O_1O_2 = R + r$, $O_1O = R + x$, $O_2O = r + x$, $O_1M = R$, $O_2M = r$, $OP = x$. Проведём через O_2 и O прямые, параллельные MK, до пересечения в L, E и F с O_1M и O_2K. По теореме Пифагора найдём: $O_2L =$

$= 2\sqrt{Rr}$, $OE = 2\sqrt{Rx}$, $OF = 2\sqrt{rx}$. В первом случае имеем $O_2L = OE + OF$, а во втором — $O_2L = OE - OF$.

Контрольная работа № 7

Вариант 1

1. Определите вид треугольника, если точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам лежит на одной из сторон треугольника.

А. Прямоугольный. В. Тупоугольный.
Б. Остроугольный. Г. Определить невозможно.

2. Около параллелограмма, диагонали которого не перпендикулярны, описана окружность. Определите вид этого параллелограмма.

Ответ: ______________________

3. Найдите угол BAD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, если внешний угол четырёхугольника при вершине C равен 108°.

Ответ: ______________________

4. В $\triangle ABC$ проведены биссектрисы BE и CM. Найдите $\angle BEM$, если $\angle BAC$ равен 60° (рис. 313).

Ответ: ______________________

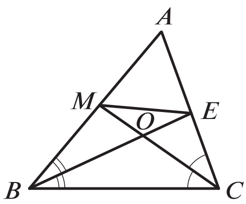


Рис. 313

5. Окружность, построенная на основании AD трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины боковых сторон AB и CD трапеции и касается основания BC. Найдите больший угол трапеции.

Вариант 2

1. Определите вид треугольника, если точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам лежит вне треугольника.

А. Прямоугольный. В. Тупоугольный.
Б. Остроугольный. Г. Определить невозможно.

2. В параллелограмм, диагонали которого не равны, вписана окружность. Определите вид этого параллелограмма.

Ответ: ______________________

3. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ $\angle ABD$ равен 50°, а $\angle CDA$ равен 75°. Найдите угол CAD.

Ответ: ______________________________

4. В $\triangle ABC$ проведены биссектрисы $\angle BCA$ и $\angle ABC$, которые пересекают стороны треугольника в точках M и E соответственно. Точка O — точка пересечения биссектрис. Найдите угол BAC, если точки A, M, O и E лежат на одной окружности (см. рис. 313).

Ответ: ______________________________

5. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ как на диаметре построена окружность, проходящая через точку пересечения диагоналей и середину стороны AD. Найдите острый угол параллелограмма.

8.7. Задачи на повторение

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

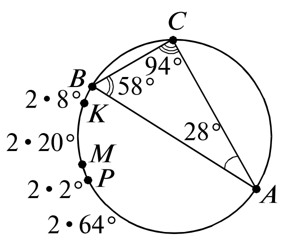


Рис. 314

1118. а) Точки A, B и C делят окружность на дуги: $AB = 2 \cdot 94°$, $BC = 2 \cdot 28°$, $CA = 2 \cdot 58°$ (рис. 314). Из условия следует, что дуги AK и AB равны, но отсчёт ведём в другом направлении. Значит, точка K принадлежит дуге AB, причём дуга BK равна $2(94° - 58° - 28°) = 2 \cdot 8°$. Точно так же равны, но отсчитываются в противоположных направлениях дуги BC и BM. Значит, дуга KM равна разности дуг BM и BK, т. е. $2(28° \cdot 8°) = 2 \cdot 20°$. Теперь определим, где находится точка P. Поскольку дуги CP и CA равны, каждая из них равна $2 \cdot 58°$. Сумма дуг CB и BM равна $2(28° + 28°) = 2 \cdot 56°$, точка P находится на дуге MA, причём дуга MP равна $2(58° - 56°) = 2 \cdot 2°$. Точно так же, двигаясь по окружности, расставляем точки K, M и P, а затем находим углы $\triangle KMP$ в пунктах б) и в).

1119. Две дуги, каждая из которых соответствует углу 135°, с концами в точках A и B.

1123. Пусть катеты равны x и y, причём проекция катета y на гипотенузу равна x. Тогда гипотенуза равна $\frac{y^2}{x}$. По теореме Пифагора $x^2 + y^2 = \frac{y^4}{x^2}$ или $x^4 + y^2x^2 - y^4 = 0$. Искомый синус равен $\frac{x^2}{y^2}$.

1125. Радиус вписанной окружности найдём по формуле $r = \frac{1}{2}(a + b - c) = 3$. Ближайшая точка удалена от вершины угла на расстояние $r\sqrt{2} - r$.

1128. Пусть x и y — катеты треугольника ($x < y$), c — гипотенуза. Проекции катетов на гипотенузу будут $\frac{x^2}{c}$ и $\frac{y^2}{c}$. По условию $y - x = \frac{5}{6} \cdot \frac{y^2 - x^2}{c}$ или $x + y = \frac{6}{5}c$. Отсюда $x^2 + y^2 + 2xy = \frac{36}{25}c^2$, $2xy = \frac{11}{25}c^2$. Кроме того, из подобия соответствующих треугольников: $\frac{x}{c} = \frac{1}{y}$ или $xy = c$. Значит, $2c = \frac{11}{25}c^2$, $c = \frac{50}{11}$. Теперь получаем систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = \left(\frac{50}{11}\right)^2, \\ 2xy = \frac{100}{11}. \end{cases}$ Складывая и вычитая, найдём $(x + y)^2$ и $(y - x)^2$. $\left(x + y = \frac{60}{11}, y - x = \frac{10\sqrt{14}}{11}.\right)$

1132. Данный треугольник является прямоугольным.

1133. Данный треугольник является тупоугольным. Окружность, построенная на большей стороне как на диаметре, содержит весь треугольник. Меньше её радиус быть не может.

1137. Возможны разные случаи расположения точек M и P. Но во всех случаях ответ один и тот же.

1139. Продолжим CM и DM. Пусть они вторично пересекут окружность в точках D_1 и C_1 соответственно (рис. 315). Из равенства $\angle CMA = \angle DMB$ следует, что C_1

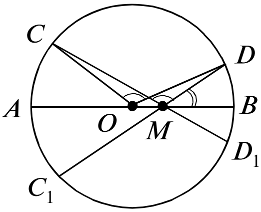
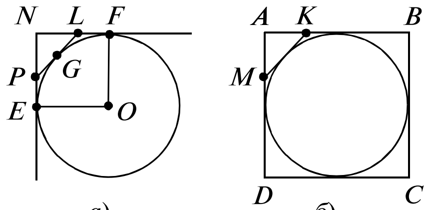


Рис. 315



а) *б*)

Рис. 316

и D_1 симметричны C и D. Значит, дуги CD и C_1D_1 равны и $\angle CMD = \angle COD$. Далее замечаем, что точки C, D, M и O лежат на одной окружности, поэтому $\angle ODM =$ $= \angle OCM = \alpha$.

1140. Точка P является точкой пересечения высот треугольника ABC.

1143. Центр данной окружности удалён от сторон четырёхугольника на расстояние $\sqrt{r^2 - \frac{d^2}{4}}$.

1145. См. № 1144.

1146. Рассмотрим прямоугольный $\triangle PNL$. Построим вневписанную окружность с центром в точке O, касающуюся гипотенузы PL в точке G и продолжений катетов NP и NL в точках E и F (рис. 316, *а*). Докажем, что радиус этой окружности равен половине периметра $\triangle PNL$. Имеем $r = OE = NF = NE = \frac{1}{2}(NF + NE) = \frac{1}{2}(NL +$ $+ LF + NP + PE) = \frac{1}{2}(NL + NP + LG + PG) = \frac{1}{2}(NL +$ $+ NP + PL)$, что и требовалось доказать. Нам осталось проверить, что периметр $\triangle AKM$ равен стороне квадрата. Это будет означать, что соответствующая вневписанная для него окружность совпадает с окружностью, вписанной в квадрат (рис. 316, *б*).

1147. Если $a < \frac{\sqrt{3}}{2}$, решений нет; если $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $AC = \frac{1}{2}$; если $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$, $AC = \frac{1 \pm \sqrt{4a^2 - 3}}{2}$; если $a \geqslant 1$, $AC = \frac{1 + \sqrt{4a^2 - 3}}{2}$.

1150. Каждая из этих точек ближе всего расположена к вершине A.

1152. Обозначим катеты через $7x$ и $24x$. По теореме Пифагора $(7x)^2 + (24x)^2 = 31^2$, откуда $x = \frac{31}{25}$. Высота к гипотенузе равна $h = \frac{7 \cdot 24 \cdot 31}{25^2}$. В $\triangle ABD$ стороны AD и DB равны $u = \frac{2}{3}\sqrt{(7x)^2 + \frac{1}{4}(24x)^2} = \frac{31 \cdot 2}{3 \cdot 25}\sqrt{193}$, $v = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{4}(7x)^2 + (24x)^2} = \frac{31}{3 \cdot 25}\sqrt{2353}$. Высота к стороне AB в $\triangle ABD$ равна $h_1 = \frac{1}{3}h = \frac{7 \cdot 8 \cdot 31}{25^2}$. Радиус описанной окружности равен $R = \frac{uv}{2h_1}$. $\left(\text{Это следует из известной формулы } R = \frac{a}{2\sin A}.\right)$

1154. а) Рассмотрим три окружности: первая имеет AB своим диаметром, вторая и третья имеют центры в точках A и B, радиус каждой AB. Искомое геометрическое место состоит из точек, расположенных вне первой и внутри второй и третьей окружностей. б) Проведём через A и B прямые, перпендикулярные AB. Искомое геометрическое место состоит из точек, расположенных внутри образовавшейся полосы, а также внутри второй и вне третьей или, наоборот, вне второй и внутри третьей окружностей (см. п. а).

1155. Проведём через точку C прямую, перпендикулярную прямой AC, и обозначим точку её пересечения с прямой AB через D. Из условия следует, что эта прямая параллельна медиане BC. Значит, $AD = AB$. Искомое геометрическое место есть окружность с диаметром AD, при этом его концы — точки A и D исключаются.

1156. В $\triangle ABC$ проведена медиана BM к стороне AC. Проведём через точку C прямую, параллельную BM, и обозначим через D точку её пересечения с AB (рис. 317). По теореме Фалеса $BD = AB$, кроме того, $CD = 2BM$. Высоты к стороне

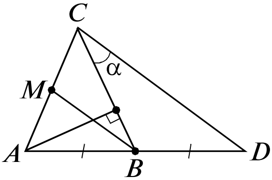


Рис. 317

BC в $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$ равны. Из этого и условия задачи (BM равна высоте к стороне BC) следует, что $\sin \angle BCD = \frac{1}{2}$. Значит, $\angle BCD$ равен 30° или 150°. Искомое геометрическое место состоит из двух окружностей, проходящих через B и D и таких, что BD делит их на две дуги, вмещающих 30° и 150° (точки B и D исключаются).

1157. $\angle ADB = 90°$, расстояние между центрами равно 2. (Центры в серединах AB и AC.)

1160. Стороны $\triangle DH_1H_2$ соответственно перпендикулярны сторонам $\triangle ABC$.

1161. Пусть BD и BE — высота и медиана в $\triangle ABC$, причём $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC$. Значит, $AD = DE = \frac{1}{2}AE$. В $\triangle DBC$ биссектриса BE делит сторону DC в отношении $DE : ED = 1 : 2$.

Следовательно, $BD = \frac{1}{2}BC$ и $\angle BCD = 30°$.

1162. Если $AB = 3$, то $AC = 2$. Пусть $BK = KM = MC = x$. Запишем теорему косинусов для $\triangle AKM$: $x^2 = (3 - x)^2 + (2 - x)^2 - 2(3 - x)(2 - x)$.

1164. Окружности с центрами в точках O_1 и O_2 касаются одной из сторон угла в точках K и M. Проведём через O_1 прямую, параллельную прямой KM, до пересечения с O_2M в точке L (рис. 318). В прямоугольном $\triangle O_2O_1L$ имеем $\angle O_2O_1L = \frac{\alpha}{2}$, $O_1O_2 = R + r$, $O_2L = R - r$ (R и r — радиусы окружностей), $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R - r}{R + r}$ и т. д.

1165. Точка D — точка касания окружности со стороной угла, точка K — середина AB. Обозначим центр искомой окружности — Q. Прямая DQ пересекает вторую сторону угла (прямую AB) в точке P (рис. 319).

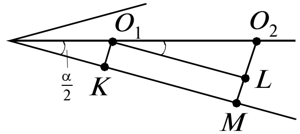


Рис. 318

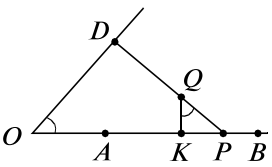


Рис. 319

Получаем $OD = \sqrt{OA \cdot OB} = \sqrt{ab}$, $DP = \sqrt{ab}\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $OP = \dfrac{\sqrt{ab}}{\cos\alpha}$, $OK = \dfrac{a+b}{2}$, если $OP > OK$, то $KP = \dfrac{\sqrt{ab}}{\cos\alpha} - \dfrac{a+b}{2}$, $PQ = \dfrac{KP}{\sin\alpha}$ (из $\triangle KPQ$), $R = QD = DP - PQ =$

$$= \sqrt{ab}\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{\sqrt{ab}}{\cos\alpha} - \frac{a+b}{2}\right) = \frac{a + b - 2\sqrt{ab}\cdot\cos\alpha}{2\sin\alpha}.$$

Тот же ответ будет и в случае $OK \geqslant OP$.

Замечание. Рассмотрим другой способ решения. Проведём высоту DF в $\triangle ADB$. Нам надо найти радиус окружности, описанной около $\triangle ADB$. По теореме синусов, учитывая подобие $\triangle ODA$ и $\triangle OBD$ $\left(\dfrac{AD}{OD} = \dfrac{DB}{OB}\right)$, получим: $R =$

$$= \frac{AD}{2\sin\angle DBA} = \frac{AD\cdot DB}{2DF} = \frac{AD\cdot DB}{2OD\sin\alpha} = \frac{DB^2}{2OB\sin\alpha} =$$

$$= \frac{ab + b^2 - 2\sqrt{ab}\cdot b\cos\alpha}{2b\sin\alpha} = \frac{a + b - 2\sqrt{ab}\cdot\cos\alpha}{2\sin\alpha}.$$

1166. Задача имеет решение, если $\alpha > 60°$. Пусть центральный угол, соответствующий дуге BC, равен φ (рис. 320). Таким же будет и угол, соответствующий дуге KD. (Это следует из параллельности прямых BK и CD.) Поскольку $\angle BAD = \alpha$, то дуге BCD соответствует центральный угол 2α, а дуге CD — угол $2\alpha - \varphi$, такой же соответствует дугам AB и AK. Таким образом, $3(2\alpha - \varphi) + 2\varphi = 360°$, $\varphi = 6\alpha - 360°$, т. е. $\alpha > 360°$, $\angle BAC = \dfrac{\varphi}{2} = 3\alpha - 180°$, $\angle ACD = \dfrac{1}{2}(\varphi + 2\alpha - \varphi) = \alpha$, $\dfrac{BC}{AD} =$

$$= \frac{\sin(3\alpha - 180°)}{\sin\alpha}.$$

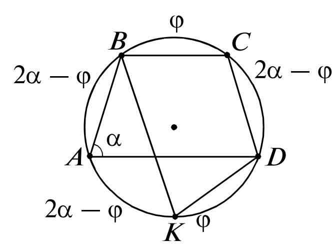


Рис. 320

1167. Надо рассмотреть два случая: указанные в условии прямые проходят через концы меньшего или концы большего основания. Возможным оказывается первый случай.

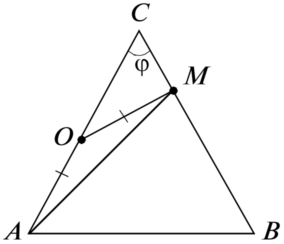


Рис. 321

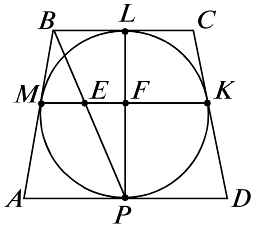


Рис. 322

1168. Пусть O — центр окружности, $\angle ACB = \varphi$ (рис. 321). Имеем $\angle CAB = 90° - \frac{\varphi}{2}$, $\angle COM = 90° - \varphi$, так как $\angle COM$ — внешний угол равнобедренного $\triangle AOM$, то $\angle OAM = \frac{1}{2}\angle COM = 45° - \frac{\varphi}{2}$, $\angle BAM = \angle BAC - \angle OAM = \left(90° - \frac{\varphi}{2}\right) - \left(45° - \frac{\varphi}{2}\right) = 45°$.

1169. Пусть окружность, проходящая через точку B, пересекает медиану AM в точке K. Имеем $MB^2 = MK - MA$ или $4 = 3MK$. В этой же точке K пересекает медиану AM и вторая окружность.

1170. Докажите, что середины двух противоположных сторон четырёхугольника и середины диагоналей служат вершинами параллелограмма.

1171. Точка L — середина основания BC трапеции $ABCD$, а точки E и F соответственно точки пересечения прямой MK с прямыми BP и LP (рис. 322). Понятно, что точка F — середина KM. $BL = BM = a$, $AM = AP = b$, как касательные, проведённые из одной точки к окружности. Тогда (из подобия $\triangle MBE$ и $\triangle ABP$) $\frac{ME}{b} = \frac{a}{a+b}$ и, значит, $ME = \frac{ab}{a+b}$. Таким же будет и отрезок EF.

1173. Пусть M — середина CE (рис. 323). Как известно, $DM = \frac{1}{2}CE = CM$. Значит, $\angle DMA = 2\angle DCM = \angle BCA = \angle BAC = \angle DAM$, $DM = DA = 1$, $CE = 2DM = 2$.

1174. Воспользуйтесь тем, что окружность, описанная около треугольника, проходит через центр квадрата.

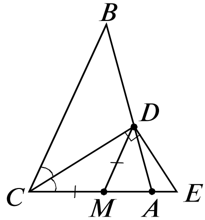


Рис. 323

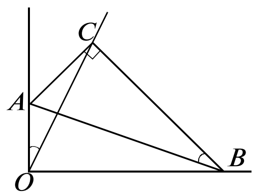


Рис. 324

1175. Точка O — вершина угла (рис. 324). Дан прямоугольный $\triangle ABC$ с гипотенузой AB, точки A и B лежат на сторонах угла. Четырёхугольник $OACB$ — вписанный. Значит, $\angle COA = \angle CBA$ — постоянный угол, так как $\angle CBA$ принадлежит заданному треугольнику и C перемещается по прямой. На этой прямой C описывает отрезок. Ближайший к точке O конец отрезка удалён от точки O на расстояние, равное меньшему катету $\triangle ABC$; дальний конец — на расстояние, равное гипотенузе AB.

1176. Вершина угла, точки M, A, B и C лежат на одной окружности.

1177. Утверждение задачи следует из того, что четырёхугольники $KAPC$ и $CPBM$ вписанные. (Тогда $\angle PKC = \angle PAC = 60°$, $\angle PMC = \angle PBC = 60°$.)

1178. Точки M, P, C и D лежат на одной окружности (рис. 325). Значит, $\angle PCM = \angle PDM = \angle BDA = \angle BCA$. Точно так же $\angle PBM = \angle MBC$.

1179. Точки A и B лежат на окружности с диаметром OM (рис. 326). Пусть для определённости $\angle MOB = \varphi$, $\angle MOA = \varphi + 10°$, L — точка пересечения прямых OM и AB. Имеем $\angle BAM = \angle BOM = \varphi$, $\angle AMO = \angle ABO =$

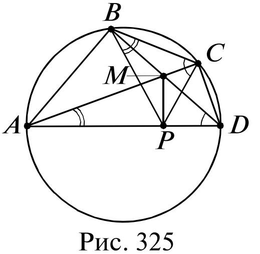


Рис. 325

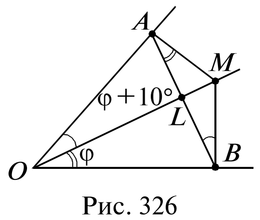


Рис. 326

$= 90° - \angle MBA = 90° - \angle MOA = 80° - \varphi$. Тогда $\angle ALO =$ $= \varphi + 80° - \varphi = 80°$.

1180. Продолжим медиану AA_0 за точку A_0 на расстояние, равное AA_0. Получим точку D такую, что четырёхугольник $BACD$ — параллелограмм. Отложим на луче AB отрезок $AC_1 = AC$, тогда CC_1 перпендикулярен AA_1. Пусть CC_1 пересекает AD в точке M_1. Имеем $\frac{AM_1}{M_1D} = \frac{AC_1}{CD} = \frac{AC}{AB} = \frac{CA_1}{A_1B}$. Значит, точки M_1 и A_1 делят диагонали AD и CB в одном и том же отношении. Отсюда следует параллельность A_1M_1 и AC, т. е. M_1 совпадает с M.

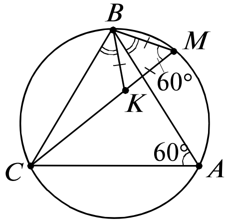


Рис. 327

1181. Пусть точка M лежит на дуге AB. Возьмём на хорде MC точку K так, что $MK = MB$ (рис. 327). $\triangle MBK$ — равносторонний ($MK =$ $= MB$, $\angle BMK = 60°$). Из этого следует равенство $\triangle AMB = \triangle CBK$, отсюда $AM = AK$, $CM = CK + KM =$ $= AM + MB$.

9 класс

Глава 10
Площади многоугольников (18 ч)

Глава содержит программный материал: основные свойства площади, вывод формул площадей плоских фигур и дополнительный материал: вторые доказательства теоремы Пифагора, теоремы о медианах треугольника, теоремы о биссектрисе внутреннего угла треугольника. Кроме того, учащиеся знакомятся с методом площадей и формулой синуса двойного угла.

С понятием площади и формулой для вычисления площади прямоугольника в случае, когда длины сторон — натуральные числа, учащиеся познакомились в начальной школе; в 5—6 классах они приобрели некоторый навык её применения. Теперь эта формула будет доказана для общего случая, на её основе выводится формула площади параллелограмма, которая используется при выводе формул площади треугольника и трапеции.

В ходе изучения темы у учащихся формируется представление о площади многоугольника как о некоторой величине, характеризующей фигуру. Понятие «площадь» вводится с указанием её свойств и с опорой на наглядные представления и жизненный опыт учащихся. Здесь же вводится очень важное в геометрии понятие равновеликости, которое вносит существенный вклад в логическое развитие учащихся. Во-первых, упрощается решение многих задач с его применением; во-вторых, углубляются общие представления учащихся о методологических основах геометрии.

Кроме того, в главе доказывается нетрадиционная для курса планиметрии теорема об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу или углы, дополняющие друг друга до 180°. Однако воспроизведения её доказательства от учащихся можно не требовать.

Основное внимание уделяется решению задач, что не только позволяет расширить представления учащихся об аналитических методах решения геометрических задач, но и играет важную роль в осуществлении внутрипредметных связей.

В данном курсе планиметрии понятие площади и формулы площадей конкретных плоских фигур не только позволяют решать многие задачи на вычисление, но применять их при решении задач на доказательство и построение.

Вычисление площадей многоугольников является составной частью задач на многогранники в курсе стереометрии. Поэтому основное внимание уделяется формированию практических навыков вычисления площадей многоугольников в ходе решения задач.

Электронное приложение к учебнику может значительно помочь в усвоении этой темы учащимися и способствует пониманию методов, применяемых для обоснования вывода формул площадей многоугольников.

При изучении главы 10 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— формулировать, иллюстрировать и объяснять основные свойства площади, понятие равновеликости;

— выводить формулы площади треугольника и четырёхугольников: прямоугольника, у которого длины сторон выражаются рациональными числами, параллелограмма, ромба, трапеции;

— формулировать, иллюстрировать и объяснять отношения площадей подобных фигур;

— применять при решении задач на вычисление и доказательство: основные свойства площади; понятие равновеликости; формулы площади треугольника и четырёхугольников: прямоугольника, параллелограмма, ромба, трапеции; теорему об отношении площадей подобных фигур.

Учащиеся получат возможность научиться объяснять формулу синуса двойного угла; применять метод площадей при решении задач на вычисление и доказательство.

10.1. Основные свойства площади. Площадь прямоугольника (2 ч)

Введение свойств измерения площадей проводить с одновременным повторением формулировок свойств измерения отрезков. В ходе изучения у учащихся сформируется представление о том, что свойства измерения отрезка и свойства измерения площади аналогичны.

Кроме понятия равновеликих фигур, в силу свойства 3 площади можно ввести понятие равносоставленных фигур, которое полезно при вычислении площади произвольных многоугольников.

Уровень сложности вывода формулы вычисления площади прямоугольника для общего случая превышает уровень сложности учебного материала, определяемый «Примерными программами основного общего образования», однако его появление вызвано объективными требованиями строгости обоснования утверждений. Поэтому выше сказанное позволяет рекомендовать материал пункта «Площадь прямоугольника» дать в обзорном плане в виде фрагмента лекции на уроке. При этом воспроизведения её доказательства от учащихся можно не требовать.

При изучении § 10.1 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— формулировать, иллюстрировать и объяснять основные свойства площади; понятия равновеликости и равносоставленности;

— выводить формулу площади прямоугольника, у которого длины сторон выражаются рациональными числами;

— применять при решении задач на вычисление и доказательство: основные свойства площади; понятие равновеликости и равносоставленности; формулу площади прямоугольника.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

(1) Из курса математики 1—6 классов учащимся известно понятие площади, поэтому достаточно ввести определение площади и её свойства, а затем закрепить их.

Можно, в полном соответствии с учебником, привести несколько примеров, связанных с практической необходимостью измерения площадей. Однако следует заметить, что непосредственное измерение площадей на практике практически невозможно, поэтому пользуются формулами для вычисления площадей.

Введение понятия площади и её свойств полезно сопроводить выполнением следующих у п р а ж н е н и й.

Свойство 2. Докажите, что диагональ параллелограмма делит его на два треугольника, площади которых равны.

Свойство 3.

1. Нарисуйте два равных прямоугольных треугольника. Составьте из них: а) равнобедренный треугольник; б) прямоугольник; в) параллелограмм.

2. Нарисуйте прямоугольник, у которого одна сторона в два раза больше другой. а) Покажите, на какие две части нужно его разрезать, чтобы затем сложить из них прямоугольный треугольник. б) Покажите, на какие три части нужно его разрезать, чтобы затем сложить из них квадрат.

В конце урока, в развитие этой задачи, решить № 1302 и на закрепление свойства 3 № 2Т.

Свойство 4. Вспомнить известные из курса математики 1—6 классов учащимся единицы измерения площадей в ходе решения задачи. «Площадь поверхности озера равна 5 870 000 м^2. Выразите площадь поверхности озера в квадратных километрах и гектарах».

(2) Обсуждение решения № 1299, проведённое устно на уроке, поможет учащимся в усвоении понятия равновеликости. Рассмотреть случаи, когда один из данных четырёхугольников или оба не являются выпуклыми (рис. 328).

(3) Так как доказательства следствий из свойств площади являются первыми в курсе 9 класса, то желательно провести их с минимальным участием школьников.

Д о к а з а т е л ь с т в о *следствия 1* (рис. 329). Пусть площадь фигуры F_1 равна a, а площадь фигуры F_2 — b. Требуется доказать, что $b > a$. Так как фигура F_2 вмеща-

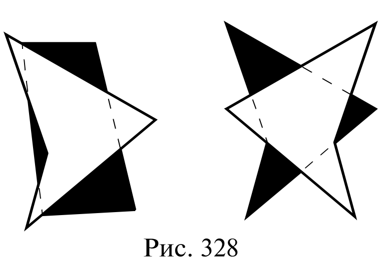


Рис. 328

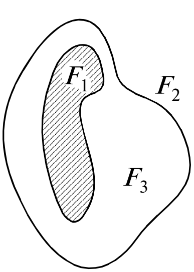


Рис. 329

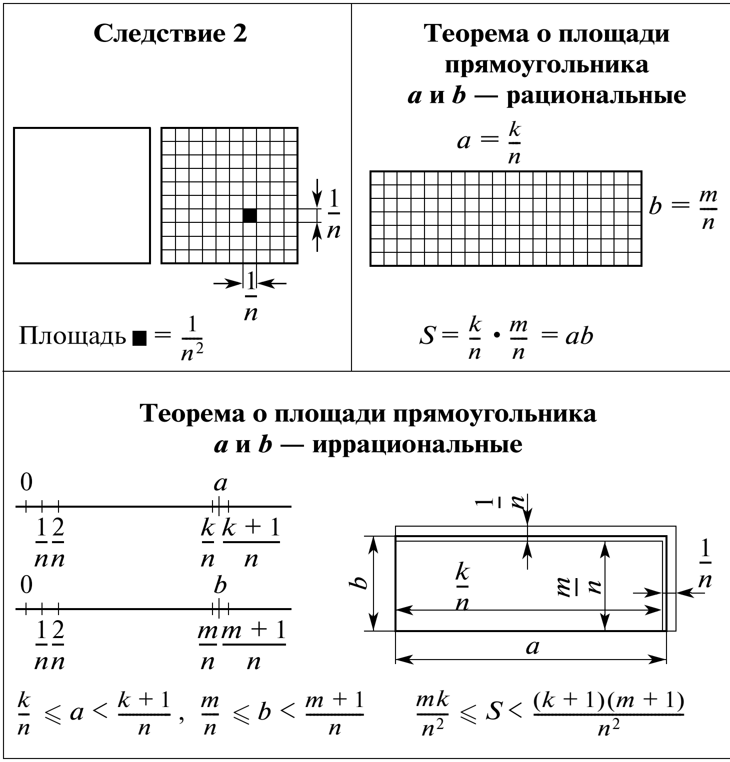


Рис. 330

ет в себя фигуру F_1, то, значит, фигура F_2 состоит из двух частей фигуры F_1 и фигуры F_3, площадь которой равна d. Тогда по свойству 3: $b = a + d$. А так как по свойству 1: $a > 0$, $b > 0$ и $d > 0$, то $b > a$.

(4) Для доказательства *следствия 2* (рис. 419У) полезно заранее подготовить плакат (рис. 330). Кроме того, на плакат можно поместить и необходимые для доказательства записи. Особенно, если проводить доказательство теоремы 10.1 для случая, когда длины сторон прямоугольника выражаются иррациональными числами, однако этот случай не является обязательным для изучения на уроке и может быть использован для дифференцированного домашнего задания.

5 При объяснении доказательств *следствия 2* и теоремы 10.1 для случая, когда a и b — рациональные, особое внимание учащихся обратить на применение в доказательствах свойств площади: равные квадраты имеют равную площадь, площадь большого квадрата и прямоугольника равна сумме площадей содержащихся в них маленьких квадратов.

6 В качестве упражнений на применение формулы площади прямоугольника выполнить № 3—6ДЗ, на закрепление следствия 1 — № 4—6Т. Определённый интерес представляет решение № 7Т (№ 1304).

7 Решение № 1302 дано в общем виде, в ходе которого необходимо вспомнить построения, основанные на свойствах прямоугольного треугольника, что необходимо для построения стороны квадрата.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — § 1; № 3—6ДЗ и № 1299; дома — № 1—11В, № 1298 и 1300.

На втором уроке: в классе — № 7—8ДЗ и № 1302—1304; дома — № 1301.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Объясните, что такое площадь.
2. Сформулируйте первое свойство площади.
3. Сформулируйте второе свойство площади.
4. Сформулируйте третье свойство площади.
5. Сформулируйте четвёртое свойство площади.
6. Назовите известные вам единицы измерения площади.
7. Объясните, какие фигуры называются равновеликими.
8. Сформулируйте следствие 1.
9. Сформулируйте следствие 2.
10. Сформулируйте теорему о площади прямоугольника.
11. Докажите теорему о площади прямоугольника в случае, когда a и b — рациональные.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

№ 1304 .

1299. Общая часть двух четырёхугольников закрашена серым цветом, значит, оставшиеся части имеют в силу свойства 3 равные площади (рис. 331).

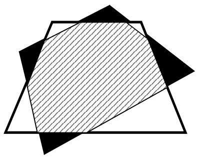


Рис. 331

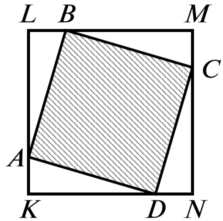
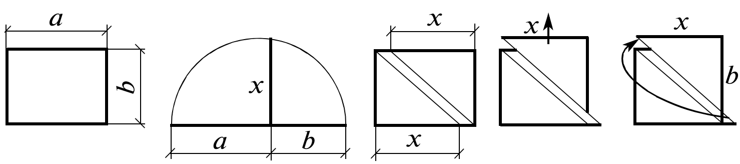


Рис. 332



а) *б*) *в*) *г*) *д*)

Рис. 333

1300. Рассмотрим квадрат со стороной, равной 2 м, и вписанную в него окружность, радиус которой равен 1 м. Площадь круга, ограниченного окружностью, вписанной в квадрат, по следствию 1 меньше площади квадрата.

1301. Катеты AL и AK двух соседних прямоугольных $\triangle ALB$ и $\triangle DKA$ лежат на одной прямой LK. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° и $\angle BAD$ квадрата $ABCD$ также равен 90°. Значит, их сумма равна 180°, т. е. $\angle LAK$ — развёрнутый (рис. 332).

1302. Площадь прямоугольника равна ab (рис. 333), значит, сторона равновеликого ему квадрата равна $\sqrt{ab}$. Построим отрезок, равный стороне квадрата. Затем отложим этот отрезок на больших сторонах квадрата и проведём прямые, как на рисунке в). Сдвинем полученные прямоугольные треугольники, как на рисунке г), и маленький треугольник переместим, как на рисунке д).

1303. Площадь нового квадрата (рис. 334) равна $3^2 + 1^2$, значит, сторона квадрата, равновеликого сумме данных квадратов, равна $\sqrt{10}$, т. е. является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 3 и 1.

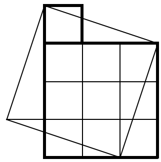


Рис. 334

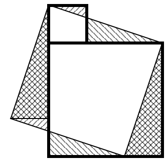


Рис. 335

1304. Площадь нового квадрата равна $a^2 + b^2$, значит, сторона квадрата, равновеликого сумме данных квадратов, равна $\sqrt{a^2 + b^2}$, т. е. является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами a и b. Доказательство видно из рисунка 335.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Постройте точку M, симметричную точке D относительно точки C, и соедините точки A и M. Докажите, что $S_{ABCD} = S_{AMD}$.

2. На стороне AD прямоугольника $ABCD$ построен $\triangle ADE$ так, что его стороны AE и DE пересекают отрезок BC в точках M и N, причём точка M — середина отрезка AE. Докажите, что $S_{ABCD} = S_{AED}$.

3. Как изменится площадь квадрата, сторона которого равна 3 см, если каждую его сторону: а) увеличить в два раза; б) уменьшить в два раза.

4. Стороны двух квадратов равны 8 см и 15 см. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна сумме площадей данных квадратов.

5. Как изменится площадь прямоугольника, если: а) каждую его сторону увеличить в два раза; б) одну сторону увеличить в два раза; в) одну из соседних сторон увеличить, а другую уменьшить в два раза.

6. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника, стороны которого равны 8 см и 18 см.

7. Площадь прямоугольника равна 48 см^2, а стороны относятся как 1 : 3. Найдите площадь квадрата, периметр которого равен периметру данного прямоугольника.

8. Периметр прямоугольника равен 46 см, а радиус описанной окружности 8,5 см. Найдите площадь данного прямоугольника.

9. Диагонали прямоугольника, равные $2a$, пересекаются под углом 60°. Определите площадь прямоугольника, если одна из его сторон равна b.

10.2. Площади треугольника и четырёхугольника (5 ч)

В параграфе традиционными методами, т. е. с опорой на формулу площади прямоугольника, выводятся формулы для вычисления площадей параллелограмма, треугольника, трапеции. Здесь же доказывается справедливость ещё нескольких формул для вычисления площади треугольника: через две стороны и угол между ними, через периметр и радиус вписанной окружности, формула Герона.

Уровень сложности вывода этих формул вычисления площади треугольника превышает уровень сложности учебного материала, определяемый «Примерными программами основного общего образования», поэтому можно рекомендовать материал пунктов «Ещё несколько формул для площади треугольника» и «Формула Герона» дать в виде фрагмента лекции и не требовать от учащихся воспроизведения их доказательства.

При изучении § 10.2 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— выводить формулы площади треугольника, параллелограмма, ромба, трапеции и произвольного четырёхугольника;

— формулировать, иллюстрировать и доказывать теорему об отношении площадей подобных фигур;

— применять при решении задач на вычисление и доказательство: формулы площади треугольника, параллелограмма, ромба, трапеции и произвольного четырёхугольника; теорему об отношении площадей подобных фигур.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

1 Доказательство формулы площади параллелограмма полезно провести в форме беседы по рисунку 426У, можно задать следующие вопросы.

1. Почему $\triangle ABK$ и $\triangle DCM$ равны? [По катету и гипотенузе $AB = DC$, $BK = CM$.]

2. Каким свойством обладают площади равных фигур? [По второму свойству площадей равные фигуры имеют равные площади $S_{\triangle ABK} = S_{\triangle DCM}$.]

3. Почему прямоугольник $RBCM$ равновелик параллелограмму $ABCD$? [$S_{ABCM} = S_{ABCD} + S_{\triangle DCM}$; $S_{ABCM} = S_{KBCM} + S_{\triangle ABK}$; отсюда $S_{ABCD} = S_{KBCM} = ah$.]

На применение формулы площади параллелограмма — № 1—3ДЗ, затем № 1307, в котором используется тот же метод доказательства равновеликости двух параллелограммов, что и при выводе формулы площади.

2 При выводе формулы площади треугольника к доказательству равенства $\triangle ABK$ и $\triangle DCM$ (рис. 426У) можно привлечь учащихся.

На закрепление и отработку умения применять формулу площади треугольника заранее приготовить таблицу 7 и заполнить её вместе с учащимися на уроке.

Таблица 7

a	h	S
7	6	
9		63
	3	18

Затем задать учащимся вопрос: «Чему равна площадь прямоугольного треугольника, если известны его катеты?» [Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.]

Из решения № 1298 получаем формулу для вычисления площади равностороннего треугольника. На закрепление свойства 3 и формул площади параллелограмма треугольника — № 33 и 24Т.

3 После вывода формулы площади трапеции целесообразно напомнить учащимся, что полусумма оснований трапеции равна её средней линии, и сделать вывод, что площадь трапеции равна произведению средней линии трапеции на высоту. На закрепление и отработку умения применять эту формулу № 4 и 5ДЗ, № 1325.

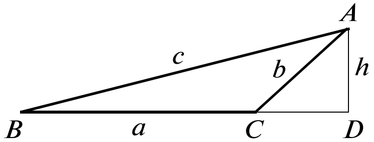


Рис. 336

№ 31, 33—35Т (с краткой записью решения и выполнением чертежа).

4 Формула площади треугольника $S = \frac{1}{2} ab\sin\gamma$ находит широкое применение при решении задач. Для лучшего запоминания полезно дать её словесную формулировку: «Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними». При выводе формулы рисунок 428У (на доске) дополнить рисунком 336.

После доказательства формулы площади треугольника $S = 2R^2\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$ полезно вывести ещё одну формулу площади треугольника, выражающую площадь треугольника через радиус описанной окружности $S = \frac{abc}{4R}$.

5 Вывод формулы Герона основывается на формуле площади треугольника $S = \frac{1}{2} \cdot ab\sin\gamma$, теореме косинусов и основном тригонометрическом тождестве.

Воспроизведения вывода формул площади треугольника от учащихся можно не требовать, кроме формул $S = \frac{1}{2} \cdot ah_a$ и $S = \frac{abc}{4R}$.

Далее решить № 1314, в). В рабочей тетради на прочное закрепление формулы Герона самостоятельно подобрать задачи из раздела «Формулы Герона и её следствия».

6 Тема «Подобные треугольники» была пройдена в 8 классе и перед изучением материала пункта «Отношение площадей подобных фигур» необходимо вспомнить определение подобных фигур и особенно, что у подобных фигур соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки пропорциональны, и решить № 1322.

7 Для решения № 1307 необходимо доказательство того, что углы с взаимно параллельными сторонами равны или дополняют друг друга до 180°. Решение № 1310 будет легче, если, используя формулу синуса суммы углов (§ 7.2), вывести формулу синуса двойного угла, а в № 1322 воспользоваться результатом решения № 1317 и 1320. При решении № 1328 воспользоваться результатом № 1320.

При решении № 1323 использовать ***Задачу 4*** (§ 8.2). Поскольку материал параграфа 10.2 не является программным, то предложить решить № 7ДЗ либо на уроке, либо дать её в качестве домашнего задания на первом уроке.

При решении № 1329 используется результат решения ***Задачи 6*** (§ 4.2) (этот материал не является программным), № 8 или 9ДЗ либо на уроке, или в качестве домашнего задания на четвёртом уроке данной темы, и в № 1310 нужно воспользоваться формулой синуса двойного угла.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — пункты: площадь параллелограмма; площадь треугольника; № 1—3ДЗ и № 1307, 1308 (вторая часть); дома — № 1—2В, № 1305, 1306 и 1308 (первая часть).

На втором уроке: в классе — пункты: площадь трапеции; несколько формул для площади треугольника; № 4—5ДЗ, № 1311, 1323, 1325; дома — № 3—7В, № 1309, 1312, 1313, 1316.

На третьем уроке: в классе — пункты: площадь произвольного четырёхугольника; формула Герона; № 1314 в), 1317, 1320; дома — № 8—9В, № 1314 (а, б), 1317, 1321 и 1324.

На четвёртом уроке: в классе — пункт отношение площадей подобных фигур; № 1319, 1322, 1326; дома — № 10В, № 1330, 1331 и 1332.

На пятом уроке: в классе — СР10, № 1327, 1334, 1335; дома — № 1328, 1329 и 1333.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Сформулируйте и докажите теорему о площади параллелограмма.
2. Сформулируйте и докажите теорему о площади треугольника.
3. Сформулируйте и докажите теорему о площади трапеции.
4. Докажите, что площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.
5. Выразите площадь треугольника через одну из его сторон и синусы всех углов.
6. Выразите площадь треугольника через радиус вписанной окружности.
7. Выразите площадь треугольника через радиус описанной окружности.
8. Сформулируйте и докажите теорему о площади четырёхугольника.
9. Запишите и объясните формулу Герона.
10. Объясните, как относятся площади подобных фигур.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 10

Вариант 1

1. В параллелограмме $ABCD$ на стороне AD, равной 16 см, отмечены точки F и G. Найдите отношение площади параллелограмма $ABCD$ к площади $\triangle GBF$, если отрезок FG равен 4 см (рис. 337).

А. 4 : 1. Б. 8 : 1. В. 5 : 1. Г. 16 : 1.

2. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ отложены отрезки $AN = \frac{1}{4}AB$ и $AM = \frac{3}{4}AD$. Найдите площадь четырёхугольника $ANCM$, если площадь $ABCD$ равна 1 см^2 (рис. 338).

А. $\frac{1}{2}$ см^2. Б. $\frac{1}{4}$ см^2. В. $\frac{3}{4}$ см^2. Г. $\frac{5}{4}$ см^2.

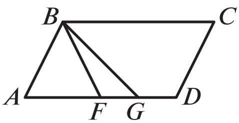


Рис. 337

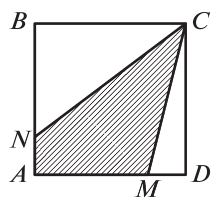


Рис. 338

3. Соседние стороны параллелограмма равны 8 см и 11 см, а угол между ними равен 30°. Найдите площадь параллелограмма.

Ответ: ______________________________

4. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена произвольная точка G. Докажите, что сумма площадей $\triangle CGD$ и $\triangle AGB$ равна половине площади данного параллелограмма.

Вариант 2

1. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 14 см и 4 см соответственно. Из вершины B проведена прямая, параллельная стороне CD. Найдите отношение площади трапеции $ABCD$ к площади $\triangle ABF$ (рис. 339).

А. 9 : 5. Б. 18 : 5. В. 1 : 1. Г. 2 : 1.

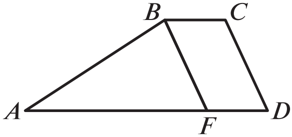


Рис. 339

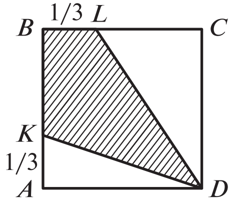


Рис. 340

2. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ отложены отрезки $AK = \frac{1}{3}AB$ и $BL = \frac{1}{3}BC$. Найдите площадь четырёхугольника $KBLD$, если площадь квадрата $ABCD$ равна 1 см^2 (рис. 340).

А. $\frac{1}{2}$ см^2. Б. $\frac{1}{4}$ см^2. В. $\frac{3}{4}$ см^2. Г. $\frac{5}{4}$ см^2.

3. Тупой угол ромба равен 150°, а его сторона равна 6 см. Найдите площадь ромба.

Ответ: ______________________________

4. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ отмечена произвольная точка M. Докажите, что сумма площадей $\triangle ACM$ и $\triangle BDM$ равна половине площади данного параллелограмма.

№ 1305, 1310, 1314 и 1326.

1305. Через точку M проведём прямую FE, перпендикулярную стороне DC параллелограмма $ABCD$ (рис. 341). Отрезок FE является высотой параллелограмма $ABCD$. Обозначим FE через h, отрезок ME через x, а сторону DC через b.

$S_{\triangle AMB} + S_{\triangle DMC} = \frac{1}{2}b(h - x) + \frac{1}{2}bx = \frac{1}{2}bh$. Отсюда

$S_{\triangle BMC} + S_{\triangle AMD} = S_{ABCD} - (S_{\triangle AMB} + S_{\triangle DMC}) = bh - \frac{1}{2}bh.$

Значит, $S_{\triangle BMC} + S_{\triangle AMD} = S_{\triangle AMB} + S_{\triangle DMC}$.

1307. Продолжим сторону C_1D_1 параллелограмма $AB_1C_1D_1$ до пересечения с прямой BC в точке F (рис. 342). $\triangle ADD_1$ и $\triangle B_1FC_1$ равны по второму признаку равенства треугольников. Отсюда $S_{AB_1C_1D_1} = S_{AB_1FD}$. $\triangle ABB_1$ и $\triangle CDF$ равны по второму признаку равенства треугольников. Отсюда $S_{ABCD} = S_{AB_1FD}$. Следовательно, $S_{AB_1C_1D_1} = S_{ABCD}$.

1308. 1) В $\triangle AFD$ и $\triangle BGC$ (рис. 343, *а*) основания BC и AD равны, как противоположные стороны параллелограмма $ABCD$. Высоты треугольников равны, как

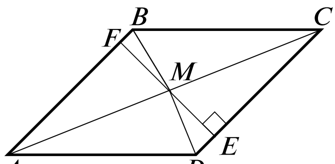


Рис. 341

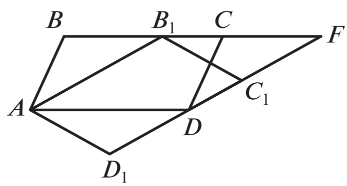
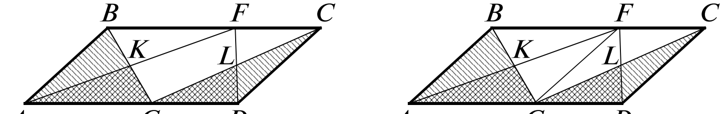


Рис. 342



а) *б*)

Рис. 343

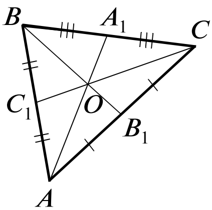


Рис. 344

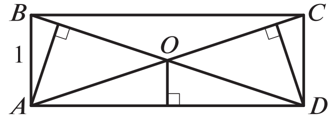


Рис. 345

расстояние между параллельными прямыми. Следовательно, $S_{\triangle AFD} = S_{\triangle BGC}$. Четырёхугольник $KFLG$ является общей частью $\triangle AFD$ и $\triangle BGC$, а значит, $S_{\triangle AFD} - S_{KFLG} = S_{\triangle BGC} - S_{KFLG}$, отсюда $S_{\triangle AKG} + S_{\triangle GLD} = S_{\triangle BKF} + S_{\triangle FLG}$.
2) Соединим точки F и G. $\triangle FDC$ и $\triangle CGF$ (рис. 343, *б*) равновеликие, так как у них общее основание FC и равные высоты — расстояние между параллельными прямыми. $S_{\triangle GFL} = S_{\triangle CGF} - S_{\triangle FLC}$; $S_{\triangle CLD} = S_{\triangle CDF} - S_{\triangle FLC}$. Следовательно, $S_{\triangle GFL} = S_{\triangle CLD}$. Аналогично доказывается, что $S_{\triangle ABK} = S_{\triangle FKG}$, а $S_{\triangle FKG} + S_{\triangle GFL} = S_{KFLG}$. Значит, $S_{\triangle ABK} + S_{\triangle CLD} = S_{KFLG}$.

1309. В $\triangle ABC$ (рис. 344) O — точка пересечения медиан. $S_{\triangle AC_1O} = S_{\triangle BOC_1}$, так как OC_1 — медиана $\triangle AOB$. Аналогично доказывается, что $S_{\triangle AOB_1} = S_{\triangle B_1OC}$ и $S_{\triangle OBA_1} = S_{\triangle A_1OC}$. Так как BB_1 — медиана $\triangle ABC$, то $S_{\triangle ABB_1} = S_{\triangle BB_1C}$ и $S_{\triangle AOB_1} = S_{\triangle B_1OC}$, то $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle BOC}$. $S_{\triangle AOC_1} = S_{\triangle AOB} - S_{\triangle C_1OB}$; $S_{\triangle A_1OC} = S_{\triangle COB} - S_{\triangle OA_1B}$, отсюда $S_{\triangle AOC_1} = S_{\triangle A_1OC}$.

1310. Пусть в прямоугольнике $ABCD$ (рис. 345) $AB = 1$, $AD = 400$, точка O — точка пересечения диагоналей. На рисунке 343 хорошо видно, что в $\triangle AOD$ все высоты меньше единицы. Если увеличивать сторону AD, то площадь такого треугольника может быть как угодно большой.

1311. В треугольнике ABC (рис. 346) AD — медиана, отсюда $BD = CP$. Значит, MD — медиана $\triangle BMC$. Следовательно, $\triangle ABD$ равновелик $\triangle ACD$ и $\triangle BMD$ равновелик $\triangle CMD$. Отсюда $\triangle AMB$ равновелик $\triangle AMC$.

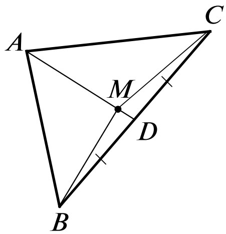


Рис. 346

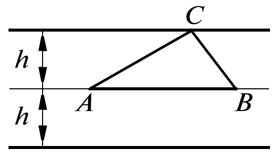


Рис. 347

1312. Решение видно из рисунка 347. Две прямые, параллельные стороне AB, и отстоящие от неё на расстоянии, равном высоте, проведённой к этой стороне.

1313. У $\triangle AMB$ и $\triangle AMC$ сторона AM — общая. Для того чтобы площади этих треугольников были равны, надо, чтобы и высоты, опущенные на общую сторону, были равны. 1) Если точки B и C лежат по разные стороны от прямой AM, то точка M принадлежит прямой, содержащей медиану AD (см. рис. 346). 2) Если точки B и C лежат по одну сторону от прямой AM, то точка M принадлежит прямой, параллельной стороне BC.

1315. Так как числа $\sqrt{4a^2 + 3}$; $\sqrt{a^2 - a + 1}$ и $\sqrt{a^2 + a + 1}$ выражают длину отрезков, то исследуем, для каких a эти числа положительны. $\sqrt{4a^2 + 3} \geqslant \sqrt{3}$ для любого $-\infty < a < +\infty$.

$\sqrt{a^2 - a + 1}$.

$a = 0$: $\sqrt{a^2 - a + 1} = 1$;

$a > 0$: 1) $0 < a < 1$;

$$\sqrt{a^2 - a + 1} = \sqrt{\left(a^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2};$$

2) $a = 1$; $\sqrt{a^2 - a + 1} = 1$;

3) $a > 1$; $\sqrt{a^2 - a + 1} > 1$;

$a < 0$: $\sqrt{a^2 - a + 1} > 1$. Таким образом,

для любого $-\infty < a < \infty$ $\sqrt{a^2 - a + 1} > 0$.

$\sqrt{a^2 + a + 1}$.

$a = 0$: $\sqrt{a^2 + a + 1} = 1$;
$a < 0$: 1) $-1 < a < 0$;

$$\sqrt{a^2 + a + 1} = \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2};$$

2) $a = -1$; $\sqrt{a^2 + a + 1} = 1$;

3) $a < -1$; $\sqrt{a^2 + a + 1} > 1$;

$a > 0$: $\sqrt{a^2 + a + 1} > 1$. Таким образом,

для любого $-\infty < a < +\infty$: $\sqrt{a^2 + a + 1} > 0$.

Применяя неравенство треугольника, выясним, могут ли данные отрезки быть сторонами треугольника.

$$\sqrt{a^2 - a + 1} + \sqrt{a^2 + a + 1} \ ? \ \sqrt{4a^2 + 3},$$

$$(\sqrt{a^2 - a + 1} + \sqrt{a^2 + a + 1})^2 \ ? \ (\sqrt{4a^2 + 3})^2,$$

$$2a^2 + 2 + 2\sqrt{a^2 + a + 1} \ ? \ 4a^2 + 3,$$

$$(2\sqrt{a^2 + a + 1})^2 \ ? \ (2a^2 + 1)^2,$$

$$4a^4 + 4a^2 + 4 \ ? \ 4a^4 + 4a^2 + 1,$$

$$4 > 1.$$

Таким образом, для любого a

$\sqrt{a^2 - a + 1} + \sqrt{a^2 + a + 1} > \sqrt{4a^2 + 3}$.

Аналогично доказывается, что для любого a $\sqrt{a^2 - a + 1} + \sqrt{4a^2 + 3} > \sqrt{a^2 + a + 1}$ и $\sqrt{4a^2 + 3} + \sqrt{a^2 + a + 1} > \sqrt{a^2 - a + 1}$. Следовательно, для любого a существует треугольник, стороны которого равны $\sqrt{4a^2 + 3}$, $\sqrt{a^2 - a + 1}$ и $\sqrt{a^2 + a + 1}$.

Для нахождения площади данного треугольника воспользуемся формулой $S = \frac{1}{2} cb \sin A$. Пусть $d = \sqrt{4a^2 + 3}$, $b = \sqrt{a^2 + a + 1}$ и $c = \sqrt{a^2 - a + 1}$.

$d^2 = c^2 + b^2 - 2cb \cos A$;

$4a^2 + 3 = 2a^2 + 2 - 2\sqrt{(a^2 + 1)^2 - a^2} \cos A$, отсюда

$$\cos A = -\sqrt{\frac{\left(a^2 + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(a^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}};\ \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{\left(a^2 + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(a^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{\left(a^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}};$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a + 1} \cdot \sqrt{a^2 - a + 1} \cdot \sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{\left(a^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + 1)^2 - a^2} \cdot \sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{\left(a^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\frac{3}{4}[(a^2 + 1)^2 - a^2]}{(a^2 + 1)^2 - a^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

1316. В трапеции $ABCD$ (рис. 348) O — точка пересечения диагоналей. Так как $AD \parallel BC$, то $\triangle ABD$ равновелик $\triangle ACD$. Площадь $\triangle BOC$ — общая. Вычтем её из площадей $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$, отсюда следует, что $\triangle AOB$ и $\triangle COD$ — равновелики.

1317. В четырёхугольнике $ABCD$ (см. рис. 346) O — точка пересечения диагоналей. Так как $\triangle ABO$ и $\triangle COD$ равновелики, то равновелики и $\triangle ABC$ и $\triangle DBC$, у которых общее основание BC. Следовательно, у этих треугольников равны высоты $AK = DL$. Значит, прямая AD, проходящая через точки A и D, равноудалена от прямой BC, т. е. $AD \parallel BC$. Следовательно, данный четырёхугольник — трапеция. При условии, что $\triangle ABO$ и $\triangle CDO$ — равны, четырёхугольник $ABCD$ — либо равнобокая трапеция, либо параллелограмм в зависимости от расположения равных треугольников.

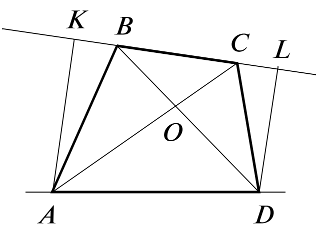


Рис. 348

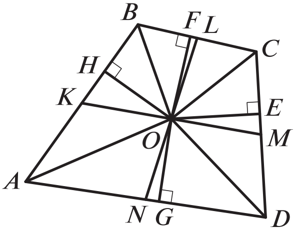


Рис. 349

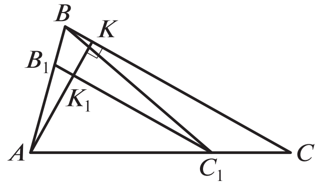


Рис. 350

1318. В четырёхугольнике $ABCD$ (рис. 349) O — точка пересечения прямых KM и LN, причём $AK = KB$, $BL = LC$, $CM = MD$ и $AN = ND$. Соединим точку O с вершинами четырёхугольника и проведём перпендикуляры из точки O к его сторонам $OH \perp AB$, $OF \perp BC$, $OE \perp CD$ и $OG \perp DA$. $S_{\triangle AON} = \frac{1}{4}AD \cdot OG = S_{\triangle NOD}$, $S_{\triangle AOK} = \frac{1}{4}AB \cdot OH = S_{\triangle KOB}$, $S_{\triangle BOL} = \frac{1}{4}BC \cdot OF = S_{\triangle LOC}$ и $S_{\triangle COM} = \frac{1}{4}CD \cdot OE = S_{\triangle MOD}$. Отсюда $S_{AKON} = S_{\triangle AON} + S_{\triangle AOK}$, $S_{LCMO} = S_{\triangle LOC} + S_{\triangle COM}$, значит, $S_{AKON} + S_{LCMO} = S_{\triangle AON} + S_{\triangle AOK} + S_{\triangle LOC} + S_{\triangle COM}$, аналогично, $S_{KOLB} + S_{NOMD} = S_{\triangle NOD} + S_{\triangle KOB} + S_{\triangle BOL} + S_{\triangle MOD}$. Из равенства площадей соответствующих пар треугольников, на которые разбит четырёхугольник $ABCD$, следует равенство $S_{AKON} + S_{LCMO} = S_{KOLB} + S_{NOMD}$.

1319. Поскольку в $\triangle ABC$ (рис. 350) $B_1C_1 \parallel BC$, то $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ подобны. Следовательно, площади этих треугольников относятся как квадраты сходственных сторон $\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{B_1C_1^2}{BC^2} = \frac{q}{p}$; $\frac{B_1C_1}{BC} = \sqrt{\frac{q}{p}}$. Пусть $BC = a$, тогда $B_1C_1 = a\sqrt{\frac{q}{p}}$. Пусть $AK = h$, тогда $AK_1 = h\sqrt{\frac{q}{p}}$. $S_{\Delta B_1BC_1} = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{q}{p}} \cdot \left(h - h\sqrt{\frac{q}{p}}\right) = \frac{1}{2}ah \cdot \sqrt{\frac{q}{p}} \times \left(1 - \sqrt{\frac{q}{p}}\right) = \frac{1}{2}ah \cdot \left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \frac{q}{p}\right) = p \cdot \frac{\sqrt{pq} - q}{p} = \sqrt{pq} - q$. Отсюда $S_{\triangle ABC_1} = \sqrt{pq}$.

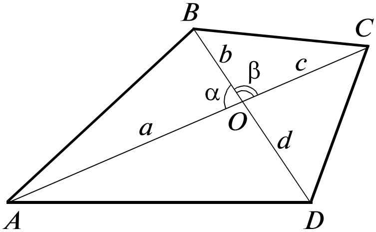


Рис. 351

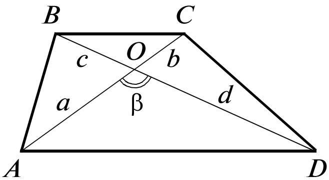


Рис. 352

1320. В четырёхугольнике $ABCD$ (рис. 351) O — точка пересечения диагоналей и $AO = a$, $BO = b$, $CO = c$ и $DO = d$. Поскольку $\angle\alpha$ и $\angle\beta$ смежные, то $\sin\alpha = \sin\beta$. Значит, $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}ac\sin\alpha$, $S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}cb\sin\beta$, $S_{\triangle COD} = \frac{1}{2}bd\sin\alpha$ и $S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2}ad\sin\beta$. Следовательно, $S_{\triangle AOB}\cdot S_{\triangle COD} = \frac{1}{2}ac\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}bd\sin\alpha = \frac{1}{4}abcd\sin^2\alpha = \frac{1}{4}abcd\sin^2\beta = S_{\triangle BOC}\cdot S_{\triangle AOD}$.

1321. По условию $S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}cb\sin\beta = 4$ и $S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2}ad\sin\beta = 9$. Из решения задачи № 1320 следует: $S_{\triangle AOB}\cdot S_{\triangle COD} = S_{\triangle BOC}\cdot S_{\triangle AOD} = \frac{1}{4}abcd\sin^2\beta = 36$. Из решения № 1317 следует: $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$ (рис. 352). Значит, $\frac{1}{2}ac\sin(180° - \beta) = \frac{1}{2}bd\sin(180° - \beta)$. Отсюда $ac = bd$. Следовательно, $S_{\triangle BOC}\cdot S_{\triangle AOD} = (S_{\triangle AOB})^2$, отсюда $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD} = 6$. $S_{ABCD} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOD} = 6 + 6 + 4 + 9 = 25$.

1322. Так как $AL = LD$ (рис. 353), то ML — медиана $\triangle AMD$. Следовательно, $S_{\triangle AML} = S_{\triangle DML}$. Так как $BK = KC$, то MK — медиана $\triangle BMC$. Следовательно, $S_{\triangle BMK} = S_{\triangle CMK}$. Продолжим стороны AB и CD до пересечения в точке F. В $\triangle AFD$ отрезок FL является медианой. Медиана FL проходит через точку K, что следует из

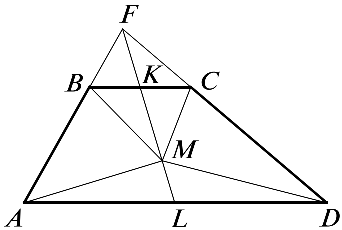


Рис. 353

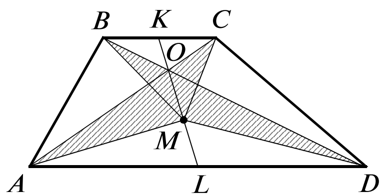


Рис. 354

подобия $\triangle AFD$ и $\triangle BFC$. Значит, $S_{\triangle AFL} = S_{\triangle DFL}$, $S_{\triangle BFK} = S_{\triangle CFK}$, отсюда $S_{ABKL} = S_{DCKL}$; $S_{\triangle ABM} = S_{ABKL} - S_{\triangle BMK} - S_{\triangle AML} = S_{DCKL} - S_{\triangle CMK} - S_{\triangle DML} = S_{\triangle DCM}$.

1323. В трапеции $ABCD$ (рис. 354) AC и BD — её диагонали и точка их пересечения O лежит на отрезке KL (см. ***Задачу 4***). Так как $AL = LD$, то OL — медиана $\triangle AOD$. Следовательно, $S_{\triangle AOL} = S_{\triangle DOL}$, так как $AL = LD$, то ML — медиана $\triangle AMD$. Следовательно, $S_{\triangle AML} = S_{\triangle DML}$. Значит, $S_{\triangle AOM} = S_{\triangle DOM}$. Аналогично доказывается, что $S_{\triangle BMO} = S_{\triangle CMO}$. Отсюда, $S_{\triangle AMC} = S_{\triangle AOM} + S_{\triangle CMO} = S_{\triangle DOM} + S_{\triangle BMO} = S_{\triangle DMB}$.

1324. В четырёхугольнике $ABCD$ E — точка пересечения диагоналей и при этом $S_{\triangle ABD} = p$, $S_{\triangle ACD} = g$, $S_{\triangle AED} = r$. $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle AED} = p - r$; $S_{\triangle CDE} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle AED} = g - r$. Из решения № 1320 следует, что $S_{\triangle ABE} \cdot S_{\triangle CDE} = S_{\triangle AED} \cdot S_{\triangle BEC}$. $(p - r) \cdot (g - r) = r \cdot S_{\triangle BEC}$. $S_{\triangle BEC} = \dfrac{(p-r)\cdot(g-r)}{r}$. $S_{ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CDE} + S_{\triangle BEC} = p + g - r + \dfrac{(p-r)\cdot(g-r)}{r} = \dfrac{pg}{r}$.

1325. В трапеции $ABCD$ (рис. 355) $AD = a$, $BC = b$. Обозначим $KL = x$, $BO = y$ и $BN = h$. $S_{KBCL} = \dfrac{x+b}{2} \cdot y$;

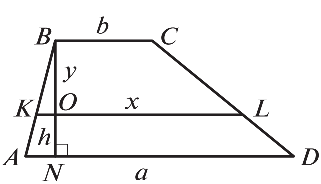


Рис. 355

$S_{AKLD} = \dfrac{a+x}{2} \cdot (h - y)$. Так как $S_{KBCL} = S_{AKLD}$, то $\dfrac{x+b}{2} \cdot y = \dfrac{a+x}{2} \cdot (h - y)$. С другой стороны, $S_{ABCD} =$

$= S_{KBCL} + S_{AKLD}$, т. е. $\frac{x+b}{2} \cdot y + \frac{a+x}{2} \cdot (h - y) = \frac{a+b}{2} \cdot h$. Следовательно, получили систему уравнений: $\frac{x+b}{2} \cdot y = \frac{a+x}{2} \cdot (h-y)$, $\frac{x+b}{2} \cdot y + \frac{a+x}{2} \cdot (h-y) = \frac{a+b}{2} \cdot h$; из которой находим $x = KL = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

1326. Из подобия кругов (см. № 783, § 6.3) следует, что их площади относятся как квадраты их диаметров (см. рис. 437У), т. е. $1^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Значит, площадь большего круга равна площади четырёх маленьких кругов. Следовательно, площадь заштрихованной фигуры равна площади квадрата плюс площадь двух больших кругов и минус площадь восьми маленьких кругов. Но площадь восьми маленьких кругов равна площади двух больших кругов, значит, площадь заштрихованной фигуры равна площади квадрата, т. е. 1.

1327. Обозначим (рис. 356) площадь полукруга, построенного на гипотенузе через $S_г$, площадь полукруга, построенного на большем катете через $S_{бк}$, площадь полукруга, построенного на меньшем катете через $S_{мк}$, а площадь треугольника через $S_т$. Из подобия кругов (см. № 783, § 6.3) следует, что их полукруги так же подобны и их площади относятся как квадраты диаметров. Значит: $\frac{S_{бк}}{S_г} = \frac{a^2}{c^2}$, отсюда $S_{бк} = \frac{a^2}{c^2} \cdot S_г$; $\frac{S_{мк}}{S_г} = \frac{b^2}{c^2}$, отсюда $S_{мк} = \frac{b^2}{c^2} \cdot S_г$; $S_{бк} + S_{мк} = \frac{a^2}{c^2} \cdot S_г + \frac{b^2}{c^2} \cdot S_г = \frac{a^2+b^2}{c^2} \cdot S_г$. В силу теоремы Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$, значит, $S_{бк} + S_{мк} = S_г$. Вычтем из площади $S_г$ общую часть площадей $S_г$, и $S_{бк}$ и общую часть площадей $S_г$, и $S_{мк}$. Получим площадь прямоугольного треугольника. Вычтем из суммы площадей полукругов, по-

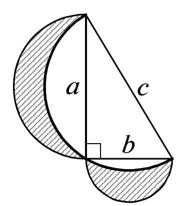


Рис. 356

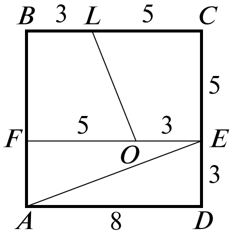


Рис. 357

строенных на большем и меньшем катете $S_{бк} + S_{мк}$, общую часть площадей $S_г$, и $S_{бк}$ и общую часть площадей $S_г$, и $S_{мк}$. Получим сумму площадей частей полукругов, построенных на большем и меньшем катете вне полукруга, построенного на гипотенузе. А так как $S_{бк} + S_{мк} = S_г$, то площадь прямоугольного треугольника равна сумме площадей частей полукругов, построенных на большем и меньшем катете вне полукруга, построенного на гипотенузе.

1328. Как следует из рисунка 357, в четырёхугольнике $OLCE$ стороны LC и OE параллельны. Поскольку прямоугольник $FECA(L)$ составлен из частей квадрата $ABCD$ (рис. 358, *а*), значит, $LC(A)$ и $O_1E_2(F_1A_1)$ параллельны. Следовательно, $\triangle EF_2A_1$ и ECA — прямоугольные. Найдём тангенс $\angle\alpha$ из $\triangle EF_2A_1$ $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{8} = 0{,}375\right)$ и $\triangle ECA$ $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{13} = 0{,}385\right)$. Так как значения тангенса $\angle\alpha$ не совпадают, то отрезки LO_1 и EA_1 являются звеньями ломаной. Аналогично доказывается, что AE_1 и L_1O_2 являются звеньями ломаной. Следовательно, площадь прямоугольника $FECA$ равна сумме площадей фигуры, составленной из частей квадрата $ABCD$, и четырёхугольника $E(O_2)A_1(O_1)L(A)L_1(E_1)$ (рис. 358, *б*).

1329. Пусть для определённости $CB = 3$, $CA = 4$ и $OL = 1$ (рис. 359). Обозначим CL через x. В силу доказанного в § 4.2 равенства двух касательных, прове-

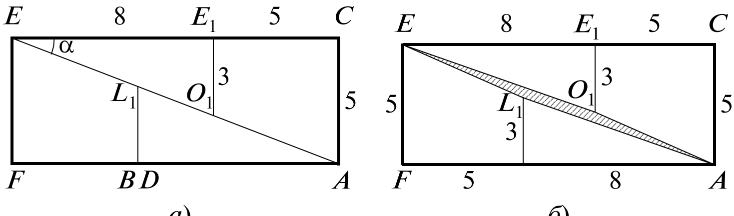


Рис. 358

дённых из одной точки к данной окружности, $LC = CN$, $NA = 4 - x$ и $LB = BM = 3 - x$. Отсюда, $AB = 4 - x + 3 - x = 7 - 2x$. Из $\triangle CLO$ находим $CO = \sqrt{1 + x^2}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$. Используя формулу синуса суммы двух углов (§ 7.2), найдём синус двойного угла $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{2x}{1 + x^2}$. $S_{тр} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot CA \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{2x}{1 + x^2}$. С другой стороны, $S_{тр} = \frac{1}{2}(CB + CA + AB) \cdot OL = (3 + 4 + 7 - 2x) \cdot 1$. Отсюда $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{2x}{1 + x^2} = \frac{1}{2}(3 + 4 + 7 - 2x) \cdot 1$; после преобразований получим $x^3 - 7x^2 + 13x - 7 = 0$. Один из корней уравнения равен 1. $x^3 - 7x^2 + 13x - 7 = (x - 1) \cdot (x^2 - 6x + 7) = 0$. $x_1 = 1$, $AB = 7 - 2x = 5$; $x_2 = 3 + \sqrt{2}$, $AB = 7 - 2x < 0$, следовательно, AB не существует; $x_3 = 3 - \sqrt{2}$, $AB = 7 - 2x = 1 + 2\sqrt{2}$. $S_{тр} = \frac{1}{2}(CB + CA + AB) \cdot OL = \frac{1}{2}(3 + 4 + 5) \cdot 1 = 6$ или $S_{тр} = \frac{1}{2}(CB + CA + AB) \cdot OL = \frac{1}{2}(3 + 4 + 1 + 2\sqrt{2}) \cdot 1 = 4 + \sqrt{2}$.

1330. Так как $\triangle ABC$ — равнобедренный, то $CB = AB$ (рис. 360). $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle MBC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MD =$

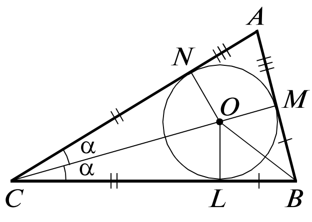


Рис. 359

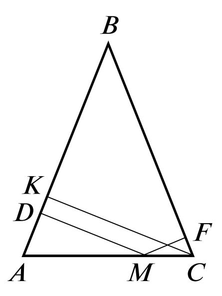


Рис. 360

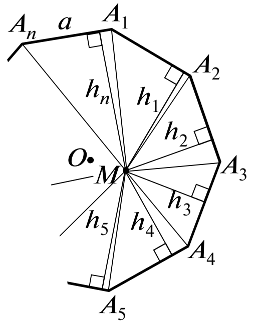


Рис. 361

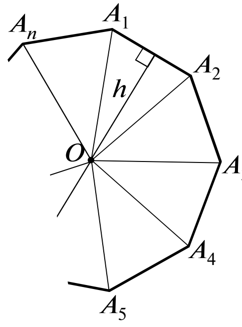


Рис. 362

$= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot MF = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot (MD + MF)$; $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CK$.

Отсюда $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot (MD + MF) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CK$. Значит, $MD + MF = CK$.

1331. Обозначим сторону многоугольника $A_1A_2A_3A_4A_5...A_n$ через a. Соединим данную точку M со всеми вершинами многоугольника (рис. 361). Таким образом, данный многоугольник разбивается на n треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2} \cdot ah_{N_n}$, где $N = 1, 2, ..., n$ — номер треугольника. Отсюда $S_{\text{многоугольника}} = \frac{1}{2}(ah_1 + ah_2 + ... + ah_n) = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2 + ... + h_n)$. Соединим центр многоугольника со всеми его вершинами (рис. 362). Таким образом, данный многоугольник разбивается на N равных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2} \cdot ah$, где h — высота треугольника. Отсюда, $S_{\text{многоугольника}} = \frac{1}{2}(ah) \cdot N$. Значит, $\frac{1}{2}a(h_1 + h_2 + ... + h_n) = \frac{1}{2}(ah) \cdot N$; $h_1 + h_2 + ... + h_n = h \cdot N$.

1334. $S_{\triangle ADB} = 1$; $S_{\triangle CDB} = 3$; $S_{\triangle ADC} = 1{,}5$ (рис. 363). Поскольку $\triangle ADB$, $\triangle CDB$ и $\triangle ADC$ — прямоугольные, то по теореме Пифагора $AB = \sqrt{5}$, $CB = \sqrt{13}$, $CA = \sqrt{10}$.

В $\triangle ABC$ $CB^2 = AB^2 + CA^2 - 2 \cdot AB \cdot CA \cdot \cos\alpha$. Отсюда $\cos\alpha = \frac{1}{5\sqrt{2}}$; $\sin\alpha = \frac{7}{5\sqrt{2}}$. $S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} \times AB \cdot CA \cdot \sin\alpha = 3{,}5$.

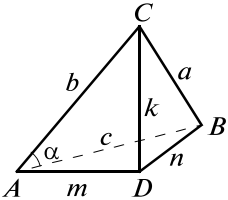


Рис. 363

1335. Обозначим рёбра пирамиды $ABCD$ (см. табл. 7) $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$; $AD = m$, $DB = n$ и $DC = k$.

Отсюда $S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2}mn$; $S_{\triangle CDB} = \frac{1}{2}kn$; $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}mk$. Поскольку $\triangle ADB$, $\triangle CDB$ и $\triangle ADC$ — прямоугольные, то по теореме Пифагора $a^2 = k^2 + n^2$; $b^2 = m^2 + k^2$; $c^2 = m^2 + n^2$. В $\triangle ABC$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot bc\cos\alpha$. Отсюда

$$\cos\alpha = \frac{m^2}{\sqrt{(m^2 + k^2)(m^2 + n^2)}}.\ \sin\alpha = \sqrt{\frac{m^2k^2 + k^2n^2 + m^2n^2}{\sqrt{(m^2 + k^2)(m^2 + n^2)}}}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\sqrt{\frac{m^2k^2 + k^2n^2 + m^2n^2}{\sqrt{(m^2 + k^2)(m^2 + n^2)}}}.$$

$$S^2_{\triangle ABC} = \frac{1}{4}(bc)^2\frac{m^2k^2 + k^2n^2 + m^2n^2}{\sqrt{(m^2 + k^2)(m^2 + n^2)}} = \frac{1}{4}(m^2 + k^2) \times$$

$$\times (m^2 + n^2)\frac{m^2k^2 + k^2n^2 + m^2n^2}{\sqrt{(m^2 + k^2)(m^2 + n^2)}} = \frac{1}{4}(m^2k^2 + k^2n^2 + m^2n^2) =$$

$$= \frac{1}{4}m^2k^2 + \frac{1}{4}k^2n^2 + \frac{1}{4}m^2n^2 = S^2_{\triangle ADC} + S^2_{\triangle CDB} + S^2_{\triangle ADB}.$$

1336. Даны куб, крест, равновеликий грани куба. На рисунке 364 хорошо видно, как нужно наложить на грань крест: завернув «торчащие уши» на соседние грани, можно таким образом заклеить поверхность куба шестью крестами (рис. 365).

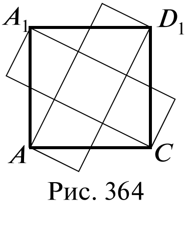


Рис. 364

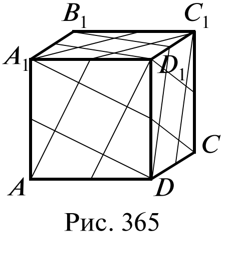


Рис. 365

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Стороны параллелограмма 4 см и 6 см. Меньшая его высота равна 3 см. Вычислите вторую высоту.

2. Докажите, что стороны параллелограмма обратно пропорциональны соответствующим высотам.

3. Дан параллелограмм $ABCD$. 1) Постройте параллелограмм с основанием AD, равновеликий данному. 2) Сколько таких параллелограммов существует?

4. Основания трапеции равны 4 см и 7 см, высота равна 3 см. Вычислите площадь трапеции.

5. Средняя линия трапеции равна 7 см, а её площадь равна 56 см^2. Найдите высоту трапеции.

6. Основания трапеции равны 4 см и 7 см, а боковые стороны равны 5 см и 6 см. Вычислите площадь трапеции.

7. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и через точку пересечения продолжений её боковых сторон, делит основания трапеции пополам.

8. В треугольнике центр вписанной окружности соединили с вершинами треугольника и точками касания. Докажите, что пары треугольников, прилежащие к одной вершине, равны.

9. Докажите, что две касательные, проведённые из одной точки к окружности, равны.

10. Докажите, что площадь квадрата равна половине квадрата его диагонали.

11. Найдите площадь правильного шестиугольника, если его сторона равна a.

12. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

13. Докажите, что площадь параллелограмма равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

10.3. Площади в теоремах и задачах (3 ч)

Материал, определяемый «Примерными программами основного общего образования» как обязательный, в параграфе составляет только его часть. А именно возможность на примерах рассмотреть очень важный метод доказательства — метод площадей. Вместе с понятием равновеликости он позволяет значительно упростить решение многих задач и углубляет общие представления учащихся о методах геометрии. Для остального материала учитель сам определяет его место в процессе изучения. Примерное планирование изучения материала, приведённое здесь, является рекомендательным для тех учителей, которые решат изучить весь материал параграфа.

При изучении § 10.3 учащиеся получат возможность: приводить примеры применения метода площадей; объяснять формулу синуса двойного угла; применять метод площадей при решении задач на вычисление и доказательство.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

1 Материал параграфа является обобщением темы «Площади многоугольников», вся работа организуется через решение задач. Поэтому работу можно организовать следующим образом:

— если рассматривается известная теорема, то предложить учащимся сформулировать её; вспомнить, как эта теорема доказывалась раньше; затем поиск нового доказательства провести в форме фронтальной беседы и обсудить, какой метод проще, изящнее;

— если рассматривается новый факт, то условие теоремы можно сформулировать в виде задачи и попытаться найти её решение вместе с учащимися.

2 При обсуждении методов доказательства теоремы Пифагора: одного — подобия треугольников и второго — с опорой на свойства площадей можно предложить учащимся найти ещё какое-нибудь доказательство теоремы.

3 В процессе вывода формулы длины биссектрисы угла треугольника, необходимо найти синус двойного угла. Для этого учащиеся должны вспомнить формулы сложения для синуса и косинуса. После вывода этой формулы решить № 1337 с использованием формулы синуса суммы углов.

4 Решение № 1347 предварить задачей: «Докажите, что средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, площадь которого равна $\frac{1}{4}$ площади данного треугольника».

(5) Материал параграфа служит для обобщения, вопросы к домашнему заданию здесь не предусматриваются. Задачи параграфа позволяют достаточно глубоко проработать предлагаемые методы.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — пункты: ещё одно доказательство теоремы Пифагора; метод площадей, теорема о медианах треугольника; № 1339; дома — повторить пункт формулы сложения для синуса и косинуса» § 7.2, № 1338, 1340, 1341, 1342 и 1343.

На втором уроке: в классе — пункты: теорема о биссектрисе внутреннего угла треугольника, одна важная задача, ещё один метод, основанный на понятии площади, вывод формулы синуса двойного угла; № 1337 и 1344; дома — № 1347, 1348, 1349 и 1350.

На третьем уроке: в классе — пункты: отношение отрезков диагонали четырёхугольника, одна типичная задача, составление уравнений; № 1345 и 1353; дома — № 1346 и 1351.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

№ 1339 .

1337. Так как треугольник — прямоугольный, то

$$l = \frac{2ab \cdot \sin 45^\circ}{a+b} = \frac{2ab \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{a+b} = \frac{ab \cdot \sqrt{2}}{a+b}.$$

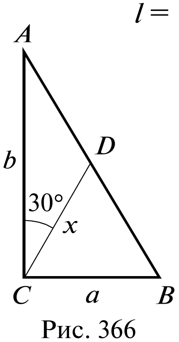


Рис. 366

1338. Так как площадь треугольника равна половине произведения двух сторон на синус угла между ними (рис. 366), то: $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{4}bx$; $S_{\triangle CDB} = \frac{1}{4}ax\sqrt{3}$;

$S_{\triangle ACB} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle CDB}$, $S_{\triangle ACB} = \frac{1}{4}x(b + a\sqrt{3})$. Отсюда $x = \dfrac{2ab}{a\sqrt{3}+b}$.

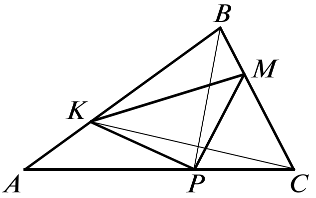


Рис. 367

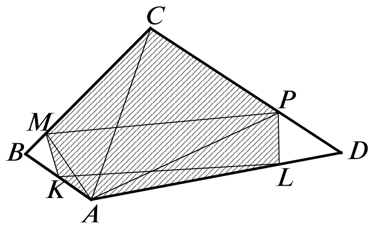


Рис. 368

1339. Так как $AK : KB = 1 : 2$, то $S_{\triangle AKC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$, $S_{\triangle KBC} = \frac{2}{3} S_{\triangle ABC}$ (рис. 367). Поскольку $PC : AP = 3 : 4$, то $S_{\triangle AKP} = \frac{4}{7} S_{\triangle AKC}$. Отсюда $S_{\triangle AKP} = \frac{4}{7}\left(\frac{1}{3} S_{\triangle ABC}\right) = \frac{4}{21} S_{\triangle ABC}$. Поскольку $BM : MC = 2 : 3$, то $S_{\triangle KBM} = \frac{2}{5} S_{\triangle KBC} = \frac{2}{5}\left(\frac{2}{3} S_{\triangle ABC}\right) = \frac{4}{15} S_{\triangle ABC}$. Аналогично, $S_{\triangle PCM} = \frac{9}{35} S_{\triangle ABC}$.
Значит:

$$S_{\triangle KMP} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AKP} - S_{\triangle KBM} - S_{\triangle MCP} = S_{\triangle ABC} - \frac{4}{21} S_{\triangle ABC} - \frac{4}{15} S_{\triangle ABC} - \frac{9}{35} S_{\triangle ABC} = \frac{2}{7} S_{\triangle ABC}.$$

1341. По аналогии с № 1339 (рис. 368): $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC}$; $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC}$; $S_{\triangle BMK} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABM} = \frac{1}{12} S_{\triangle ABC}$; $S_{\triangle ACD} = S_{ABCD} - S_{\triangle ABC}$; $S_{\triangle APD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD}$; $S_{\triangle PLD} = \frac{1}{4} S_{\triangle APD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}(S_{ABCD} - S_{\triangle ABC}) = \frac{1}{12}(S_{ABCD} - S_{\triangle ABC})$.
Отсюда: $S_{AKMCPL} =$

$$= S_{ABCD} - \frac{1}{12} S_{\triangle ABC} - \frac{1}{12}(S_{ABCD} - S_{\triangle ABC}) = \frac{11}{12} S_{ABCD} = \frac{11}{12}.$$

1342. Из точки A_1 опустим перпендикуляры A_1F и A_1E на стороны AC и AB соответственно (рис. 369). $\triangle A_1AF$ и $\triangle A_1AE$ равны, как прямоугольные треугольники по гипотенузе и ост-

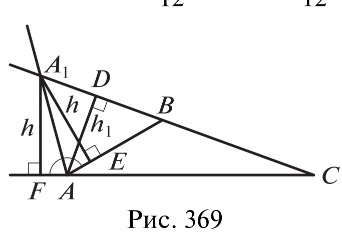
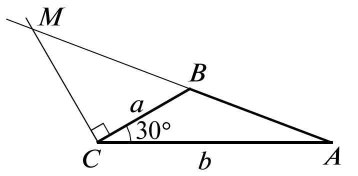
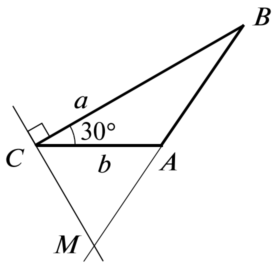


Рис. 369



а)



б)

Рис. 370

рому углу. Следовательно, $A_1F = A_1E = h$. Из вершины A опустим перпендикуляр $AD = h_1$ на сторону A_1C. $S_{\triangle AA_1C} = \frac{1}{2}h_1 \cdot A_1C = \frac{1}{2}h \cdot AC$; $S_{\triangle AA_1B} = \frac{1}{2}h_1 \cdot A_1B = \frac{1}{2}h \cdot AB$. Отсюда $A_1B : A_1C = AB : AC$.

1343. 1) Допустим $\angle MBC = 90°$. Задача не имеет решения, так как MC и AB параллельны, как два перпендикуляра к одной прямой. 2) $\angle MBC \neq 90°$. Возможны два варианта: а) $a < b$; б) $a > b$ (рис. 370).

$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2}b \cdot CM \cdot \sin 120°$. В случае а) $S_{\triangle AMC} = S_{\triangle BMC} + S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \cdot CM + \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin 30°$. В случае б) $S_{\triangle AMC} = S_{\triangle BMC} - S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \cdot CM - \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin 30°$. Отсюда а) $CM = \dfrac{ab}{b\sqrt{3} - 2a}$; б) $CM = \dfrac{ab}{2a - b\sqrt{3}}$.

1344. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}AB \cdot CM$, отсюда $CM = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. $\triangle OCD$ — прямоугольный, так как CD — касательная. Пусть $CD = x$, а $\angle COD = \alpha$, тогда $x = \frac{1}{2}AB \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}\operatorname{tg}\alpha$. Из $\triangle COM$ найдём значение $\operatorname{tg}\alpha$. $\sin\alpha = \dfrac{CD}{OC} = \dfrac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$;

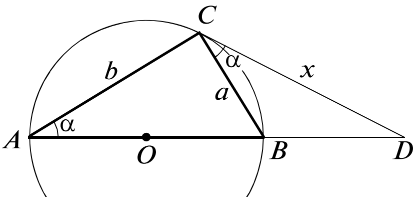


Рис. 371

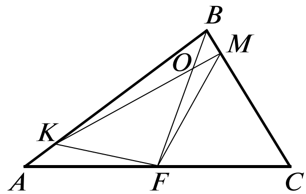


Рис. 372

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2ab}{|a^2-b^2|}$. Значит,

$x = \dfrac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{|a^2-b^2|}$ (рис. 371).

1345. Пусть $S_{\triangle ABC} = S$ (рис. 372). По аналогии с решением задачи 1339: $S_{\triangle KBC} = \frac{5}{6}S$; $S_{\triangle KBM} = \frac{5}{36}S$; $S_{\triangle AKC} = \frac{1}{6}S$; $S_{\triangle AKF} = \frac{1}{12}S$; $S_{\triangle BFC} = \frac{1}{2}S$; $S_{\triangle FMC} = \frac{5}{12}S$.

$$S_{\triangle KMF} = S\left(1 - \frac{5}{36} - \frac{1}{12} - \frac{5}{12}\right) = \frac{13}{36}S.$$

Рассмотрим четырёхугольник $KBMF$, в котором KM и BF — диагонали. В силу решения ***Задачи 3***

$\dfrac{BO}{OF} = \dfrac{S_{\triangle KBM}}{S_{\triangle FKM}} = \dfrac{5}{13}$.

1346. Обозначим $S_{\triangle ABC} = S$. По аналогии с № 1339 (рис. 373): $S_{\triangle ABF} = \frac{1}{3}S$; $S_{\triangle FBC} = \frac{2}{3}S$; $S_{\triangle FMB} = \frac{1}{3}S$.

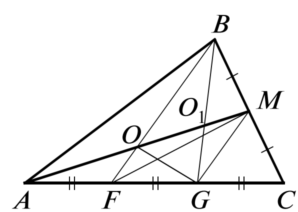


Рис. 373

Рассмотрим четырёхугольник $ABMF$, в котором AM и BF — диагонали. В силу решения ***Задачи 3*** $\dfrac{AO}{OM} = \dfrac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle FBG}} = 1$ (не G, а M). Отсюда $AO = OM$, $S_{\triangle AOG} = S_{\triangle GOM}$. $S_{\triangle BGC} = \frac{1}{3}S$, $S_{\triangle GMC} = S_{\triangle GBM} = \frac{1}{6}S$ ($BM =$

$= MC)$. $S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} S$, $S_{\triangle AMG} = S_{\triangle AMC} - S_{\triangle GMC} = \frac{1}{3} S$; $S_{\triangle AOG} = \frac{1}{6} S$, $S_{\triangle FOG} = \frac{1}{12} S$ $(AF = FG)$. $S_{\triangle BOG} = S_{\triangle FBG} - S_{\triangle FOG} = \frac{1}{3} S - \frac{1}{2} S = \frac{1}{4} S$. Значит, $\frac{O_1O}{O_1M} = \frac{S_{\triangle FOG}}{S_{\triangle BGM}} = \frac{3}{2}$ (не F, а B). Так как $AO = MO$ и $O_1O : O_1M = 3 : 2$, то $AO : OO_1 : O_1M = 5 : 3 : 2$.

1347. Треугольники ABP, PQA, PQC и DCQ равны по третьему признаку равенства треугольников (рис. 374): $BP = PC = AQ = DQ$ (P и Q — середины сторон параллелограмма), $AB = QP = DC$ и $AP = QC$ (как отрезки параллельных прямых, заключённых между параллельными прямыми) $S_{\triangle DCQ} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$. Треугольники QND и PLB равны по второму признаку равенства треугольников: (P и Q — середины сторон параллелограмма), $\angle LBP = \angle NDQ$ и $\angle BPL = \angle DQN$ (как углы при параллельных прямых). Отсюда $PL = QN$ — средняя линия $\triangle BMC$, MR — средняя линия $\triangle NDC$.

$$S_{\triangle CMR} = \frac{1}{2} MR \cdot MC \cdot \sin\alpha,$$

$$S_{\triangle QND} = \frac{1}{2}(2MR) \cdot \left(\frac{1}{2} MC\right) \sin(180^\circ - \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} MR \cdot MC \cdot \sin\alpha.$$

$S_{\triangle DCQ} = 5S_{\triangle CMR} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$. Отсюда $S_{\triangle CMR} = \frac{1}{20} S_{ABCD}$, $S_{NMRD} = \frac{3}{20} S_{ABCD}$, $S_{NMRD} = S_{LKOB}$. $S_{OBRD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$. Значит, $S_{KLMN} = S_{OBRD} - 2S_{NMRD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} - \frac{6}{20} S_{ABCD} = \frac{4}{20} S_{ABCD}$.

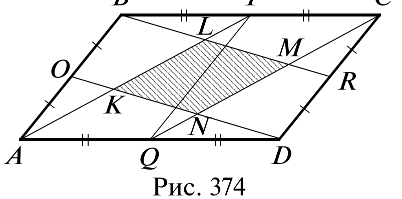


Рис. 374

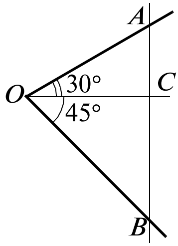


Рис. 375

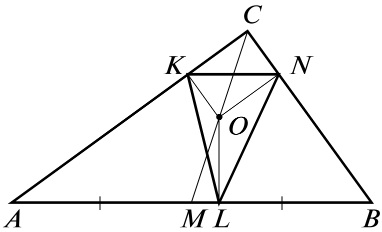


Рис. 376

1348. Обозначим высоту треугольника через h: $h = a \cdot \cos\beta$ и $h = b \cdot \cos\alpha$.

По алгоритму условия задачи получаем: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin(\alpha + \beta)$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h \cdot \sin\beta + \frac{1}{2} b \cdot h \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} ab \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta + \frac{1}{2} ab \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha$, $\sin(\alpha + \beta) = \sin\beta \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\beta$.

1349. $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} OA \cdot OC \cdot \sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (рис. 375). С другой стороны, $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} CA \cdot OC$, отсюда $AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, выполняется равенство $OA^2 = CA^2 + OC^2$. По обратной теореме Пифагора $\triangle AOC$ — прямоугольный ($\angle C$ — прямой). Аналогично доказывается, что $\triangle BOC$ — прямоугольный ($\angle C$ — прямой). Из точки C, лежащей на прямой OC, к данной прямой можно провести только один перпендикуляр. Следовательно, точки A, B и C лежат на одной прямой.

1350. $S_{\triangle KLN} = S_{\triangle KON} + S_{\triangle NOL} + S_{\triangle LOK}$ (рис. 376). Введём обозначения $BC = a$, $AC = b$, $\angle B = \beta$, $\angle A = \alpha$. Из подобия соответствующих треугольников следует $KO = \frac{1}{4} a$, $NO = \frac{1}{4} b$, $\angle KON = 90°$. $S_{\triangle KON} = \frac{1}{2} KO \cdot NO = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} ab$. В прямоугольном $\triangle MOL$ гипотенуза $MO = \frac{1}{4}\sqrt{a^2 + b^2}$, $\angle LMO = 180° - 2\beta$ ($\triangle MCB$ — равнобедренный), $\sin 2\beta = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$, значит, $OL = \frac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$. В четырёхугольнике $LONB$: $\angle LON = 180° - \beta$. $S_{\triangle LON} = \frac{1}{2} LO \cdot NO \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{1}{4} b \frac{b}{2\sqrt{a^2+b^2}}$. Аналогично, $S_{\triangle LOK} = \frac{1}{2} LO \cdot KO \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{1}{4} a \times \frac{a}{2\sqrt{a^2+b^2}}$. Следовательно, $S_{\triangle KLN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16} ab$. Поскольку $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab$, то $S_{\triangle KLN} = \frac{3}{16} S_{\triangle ABC}$.

1351. Пусть $S_{\triangle ABC} = S$. По аналогии с № 1338 (рис. 377): $S_{\triangle PBC} = \frac{1}{3} S$; $S_{\triangle PBC} = \frac{1}{3} S$; $S_{\triangle MPC} = \frac{2}{3} S_{\triangle PBC} = \frac{2}{9} S$; $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{3} S$; $S_{\triangle MKB} = \frac{2}{3} S_{\triangle ABM} = \frac{2}{9} S$; $S_{\triangle AKC} = \frac{1}{6} S$; $S_{\triangle AKF} = \frac{1}{12} S$; $S_{\triangle BFC} = \frac{1}{2} S$; $S_{\triangle FMC} = \frac{5}{12} S$. $S_{\triangle KMF} = S\left(1 - \frac{5}{36} - \frac{1}{12} - \frac{5}{12}\right) = \frac{13}{36} S$.

1352. В $\triangle ABC$ обозначим $AD = u$, $BD = v$, $u + v = c$. Касательные, выходящие из точки K, обозначим x (рис. 378). $CD = 2r = \sqrt{uv}$. Найдём площадь $\triangle ABK$ по формуле Герона $S = \sqrt{(u+v+x)uvx} = \sqrt{(c+x)x}$ и по формуле $S = pr = (u+v+x)\frac{\sqrt{uv}}{2} = \frac{(c+x)}{2}$, а затем их приравняем: $\sqrt{(c+x)x} = \frac{(c+x)}{2}$, отсюда $x = \frac{c}{3}$.

1353. Непосредственно следует из решения ***Задачи 3***.

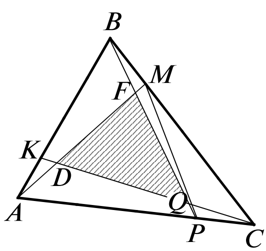


Рис. 377

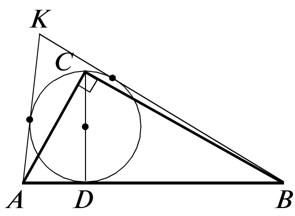


Рис. 378

Контрольная работа № 8

Вариант 1

1. Прямоугольник $ABCD$ и параллелограмм $AFGB$ расположены так, как показано на рисунке, при этом их стороны AB и FG лежат на одной прямой. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 11 см^2, а площадь $\triangle CMF$ равна 1 см^2. Найдите площадь параллелограмма $AFGB$ (рис. 379).

А. 12 см^2. Б. 11 см^2. В. 10 см^2.

2. $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ подобны и их периметры относятся, как 2 : 5. Площадь $\triangle A_1B_1C_1$ на 42 см^2 больше площади $\triangle ABC$. Найдите площадь $\triangle ABC$.

А. 36 см^2. Б. 50 см^2. В. 42 см^2. Г. 8 см^2.

3. Площадь прямоугольника, в котором стороны относятся как 1 : 4, равна площади квадрата со стороной 6 см. Найдите большую сторону прямоугольника.

Ответ: ______________________________

4. В $\triangle ABC$, стороны которого равны 25 см, 26 см и 3 см, вписана окружность. Найдите радиус вписанной окружности (рис. 380).

Ответ: ______________________________

5. $\triangle ABC$, стороны которого 13 см, 14 см и 15 см, разбит на три треугольника отрезками, соединяющими точку пересечения медиан M с вершинами треугольника. Найдите площадь $\triangle BMC$.

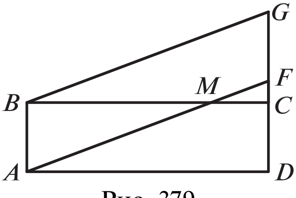


Рис. 379

Рис. 380

Вариант 2

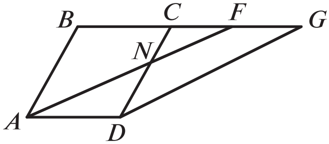


Рис. 381

1. Ромб $ABCD$ и параллелограмм $AFGD$ расположены так, как показано на рисунке, при этом их стороны AB и FG лежат на одной прямой. Площадь ромба $ABCD$ равна 11 см^2, а площадь $\triangle AND$ равна 3 см^2. Найдите площадь параллелограмма $AFGD$ (рис. 381).

А. 12 см^2. Б. 10 см^2. В. 11 см^2.

2. $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ подобны и отношение сходственных сторон равно 5 : 3. Площадь $\triangle ABC$ на 16 см^2 больше площади $\triangle A_1B_1C_1$. Найдите площадь $\triangle ABC$.

А. 16 см^2. Б. 9 см^2. В. 25 см^2. Г. 34 см^2.

3. В прямоугольнике $ABCD$ стороны равны 3 см и 8 см. Найдите меньшую сторону равновеликого ему прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$, периметр которого равен 20 см.

Ответ: ______________________________

4. В $\triangle ABC$, стороны которого равны 25 см, 26 см и 3 см, вписана окружность. Найдите радиус вписанной окружности (см. рис. 380).

Ответ: ______________________________

5. В треугольник вписана окружность радиуса 4 см. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на отрезки 6 см и 8 см. Найдите длины сторон треугольника (см. рис. 380).

Глава 11
Длина окружности, площадь круга (13 ч)

В главе продолжается изучение свойств многоугольников, а именно правильных многоугольников. Изучение свойства правильных многоугольников, вписанных в окружность и описанных около окружности, и их периметров позволяет подводить учащихся к понятию длины окружности и площади круга, а также выводу формул для их вычисления. Для правильных n-угольников доказывается существование описанной и вписанной окружностей. При выводе формулы длины окружности в неявном виде используется метод предельного перехода. Наряду с площадью круга рассматриваются также площади кругового сектора и кругового сегмента.

Здесь же учащимся предстоит познакомиться с новой для них мерой углов — радианной, определение которой дано конструктивно. Учащиеся должны понять соотношение между градусной и радианной мерами угла.

В процессе изучения данной главы полезно уделить внимание использованию электронного приложения.

При изучении главы 11 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— формулировать и иллюстрировать определение правильного многоугольника;

— объяснять свойство правильного многоугольника: быть вписанным в окружность и описанным около окружности;

— объяснять расположение центров вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника;

— выводить формулы, связывающие радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности со стороной правильного *n*-угольника;

— объяснять формулы длины окружности и площади круга, опираясь на наглядные представления;

— вычислять длину окружности, длину дуги окружности;

— вычислять площади круга, кругового сектора и кругового сегмента;

— применять при решении задач на вычисление и доказательство: формулы длины окружности и длины дуги окружности, формулы площади круга, площади кругового сектора и площади кругового сегмента; формулы перехода от градусной меры угла к радианной и обратно.

Учащиеся получат возможность научиться выводить формулы перехода от градусной меры угла к радианной и обратно; применять при решении задач на вычисления и доказательство формулы перехода от градусной меры угла к радианной и обратно.

11.1. Правильные многоугольники (3 ч)

Рассматриваемый в параграфе материал служит фундаментом для изучения таких важных тем школьного курса планиметрии, как «Длина окружности» и «Площадь круга».

После того как учащиеся убеждаются в существовании описанной и вписанной окружностей, несколько вскользь сообщается об определении центров вписанной и описанной окружностей.

В результате изучения § 11.1 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— изображать и выделять из ситуации, изображённой на чертежах или рисунках, конфигурацию, позволяющую применить формулы длины окружности и длины дуги;

— формулировать и объяснять теоремы о существовании описанной и вписанной окружностей; свойства периметра правильного n-угольника;

— объяснять расположение центров вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника;

— выводить формулы, связывающие радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности со стороной правильного n-угольника;

— решать задачи на построение правильных многоугольников;

— решать задачи на вычисление и доказательство с использованием: формул, связывающих радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности со стороной правильного n-угольника; алгебраический аппарат.

Учащиеся получат возможность познакомиться с доказательством теоремы о существовании описанной и вписанной окружностей; с доказательством теоремы о свойстве периметра правильного n-угольника.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

1 Доказательство утверждения «любой правильный многоугольник является одновременно вписанным и описанным...» фактически сводится к построению точки, равноудалённой от всех вершин и сторон правильного многоугольника и проводится с опорой на рисунок 453У. При обсуждении доказательства этого утверждения следует очень чётко зафиксировать внимание учащихся на том факте, что «для правильных многоугольников центры вписанной и описанной окружностей совпадают». Отметим, что центр вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника во многих сборниках задач и учебниках называют центром многоугольника. Из доказательства утверждения вытекают алгоритмы построения общего центра впи-

санной и описанной окружностей правильного многоугольника и их радиусов:

— Для нахождения центра и радиуса окружности, вписанной в правильный многоугольник, достаточно построить биссектрисы двух соседних углов, найти точку их пересечения и опустить из неё перпендикуляр на соответствующую сторону многоугольника. Точка пересечения биссектрис является центром вписанной окружности, а перпендикуляр — радиусом вписанной окружности.

— Для нахождения центра и радиуса окружности, описанной около правильного многоугольника, достаточно построить перпендикуляры к двум соседним сторонам, найти точку их пересечения и соединить её с соответствующей вершиной многоугольника. Точка пересечения перпендикуляров является центром описанной окружности, а отрезок, соединяющий её с вершиной многоугольника, — радиусом описанной окружности.

На закрепление темы — у п р а ж н е н и е: «Начертите правильный треугольник (четырёхугольник) и постройте: а) вписанную в него окружность; б) описанную около него окружность» и № 162, 164, 165Т. № 167—170Т составляют серию очень полезных задач, результаты решения которых могут быть использованы в дальнейшем.

2 Формулы, связывающие радиусы вписанной и описанной окружностей со стороной правильного n-угольника, входят в содержание курса планиметрии, определяемое «Примерными программами основного общего образования», получаются при решении № 1354 и 1355 и будут неоднократно использоваться в процессе решения. Следует решить эти задачи на уроке. Для лучшего запоминания формул полезно выразить сторону правильного n-угольника через радиусы вписанной и описанной окружностей и сделать в тетрадях таблицу 8.

3 Материал пункта «Свойство периметра правильного n-угольника» является пропедевтическим для тем «Длина окружности» и «Площадь круга», рекомендуется дать его на уроке в полном соответствии с учебником, а опрос учащихся по нему не проводить, кроме формулировок теоремы и леммы.

Таблица 8

Число сторон n-угольника	Выражение радиусов вписанной r_n и описанной R_n окружностей через сторону a_n n-угольника		Выражение стороны a_n n-угольника через радиусы вписанной r_n и описанной R_n окружностей	
3	$R_3 = \frac{a}{\sqrt{3}}$	$r_3 = \frac{a}{2\sqrt{3}}$	$a_3 = R\sqrt{3}$	$a_3 = 2r\sqrt{3}$
4	$R_4 = \frac{a}{\sqrt{2}}$	$r_4 = \frac{a}{2}$	$a_4 = R\sqrt{2}$	$a_4 = 2r$
6	$R_6 = a$	$r_6 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	$a_6 = R$	$a_6 = \frac{2r}{\sqrt{3}}$
n	$R_n = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}$	$r_n = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$	$a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}$	$a_n = 2r\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$

При доказательстве теоремы обратить внимание учащихся на нестандартный метод доказательства, применяемый в этой теореме.

Дополнительные задачи являются классическими по теме «Правильные многоугольники» и могут быть использованы для организации дифференцированной работы на уроке и дома.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — пункт: определение правильного многоугольника; № 1354 и 1355; дома — № 1—5В, № 1356, 1357, 1358 и 1361.

На втором уроке: в классе — пункт: свойство периметра правильного n-угольника; № 1362 и 1364; дома — № 6, 7В, № 1359, 1360 и 1363.

На третьем уроке: в классе — № 1367—1370; дома — № 1365, 1366.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Сформулируйте определение правильного многоугольника.

2. Объясните, какой многоугольник называется вписанным.

3. Объясните, какой многоугольник называется описанным.

4. Сформулируйте и докажите утверждение о правильном многоугольнике, вписанном в окружность и описанном около окружности.

5. Выведите формулы для радиусов вписанной и описанной окружностей правильного n-угольника.

6. Сформулируйте лемму о периметрах двух треугольников, которые имеют по одной равной стороне и равные углы против равных сторон.

7. Сформулируйте свойство периметра правильного n-угольника.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

№ 1355, 1356, 1357, 1364, 1366 и 1367 .

1361. Воспользуемся результатом ***<u>Задач 1, 2</u>***.

1) Шаг 1. $a_3 = R\sqrt{3}$; $r_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}a_3$, отсюда $r_3 = \frac{1}{2}R$.

Шаг 2. $a_4 = r_3\sqrt{2}$; $r_4 = \frac{1}{2}a_4$, отсюда $r_4 = \frac{\sqrt{2}}{4}R$.

Шаг 3. $a_6 = r_4 = \frac{\sqrt{2}}{4}R$; $r_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}a_6$, отсюда $r_6 = \frac{\sqrt{6}}{8}R$.

2) Шаг 1. $a_6 = R$; $r_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}a_6$, отсюда $r_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}R$.

Шаг 2. $a_4 = r_6\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}R$; $r_4 = \frac{1}{2}a_4$; отсюда $r_4 = \frac{\sqrt{6}}{4}R$.

Шаг 3. $a_3 = r_4\sqrt{3} = 3\frac{\sqrt{2}}{4}R$; $r_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}a_3$, отсюда $r_3 = \frac{\sqrt{6}}{8}R$.

1362. В условии ошибка: должна быть ссылка не на № 945, а на № 948.

$\cos 18° = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$. Воспользуемся результатом решения № 948 (§ 7.2) $\sin 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ и получим $a_{10} = 2R\sin 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}R$.

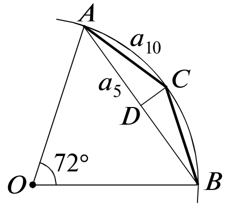


Рис. 382

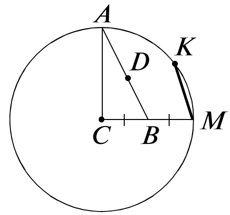


Рис. 383

1363. Угол правильного десятиугольника равен 144°. Рассмотрим $\triangle ADC$ (рис. 382): DC — отрезок прямой, соединяющей центр окружности с вершиной десятиугольника. Значит, отрезок DC перпендикулярен стороне пятиугольника и является биссектрисой $\angle ACB$, что следует из утверждения о правильном многоугольнике, вписанном в окружность и описанном около окружности. Из $\triangle ADC$ (прямоугольный) следует $\frac{1}{2}a_5 = a_{10}\cos 18°$. Воспользуемся результатами № 954 и 1362, $a_{10} = 2R\sin 18° = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и получим: $a_5 = 2R\frac{\sqrt{5}-1}{4} \times \cos 18° = 2R\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = R\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$.

1364. $a_{10} = 2R\sin 18° = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (см. решение № 362). Чтобы построить отрезок $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, построим единичную окружность с центром в точке C (рис. 383). Построим прямоугольный $\triangle ABC$ с прямым углом в точке C, один катет которого равен 1, а второй — $\frac{1}{2}$. Тогда его гипотенуза равна $\frac{\sqrt{5}}{2}$. От точки B отложим на гипотенузе отрезок BD, равный $\frac{1}{2}$. Отсюда отрезок AD будет равен $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. На окружности от точки M раствором циркуля, равным AD, сделать засечку K. Отрезок $MK =$

$= \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ по построению (см. № 1362) является стороной десятиугольника. Продолжая делать засечки раствором циркуля, равным AD, получим вершины десятиугольника. Соединив вершины через одну, получим пятиугольник. Чтобы вписать десятиугольник в окружность заданного радиуса, достаточно провести окружность заданного радиуса с центром в точке C и через вершины построенного в единичной окружности десятиугольника из центра окружности провести лучи до пересечения с заданной окружностью.

1365. Нет. Контрпример: прямоугольник.

1366. Нет. Контрпример: ромб.

1367. В $\triangle AOF$ и $\triangle FOD$ проведены высоты OK и OM соответственно. Так как эти треугольники равнобедренные, то OK и OM являются и медианами. $\angle OAF = \angle OFA = \alpha$. Обозначим $\angle OFD$ через β, тогда угол данного пятиугольника равен $\alpha + \beta$. На рисунке 384, двигаясь по часовой стрелке, отметим равные углы при основаниях равнобедренных треугольников соответственно α или β. Следовательно, в $\triangle AOB$: $\angle OBA = \alpha$, $\angle OAB = \angle BAF - \angle OAF = \beta$. Значит, $\alpha = \beta$. Отсюда из равенства $\triangle OKF$ и $\triangle OMF$ (по гипотенузе и острому углу) следует $KF = FM$, а значит, $AF = FD$. Аналогично доказывается равенство остальных сторон пятиугольника. Следовательно, у данного пятиугольника равны все стороны и все углы, значит, пятиугольник — правильный.

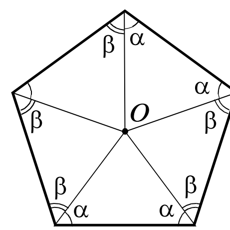


Рис. 384

1368. Доказательство аналогично № 1367.

1369. Проведём радиусы OK и OM в точки касания. $\triangle OKA_2$ и $\triangle OMA_2$ равны, так как $KA_2 = A_2M$, как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, а A_2O — общая гипотенуза. Следовательно, $\angle KA_2O = \angle MA_2O$. Значит, OA_2 — биссектриса $\angle A_1A_2A_3$. Аналогично доказывается, что OA_1, OA_2, ..., OA_n — соответственно биссектрисы $\angle A_2A_1A_n$, $\angle A_2A_3A_4$, ..., $\angle A_{n-1}A_nA_1$. Обозначим отрезки KA_2 через a, а KA_1 че-

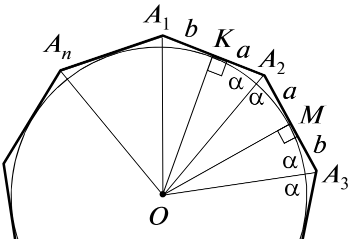


Рис. 385

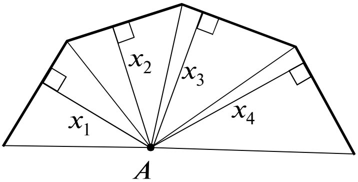


Рис. 386

рез b. На рисунке 385, двигаясь по часовой стрелке, как в № 1367, отметим соответственно равные отрезки, являющиеся касательными, через a или b. В результате придём к противоречию: в $\triangle A_1KO$ катет A_1K с одной стороны равен b, а с другой — a. Значит, $b = a$. Следовательно, $\triangle A_1KO = \triangle A_2KO$, $\angle OA_1K = \angle OA_2K$, а значит, $\angle A_nA_1A_2 = \angle A_1A_2A_3$. Поскольку OA_1, OA_3, ..., OA_n — биссектрисы соответствующих углов, то все углы равны. Значит, данный многоугольник с нечётным числом сторон имеет равные стороны и равные углы, следовательно, — правильный.

1370. Сначала докажем утверждение задачи для правильного многоугольника $A_1A_2A_3...A_n$ (рис. 386). Соединим точку A с вершинами многоугольника и опустим перпендикуляры на стороны многоугольника. Таким образом, многоугольник $A_1A_2A_3...A_n$ разбит на n треугольников с равными основаниями $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = ... = A_nA_1 = a$ и высотами x_1, x_2, x_3, ..., x_n. Значит, $2S = a(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n)$, отсюда

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = \frac{2S}{a}.$$

Рассмотрим теперь многоугольник $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ с равными углами (рис. 387). Построим правильный многоугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, содержащий многоугольник $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$, при этом стороны этих многоугольников параллельны. Обозначим расстояния от точки A до сторон многоугольника $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ через y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6. Разность $x_1 - y_1$ — это расстоя-

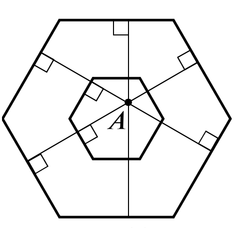


Рис. 387

ние между параллельными прямыми, значит, сумма расстояний между параллельными сторонами обоих многоугольников не зависит от выбора точки A внутри многоугольника $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$. Следовательно, сумма расстояний от произвольной точки до сторон многоугольника есть величина постоянная.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Какой многоугольник получится, если последовательно соединить отрезками взятые через одну вершины правильного: а) шестиугольника; б) восьмиугольника; в) восемнадцатиугольника?

2. Какой многоугольник получится, если последовательно соединить отрезками середины сторон правильного: а) шестиугольника; б) восьмиугольника; в) восемнадцатиугольника?

3. Проведите доказательство задачи 1 б)ДЗ: «Если последовательно соединить отрезками взятые через одну вершины правильного восьмиугольника, то получится квадрат».

4. Сторона правильного шестиугольника равна a. Найдите его бóльшую диагональ.

5. Сторона правильного восьмиугольника равна b. Найдите его бóльшую диагональ.

6. Докажите, что в правильном шестиугольнике противолежащие стороны параллельны.

7. Докажите, что диагональ правильного пятиугольника параллельна одной из его сторон.

11.2. Длина окружности (2 ч)

В параграфе выводятся формулы длины окружности, длины дуги окружности, вводится новая единица измерения углов (радиан) и определяется её соотношение с градусной мерой. Авторская концепция обоснования формулы длины окружности потребовала введения пункта «Формулы удвоения». Пункт «Число π» следует рассмотреть в ознакомительном порядке. В параграфе учащиеся знакомятся с новой для них мерой углов, называемой *радианной*. При этом выводятся формулы для выражения радианной меры угла через его градусную меру, и наоборот.

Следует заметить, что радианная мера углов не входит в содержание, определяемое «Примерными программами основного общего образования», однако рассмотреть её на уроке полезно. В формулировках многих задач не только этого учебника, но и других учебников или сборников задач эта мера используется.

При изучении § 11.2 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— выводить формулы перехода от градусной меры угла к радианной и обратно;

— формулировать и объяснять формулы удвоения;

— объяснять формулы длины окружности, опираясь на наглядные представления;

— вычислять длину окружности, длину дуги окружности;

— объяснять природу числа π;

— применять при решении задач на вычисление и доказательство формулы длины окружности и длины дуги окружности.

Учащиеся получат возможность научиться выводить формулы перехода от градусной меры угла к радианной и обратно; применять при решении задач на вычисление и доказательство: формулы перехода от градусной меры угла к радианной и обратно.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

1 Материал пункта «Формулы удвоения» носит вспомогательный характер и его основная цель — обосновать формулы длины окружности и её дуги, рассмотреть его целесообразно в виде лекции. Следует обратить внимание учащихся на полученные формулы удвоения для вписанных и описанных многоугольников, так как они будут использоваться в пункте «Число π» для вычисления длины единичной полуокружности. После вывода формулы длины окружности необходимо сконцентрировать внимание учащихся на двоякой интерпретации числа π, как длины единичной полуокружности и как отношения длины окружности к её диаметру.

(2) В основе вывода формулы длины дуги окружности лежит известный факт, что градусная мера всей окружности равна 360°. Предложив учащимся составить пропорцию ($180° - \pi R$; $n° - l$), получим формулу для вычисления длины дуги. На закрепление формул длины окружности и длины дуги окружности использовать № 4ДЗ.

(3) В основе вывода формул для перевода градусной меры угла в радианную и обратно лежит тот факт, что развёрнутому углу соответствует половина окружности. Поэтому, предложив учащимся составить пропорцию ($180° - \pi$ радиан; $n° - \alpha$ радиан), вместе с ними получим формулу для перевода градусной меры угла в радианную и наоборот. На закрепление этих формул предложить учащимся заполнить таблицу 9 и выполнить № 182—183Т как обобщение знаний учащихся о числовых значениях тригонометрических функций углов.

Таблица 9

Градусная мера угла	30°	45°		90°			150°		240°
Радианная мера угла			$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$		π	

(4) Введена новая мера измерения углов, теперь следует определить единицу этой меры. За единицу таковой принимается центральный угол, соответствующий дуге, длина которой равна длине радиуса данной окружности. Этот угол называется радианом. При измерении угла в радианах название единицы измерения или его обозначения не существует, а угол выражается в долях числа π.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — пункты: формулы удвоения, число π, длина окружности и её дуги; № 4ДЗ;

дома — повторить пункт: центральный угол в окружности (§ 5.2), № 1—3В, № 1371—1374.

На втором уроке: в классе — пункты: радианная мера угла, связь между градусной и радианной мерами углов; дома — № 4—6В, № 1375—1378.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Объясните, что такое число π.
2. Объясните вывод формулы длины окружности.
3. Объясните вывод формулы длины дуги окружности.
4. Объясните, что такое радианная мера угла.
5. Выведите формулу для перевода градусной меры угла в радианную.
6. Выведите формулу для перевода радианной меры угла в градусную.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

1372, 1376 и 1377 .

1374. Пусть хорды $BC = \sqrt{2}$ и $AC = \sqrt{3}$. Соединим концы хорд с центром (точка O) окружности. Рассмотрим $\triangle BOC$: $BO = OC = 1$, как радиусы единичной окружности, $BC = \sqrt{2}$. Значит, по обратной теореме Пифагора $\triangle BOC$ — прямоугольный, $\angle BOC$ — прямой. Рассмотрим $\triangle AOC$: $AO = OC = 1$, как радиусы единичной окружности, $AC = \sqrt{3}$. По теореме косинусов найдём $\angle AOC = 120°$. Дуга $BC = \frac{\pi}{2}$; дуга $AC = \frac{2\pi}{3}$. Отношение дуг равно $\frac{3}{4}$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Даны две концентрические окружности, длина одной из них равна 33π см, а другой 27π см. Найдите ширину кольца.

2. Найдите длину окружности, описанной около трапеции, стороны которой равны a см, a см, a см и $2a$ см.

3. Дуги A_1B_1 и A_2B_2 равной длины l принадлежат разным окружностям с радиусами R_1 и R_2. Найдите отношение градусных мер центральных углов, соответствующих этим дугам.

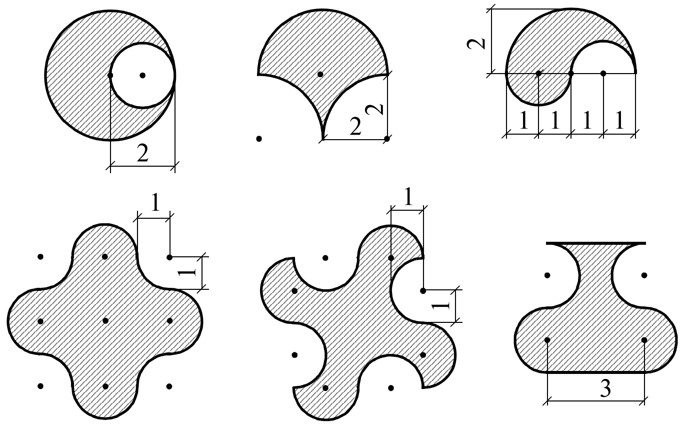


Рис. 388

4. Найдите длину границы каждой из заштрихованных фигур, используя данные рисунка 388.

11.3. Длина окружности (продолжение) (1 ч)

Поскольку материал данной главы не является программным, чтобы не нарушать авторский подход к изложению курса геометрии, его можно изложить в форме рассказа учителя. Опрос учащихся по данной теме не проводится. К параграфу задачи не рекомендованы, и для домашнего задания использовать либо не решённые задачи к предыдущим параграфам, либо — из их дополнительных задач.

11.4. Площадь круга и его частей (2 ч)

Параграф содержит программный материал: вывод формул площади круга, площади сектора и дополнительный материал: вывод формулы площади сегмента. При выводе этих формул, как и при выводе формулы длины окружности, неявно используется предельный переход. Как и в случае многоугольника, в ходе изучения темы у учащихся формируется представление о площади круга и его частей, как о некоторой величине, характеризующей фигуру.

Как и в случае многоугольников, основное внимание уделяется решению задач, что позволяет расширить представления учащихся об аналитических методах решения геометрических задач. При этом формулы площадей круга, сектора и сегмента применяются не только при решении задач на вычисление, но и при решении задач на доказательство и построение.

Вычисление площадей круга и его частей является составной частью задач на тела вращения в курсе стереометрии. Поэтому основное внимание уделяется формированию практических навыков вычисления площадей круга и его частей.

В электронном приложении к этому пункту весь учебный материал освещается полностью, и его использование будет способствовать усвоению этой темы.

При изучении § 11.4 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— выводить формулы площади круга, кругового сектора;

— вычислять площади круга, кругового сектора;

— применять при решении задач на вычисление и доказательство формулы площадей круга, кругового сектора.

Учащиеся получат возможность научиться выводить формулы площади кругового сегмента; вычислять площадь кругового сектора; применять при решении задач на вычисления и доказательство: формулу площади кругового круга, сектора и сегмента.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

1 При обосновании формулы вычисления площади круга следует обратить внимание на последовательность логических шагов.

1) Строится правильный n-угольник, описанный около данной окружности, с периметром P_n и площадью $S_n = \frac{1}{2} P_n R$. При возрастании n, как известно из предыдущего, P_n убывает и стремится к длине вписанной окружности. А значит, S_n стремится к πR^2.

2) Строится правильный n-угольник, вписанный в данную окружность, с периметром P_n и площадью $S_n = \frac{1}{2} P_n R$. При возрастании n, как известно из предыдущего, P_n возрастает и стремится к длине описанной окружности.

3) Делается вывод о вычислении площади круга по формуле $S = \pi R^2$.

Для закрепления алгоритма решить № 1379.

2 При выводе формулы сектора воспользуемся известным фактом, что градусная мера всей окружности равна 360°, поэтому площадь сектора в 1° равна $\frac{1}{360}\pi R^2$. Затем делается вывод о площади сектора, соответствующего центральному углу α.

3 Так как задачи, рекомендованные к данному параграфу, достаточно сложны, поэтому можно воспользоваться дополнительными задачами и № 186, 187, 189, 190, 198, 200Т (частично заменить ими задачи из учебника, если уровень геометрической подготовки класса низкий).

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — параграф; № 1379, 1384; дома — 1—3 ДЗ, № 1380—1382 и 1386.

На втором уроке: в классе — № 1385, 1387, 1390, 1391; дома — № 1388, 1389 и 1392.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Выведите формулу площади круга.
2. Выведите формулу площади сектора.
3. Выведите формулу площади сегмента.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

№ 1379—1386, 1388 и 1389.

1380. Для круга $l = 2\pi R = 1$, $R = \frac{1}{2\pi}$; $S = \pi R^2 = \frac{1}{4\pi}$. Для квадрата $P_4 = 1$, $a_4 = \frac{1}{4}$, $S_4 = \frac{1}{16}$. $\frac{1}{\pi} > \frac{1}{4}$, $S > S_4$.

1381. Для круга $S = \pi R^2 = 9\pi$. Площадь правильного шестиугольника состоит из площади шести равносторонних треугольников. $S_3 = \frac{3}{2}\pi = \frac{1}{2} a_3^2 \sin 60°$, $a_3 = \sqrt{2\pi\sqrt{3}}$.

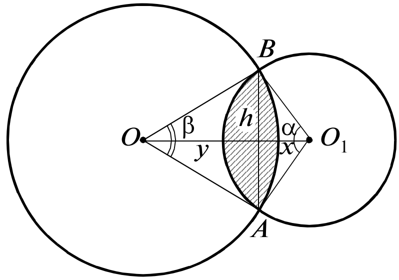


Рис. 389

1383. Используя данные на рисунке 389 обозначения, получим соотношение $x + y = 2$ (по условию); $3 - (2 - x)^2 = h^2$; $1 - x^2 = h^2$ (по теореме Пифагора). Отсюда $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$, $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Значит, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$.

$Q_\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $Q_\beta = \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $S = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$.

1384. Возможное расположение данных хорд по разные стороны от центра окружности и с одной стороны от центра. Площадь сегмента, ограниченного хордой ED, равной $\sqrt{2}$, $Q_\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$. Площадь сегмента, ограниченного хордой AC, равной $\sqrt{3}$, $Q_\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. В первом случае площадь большей части равна: $S = \pi - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3} < 2{,}3$. Во втором случае площадь большей части равна: $S = \pi - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 7\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} > 2{,}3$ и площадь, ограниченная хордами AC и FD, равна: $S_{AFDC} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$. Осталось сравнить Q_α и S_{AFDC}.

1385. На рисунке 390 $\triangle O_1O_2B$ — равносторонний, $\angle O_2O_1B = 60°$. Аналогично, $\triangle O_1O_4A$ — равносторон-

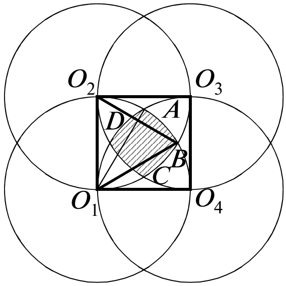


Рис. 390

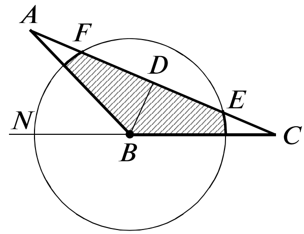


Рис. 391

ний, $\angle O_4O_1A = 60°$. Значит, $\angle O_2O_1B = \angle AO_1B = \angle BO_1O_4 = 30°$. Аналогично доказывается, что каждый из углов DO_2C, DO_3C и AO_4D равен 30°. Из рисунка видно, что $S_{\text{искомая}} = S_{\text{квадрата}\, ABCD} + 4Q_{30°}$. Площадь сегмента, ограниченного дугой в 30°, $Q_{30°} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}$. Сторону квадрата $ABCD$ найдём из $\triangle AO_1B$, в котором $\angle O_1AB = 75°$. Обозначим сторону квадрата $ABCD$ через x, тогда $\frac{1}{2}x = 1 \cdot \cos 75°$; $x = 2 \cdot \cos 75° \cdot \cos 75° = \cos(45° + 30°) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$; отсюда $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1)$; $S_{\text{квадрата}\, ABCD} = 2 - \sqrt{3}$; $S_{\text{искомая}} = 2 - \sqrt{3} + 4\left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + 1 - \sqrt{3}$.

1386. Продолжим сторону BC за точку B до пересечения с окружностью в точке N (рис. 391). $\angle ABN = 40°$, как смежный с $\angle ABC = 140°$. Рассмотрим $\triangle BDE$, где $\angle BDE = 90°$, так как BD — высота, причём $BD = 1$, $BE = \sqrt{2}$, следовательно, $\triangle BDE$ — прямоугольный равнобедренный. Отсюда $\angle BED = 45°$, а поскольку $\triangle FBE$ — равнобедренный, значит, $\angle FBE = 90°$. Площадь общей части круга и треугольника равна площади полуокружности минус площадь сектора в 40° и минус площадь сегмента, ограниченного хордой FE. Следовательно, $S_{40^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9}\pi(\sqrt{2})^2 = \frac{2}{9}\pi$,

$$Q_{90^\circ} = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{\pi}{2} - 1,\ S_{180^\circ} = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2})^2 = \pi.$$

$$S_{\text{искомая}} = 1 + \frac{5}{18}\pi.$$

1387. При повороте точки A вокруг точки M образуется окружность радиуса AM, аналогично точка B описывает окружность радиуса BM. Следовательно, отрезок AB заметает кольцо, образованное окружностями радиусов AM и BM. Продолжим отрезок AB до пересечения с прямой l в точке C. Так как $\triangle AMC$ и $\triangle BMC$ — прямоугольные, то по теореме Пифагора: $AM^2 = AC^2 + MC^2$; $BM^2 = BC^2 + MC^2$; $S_{\text{кольца}} = \pi BM^2 - \pi AM^2 = \pi(BC^2 + MC^2 - AC^2 - MC^2) = \pi(BC^2 - AC^2)$. Таким образом, ясно, что площадь, заметаемая отрезком AB, не зависит от расположения точки M на прямой l.

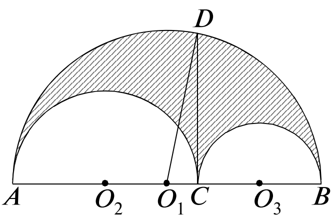
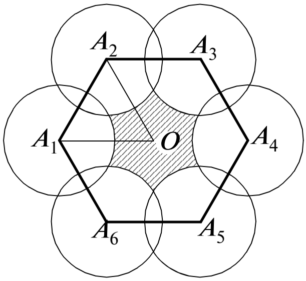


Рис. 392

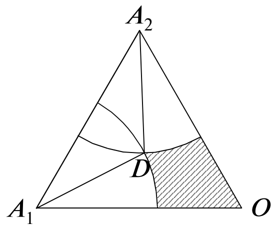
1388. Введём обозначения: $AB = 2z$; $AC = 2y$; $CB = 2x$ (рис. 392). При этом $2z = 2y + 2x$. $O_1C = z - 2x = y - x$. Из прямоугольного $\triangle O_1CD$: $CD^2 = z^2 - (y - x)^2 = z^2 - y^2 - x^2 + 2xy$, с другой стороны, из прямоугольного $\triangle ADC$: $CD^2 = 2x \cdot 2y$. Отсюда $CD^2 = z^2 - y^2 - x^2 + \frac{1}{2}CD^2$. $\frac{1}{2}CD^2 = z^2 - y^2 - x^2$.

$$S_{\text{арбелоса}} = \frac{1}{2}\pi(z^2 - y^2 - x^2) = \frac{1}{2}\pi\frac{1}{2}CD^2.$$

1389. Рассмотрим $\triangle A_2OA_1$ (рис. 393, *б*), вырезанный из рисунка 393, *а*. Окружности радиуса $\sqrt{2}$ пересекаются в точке D, $\triangle A_2DA_1$ — равнобедренный. $A_2D = DA_1$ радиусы равных окружностей, а так как $A_2A_1 = 2$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, $\triangle A_2DA_1$ — пря-



а)



б)

Рис. 393

моугольный. Отсюда $\angle A_2DA_1 = 45°$, а $\angle DA_1O = 15°$. Часть площади $\triangle A_2OA_1$, расположенная вне кругов радиуса $\sqrt{2}$, равна площади $\triangle A_2OA_1$ минус площадь $\triangle A_2DA_1$ и минус площадь двух секторов 15°.

$$S_{\triangle A_2OA_1} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 60° = \sqrt{3},$$

$S_{\triangle A_2DA_1} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1$, $S_{15°} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{12}(\sqrt{2})^2 = \frac{\pi}{12} \cdot S_{\text{искомая}} = \sqrt{3} - 1 - 2 \cdot \frac{\pi}{12}$. Площадь, заштрихованная на рисунке 393, *а*, равна $6\left(\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{6}\right) = 6\sqrt{3} - 6 - \pi$.

1390. $\angle MOL = 90°$. Пусть луч ON образует с лучом OL угол, равный α (рис. 394). С центром в точке O проведём окружность радиуса 1. Она пересечёт луч OL в точке A. Из точки A к лучу OL восставим перпендикуляр и точку его пересечения с лучом ON обозначим B. $\triangle BOA$ — прямоугольный, поэтому $AB = OA \cdot \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha$. $S_{\triangle BOA} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg}\alpha$, $S_\alpha = \alpha$. Так как AB по построению касательная, следовательно, $S_{\triangle BOA} > S_\alpha$, отсюда $\operatorname{tg}\alpha > \alpha$.

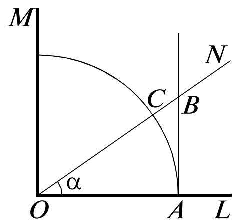


Рис. 394

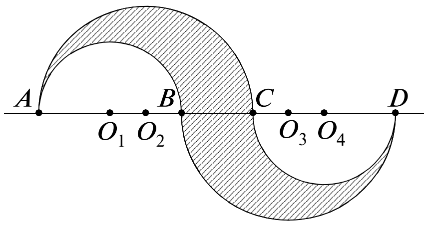


Рис. 395

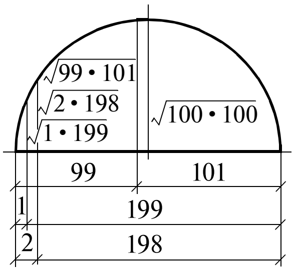


Рис. 396

1391. Можно. $R_n = \frac{1}{n}$, в этом случае при достаточно большом n сумма $\frac{1}{n}$ может превосходить 100, а сумма $\pi \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2$ быть меньше 0,01.

1392. Найдём радиусы и площади построенных полуокружностей (рис. 395): $AO_1 = x$; $AO_2 = x + \frac{1}{2}b$; $DO_3 = \frac{1}{2}a - x$; $DO_4 = \frac{1}{2}(a - b) - x$; $S_{O_1} = \frac{1}{2}\pi x^2$; $S_{O_2} = \frac{1}{2}\pi\left(x + \frac{1}{2}b\right)^2$; $S_{O_3} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}a - x\right)^2$; $S_{O_4} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}(a - b) - x\right)^2$. Отсюда $S_{\text{искомая}} = \frac{1}{4}\pi ab$.

1393. Решение следует из рисунка 396. Одна ступенчатая фигура вписана в четверть окружности, другая описана около этой же четверти окружности. Радиус окружности равен 100, а его площадь равна 10 000π. Площадь четверти круга равна 2500π. Площадь вписанной (описанной) фигуры состоит из 99 (100) прямоугольников, одна сторона которых у всех равна 1, а другая есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые её основание делит диаметр окружности: $S_{\text{вписанная}} = 1 \cdot (\sqrt{1 \cdot 199} + \sqrt{2 \cdot 198} + ... + \sqrt{99 \cdot 101}) < 2500\pi$. $S_{\text{описанная}} = 1 \cdot (\sqrt{1 \cdot 199} + \sqrt{2 \cdot 198} + ... + \sqrt{99 \cdot 101} + \sqrt{100 \cdot 100}) > 2500\pi$. Отсюда: $2500\pi - 100 < \sqrt{1 \cdot 199} + \sqrt{2 \cdot 198} + ... + \sqrt{99 \cdot 101} < 2500\pi$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Даны две концентрические окружности, длина одной из них равна 33π см, а другой 27π см. Найдите площадь кольца.

2. Дана окружность, описанная около трапеции, стороны которой равны *a* см, *a* см, *a* см и 2*a* см. Найдите площадь круга.

3. Найдите площадь каждой из заштрихованных фигур (см. рис. 440).

Контрольная работа № 9

Вариант 1

1. На отрезке AB, равном 8, отмечена точка C и на отрезках AB, AC и BC, как на диаметрах, построены полуокружности с одной стороны от AB. Определите длину границы фигуры, заключённой между полуокружностями.

А. 8π. В. 16π.
Б. 24π. Г. 4π.

2. Дуги A_1B_1 и A_2B_2 равной длины принадлежат разным окружностям с радиусами 3 см и 9 см. Найдите отношение градусной меры центрального угла, соответствующего дуге A_1B_1 к градусной мере центрального угла, соответствующего дуге A_2B_2.

А. $\frac{1}{3}$. Б. $\frac{2}{3}$. В. 2. Г. 3.

3. Найдите сторону квадрата, описанного около окружности, если сторона правильного шестиугольника, вписанного в эту окружность, равна 3 см.

Ответ: ____________________

4. По данным рисунка найдите площадь заштрихованной фигуры (KL, LM, MN и KN — дуги окружностей с центрами в вершинах B, C, D и A квадрата $ABCD$) (рис. 397).

Ответ: ____________________

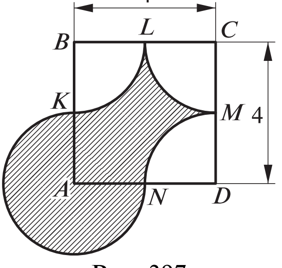


Рис. 397

5. Площадь кольца, образованного окружностью, описанной около правильного восьмиугольника, и окружностью, вписанной в него, равна π. Найдите сторону восьмиугольника.

Вариант 2

1. Из вершины прямого угла ABC внутри его проведены дуга радиуса 6 и на его стороне BC полукруг диаметра 6. Определите длину границы фигуры, заключённой между дугой и полукругом.

А. $9\pi + 6$. В. $3\pi + 6$.
Б. 12π. Г. $6\pi + 6$.

2. Дуга окружности с центром в точке O соответствует центральному углу, равному 120°. Известно, что длина окружности с центром в точке O_1 равна длине этой дуги. Найдите отношение радиуса окружности с центром в точке O_1 к радиусу окружности с центром в точке O.

А. $\frac{1}{3}$. В. 2.

Б. $\frac{2}{3}$. Г. 3.

3. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в окружность, если сторона правильного шестиугольника, описанного около этой окружности, равна 2 см.

Ответ: ______________________

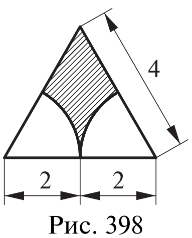


Рис. 398

4. По данным рисунка найдите площадь заштрихованной фигуры, если данный треугольник — равносторонний, а центры проведённых дуг — вершины треугольника (рис. 398).

Ответ: ______________________

5. Площадь кольца, образованного окружностью, описанной около правильного n-угольника, и окружностью, вписанной в него, равна π. Найдите сторону n-угольника.

Глава 12
Координаты и векторы (*15 ч*)

Учебный материал темы «Координаты и векторы» — традиционный для любого курса геометрии. Тема «Декартовы координаты» в определённом смысле дублирует аналогичный материал курса алгебры. При этом содержание ограничено знакомством учащихся с системой декартовых координат и применением метода координат к выводу формулы расстояния между точками и выводу уравнений окружности и прямой. Задание системы координат позволяет определить положение точки на плоскости парой чисел (координатами), что в свою очередь определяет положение фигур (прямых и окружностей) соответствующими уравнениями, которым удовлетворяют координаты точек этих фигур. Метод координат позволяет многие геометрические задачи перевести на язык алгебраических формул и уравнений. Поэтому при его изучении широко используются элементы алгебры: тождественные преобразования, решение линейных и квадратных уравнений и их систем.

Вопросы, связанные с выводом уравнений прямой и окружности, их взаимного расположения и расположения их на плоскости, полностью дублируются в курсе алгебры, поэтому их можно дать в обзорном виде и за основную форму работы на уроке можно принять фронтальную беседу.

Содержание темы « Векторы» в курсе геометрии ограничено знакомством учащихся с понятием вектора, и далее в курсе планиметрии векторный аппарат не используется. Понятие «вектор» вводится на основе естественного и наглядного представления о направленном отрезке. При этом основное внимание следует уделить формированию у учащихся умений выполнять действия над векторами в координатных и геометрических формах. Кроме того, изучение векторов должно удовлетворить потребности курса физики. Основной целью изучения векторов в данном курсе является знакомство учащихся с одним из эффективных методов геометрии — векторным методом решения задач.

Задачный материал в основном направлен на непосредственное закрепление введённых понятий, формул, уравнений. Многие из этих задач решаются чисто аналитически, однако полезно проиллюстрировать их решения на рисунке.

В процессе изучения данной главы полезно уделить внимание использованию электронного приложения.

В рабочей тетради к теме «Координаты и векторы» дан дополнительный теоретический материал, значительно расширяющий содержание темы, определяемое «Примерными программами основного общего образования». Кроме того, в тетради дано избыточное число задач. Методику использования рабочей тетради определяет учитель.

При изучении главы 12 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— изображать на чертежах и рисунках систему координат, строить точки по координатам, определять знаки координат конкретных точек;

— изображать на чертежах и рисунках векторы, сумму и разность двух векторов, вектор, равный произведению заданного вектора на число, заданных геометрически;

— оперировать с векторами: находить сумму и разность двух векторов, заданных геометрически, находить вектор, равный произведению заданного вектора на число;

— выводить формулы длины отрезка и координат середины отрезка;

— составлять уравнения окружности и прямой;

— определять координаты вектора по координатам его начала и конца;

— находить для векторов, заданных координатами: длину вектора, координаты суммы и разности двух и более векторов, координаты произведения вектора на число, применяя при необходимости сочетательный, переместительный и распределительный законы;

— применять при решении задач на вычисление и доказательство формулы для вычисления длин отрезков.

Учащиеся получат возможность научиться вычислять скалярное произведение векторов, находить угол между векторами; устанавливать взаимное расположение прямых; иллюстрировать и описывать положение окружностей и прямых относительно осей координат по их уравнениям; применять при решении задач на вычисление и доказательство координатный и векторный методы.

12.1. Декартовы координаты на плоскости (1 ч)

Содержание темы «Декартовы координаты на плоскости» в учебнике ограничено знакомством учащихся с системой декартовых координат и применением метода координат к выводу формулы расстояния между точками. Рассматриваемая в параграфе формула расстояния между точками служит опорой для вывода уравнений окружности и прямой, в дальнейшем она используется при изучении темы «Векторы на плоскости».

При изучении § 12.1 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— изображать на чертежах и рисунках систему координат, строить точки по координатам, определять знаки координат конкретных точек;

— выводить формулы длины отрезка и координат середины отрезка;

— применять при решении задач на вычисление и доказательство формулы для вычисления длин отрезков.

Учащиеся получат возможность применять при решении задач на вычисление и доказательство координатный метод.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

(1) Терминология, связанная с введением на плоскости системы декартовых координат, в основном знакома учащимся. Представляется целесообразным изложение материала провести таким образом, чтобы теоретические фрагменты текста являлись обобщением выполненных упражнений. При выполнении № 1394 напомнить учащимся понятия осей и начала координат, положительных и отрицательных полуосей, а № 1394 дополнить в о п р о с а м и.

1. Какие знаки у координат точки, если она принадлежит первой (второй, третьей, четвёртой) четверти?

2. Чему равны абсциссы (ординаты) точек, лежащих на оси ординат (абсцисс)?

3. Чему равны координаты начала координат?

Затем решить № 1396 а), б) и сформулировать вывод: «в пределах одной четверти знаки обеих координат сохраняются».

(2) Так как при выводе формулы расстояния между точками используется теорема Пифагора, то его лучше начать с решения следующей з а д а ч и: «Докажите, что расстояние между точками (x_1; 0) и (x_2; 0) оси x при любых x_1 и x_2 определяется по формуле $d = |x_2 - x_1|$». Используя результат её решения: $d = |x_2 - x_1|$ для точек (x_1; 0) и (x_2; 0) оси x; $d = |y_2 - y_1|$ для точек (0; y_1) и (0; y_2) оси y, приходим к выводу, что «расстояние между точками на прямых, параллельных осям координат, вычисляется по выше приведённым формулам» (см. рис. 475У). Для закрепления этой формулы — № 1395.

(3) Практически во всех учебниках геометрии выводятся формулы координат середины отрезка (см. № 1398, а). Так как эти формулы входят в содержание геометрии, определяемое «Примерными программами основного общего образования», следует решить эту задачу на уроке, и результаты решения учащиеся должны запомнить и уметь выводить.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На уроке: в классе — параграф; № 1394, 1395 (в, г), 1396 (а, б); дома — № 1—5В, № 1395 (а, б), 1396 (в), 1397 и 1398 (кроме пункта а).

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Выведите формулу расстояния между точками.
2. Выведите формулы координат середины отрезка.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

Все задачи параграфа отмечены знаком . Эти задачи достаточно просты, использование электронного приложения способствует закреплению материала.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Из точек $A(-2; -4)$ и $B(5; -4)$ опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на ось x. Определите вид четырёхугольника AA_1BB_1.

2. Отметьте точки $A(0; 2)$, $B(5; 0)$, $C(0; -2)$ и $D(-5; 0)$. Определите вид четырёхугольника $ABCD$.

3. На окружности с центром в точке $C(1; -6)$ отмечена точка $A(10; 6)$. Найдите радиус окружности.

М **4.** Даны точки $A(0; -3)$, $B(2; 3)$ и $C(6; -1)$. а) Докажите, что $\triangle ABC$ — равнобедренный с основанием BC. б) Определите длину медианы BM.

5. Дан $\triangle ABC$ с вершинами в точках $A(7; -4)$, $B(-4; 3)$ и $C(5; 0)$. Определите координаты концов средней линии треугольника, параллельной стороне AB, и её длину.

6. В окружности с центром в точке C проведён диаметр AB. Определите: а) координаты точки C, если $A(-6; -1)$, $B(1; 4)$; б) координаты точки A, если $C(0; 3)$, $B(3; 0)$.

12.2. Уравнение линии (2 ч)

В параграфе выводятся уравнение окружности и уравнение прямой. Вопросы, связанные с их выводом и окружности, их взаимного расположения и расположения на плоскости, полностью дублируются в курсе алгебры, поэтому их можно дать в обзорном виде.

В результате изучения § 12.2 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— составлять уравнения окружности и прямой;

— применять при решении задач на вычисление и доказательство формулы для вычисления длин отрезков.

Учащиеся получат возможность: устанавливать параллельность прямых; иллюстрировать и описывать положение окружностей и прямых относительно осей координат по их уравнениям; применять при решении задач на вычисление и доказательство координатный метод.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

1 Полезно ещё раз обратить внимание учащихся, что найти ГМТ — это значит доказать два взаимно обратных утверждения: первое — любая точка фигуры обладает указанным свойством и второе — любая точка, обладающая этим свойством, является точкой фигуры.

Из курса алгебры учащимся известны уравнения с двумя переменными x и y. При этом все точки, координаты которых x и y удовлетворяют данному уравнению, составляют на плоскости некоторую фигуру. Таким образом, любая точка полученной фигуры имеет координаты, удовлетворяющие данному уравнению, и обратно: любая точка, координаты которой удовлетворяют данному уравнению, является точкой этой фигуры.

После вывода уравнения окружности полезно вместе с учащимися записать уравнение окружности с центром в начале координат и проиллюстрировать его № 1399. Затем провести и с с л е д о в а н и е взаимного расположения двух окружностей: «При каком условии окружности с радиусами R_1 и R_2 и расстоянием между центрами m пересекаются, не пересекаются и касаются?» и сделать вывод: «если одно из чисел R_1, R_2 и m больше суммы двух других, то окружности не пересекаются; если одно из чисел R_1, R_2 и m равно сумме двух других, то окружности касаются; если каждое из чисел R_1, R_2 и m меньше суммы двух других, то окружности пересекаются в двух точках». Вывод использовать при решении № 1401.

(2) Кроме предложенного способа вывода уравнения прямой, можно на основании решения № 1403 продемонстрировать ещё один способ получения уравнения прямой, который практически во всех учебниках и используется.

Затем провести и с с л е д о в а н и е расположения относительно системы координат прямой, двух прямых; прямой и окружности.

1. Как расположена прямая, если в её уравнении коэффициент $a = 0$ ($b = 0$, $c = 0$)?

2. Как найти координаты точки пересечения двух прямых?

3. При каком условии прямые параллельны?

4. При каком условии прямые перпендикулярны (№ 1405)?

5. При каком условии окружность радиуса R и прямая, расстояние от которой до центра окружности равно m, не пересекаются, пересекаются в двух точках, касаются?

В ы в о д: «если $R < m$, то окружность и прямая не пересекаются; если $R_1 = m$, то окружность и прямая касаются; если $R > m$, то окружность и прямая пересекаются в двух точках». Используя его, решить № 1401.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — параграф № 399 (в), 1400 (в), 1403 и 1405; дома — 1—4 ДЗ; 1399 (а, б), 1400 (а, б) и 1406.

На втором уроке: в классе — № 1401 (б, в), 1402 (г, д), 1404 (в, г) и 1407 б); дома — № 1401 (а, д), 1402 (а, б, в), 1404 (а, б, в) и 1407 (а, б).

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Объясните, что такое уравнение фигуры в декартовых координатах.
2. Выведите уравнение окружности.
3. Докажите, что $ax + by + c = 0$ является уравнением прямой в декартовых координатах.
4. Объясните, что такое коэффициент прямой и его геометрический смысл.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

№ 1399, 1400, 1401, 1402 и 1407 .

1401. Поскольку во всех заданиях уравнения задают окружности, то наибольшее и наименьшее расстояния между их точками находятся на линии центров. Обозначим расстояние между центрами окружностей через l.

а) $x^2 + y^2 = 5$, $O_1(0; 0)$, $R_1 = \sqrt{5}$ и $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 1$, $O_2(5; 1)$, $R_2 = 1$. $l = \sqrt{26}$, окружности не пересекаются и лежат одна вне другой; min: $l - R_1 - R_2 = \sqrt{26} - 1 - \sqrt{5}$; max: $l + R_1 + R_2 = \sqrt{26} + 1 + \sqrt{5}$; б) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, $O_1(1; 0)$, $R_1 = 1$ и $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{410}{4}$, $O_2\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $R_2 = \frac{\sqrt{410}}{2}$. $l = \frac{1}{\sqrt{2}}$, окружности не пересекаются и первая лежит внутри второй; min: $R_2 - R_1 - l = \frac{\sqrt{410}}{2} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$; max: $R_2 + R_1 + l = \frac{\sqrt{410}}{2} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. в) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$, $O_1(1; 0)$, $R_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ и $(x + 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$,

$O_2\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right)$, $R_2 = \frac{3}{2}$. $l = R_2 = \frac{3}{2}$, окружности пересекаются, и центр первой лежит на второй окружности; min: 0; max: $2R_2 + R_1 = 3 + \sqrt{\frac{3}{2}}$. г) Одна точка $O_1(1; -2)$, и $\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{30}{4}$, $O_2\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right)$, $R_2 = \frac{\sqrt{30}}{2}$. $l = \frac{\sqrt{10}}{2}$, точка $O_1(1; -2)$ лежит внутри окружности; min: $R_2 - l = \frac{\sqrt{30}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}$; max: $R_2 + l = \frac{\sqrt{30}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2}$.

1402. Преобразуем каждое из данных уравнений:

а) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$ задаёт точку (2; 3).

б) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$ — такой кривой не существует. в) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{31}{2}$ — окружность с центром $O\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ и радиусом $\frac{\sqrt{31}}{2}$.

г) $x^2 + (y - 1)^2 = 5$ — окружность с центром $Q(0; 1)$ и радиусом $\sqrt{5}$, однако по условию рассматривается не вся окружность, а только верхний полукруг.

д) $(x^2 + y^2)^2 - 5(x^2 + y^2) + 4 = 0$, отсюда две концентрические окружности с центром $O(0; 0)$: $x^2 + y^2 = 4$ радиуса 2, и $x^2 + y^2 = 1$ радиуса 1.

1403. Пусть точка $C(x; y)$ принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AB. Тогда $BC^2 = AC^2$, $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = (x - 1)^2 + (y + 4)^2$. Отсюда уравнение серединного перпендикуляра $3x - 7y - 2 = 0$.

1404. Пусть точка $M(x; y)$ принадлежит искомому геометрическому месту точек. При этом $AM^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$; $BM^2 = (x - 3)^2 + y^2$; $AB^2 = 8$. В результате подстановки и преобразований: а) $AM^2 + BM^2 = 2AB^2$; $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 6$ — окружность. б) $AM^2 - BM^2 = AB^2$; $x - y - 3 = 0$ — прямая. в) $AM = 2BM$; $\left(x - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{32}{9}$ — окружность. г) $AM^2 + BM^2 - AM \cdot BM =$

$= AB^2$; $AM^2 + BM^2 - 2AM \cdot BM \cdot \frac{1}{2} = AB^2$; $AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM \cdot BM \times \cos \angle AMB$ — дуга окружности радиуса $2\sqrt{\frac{2}{3}}$, вмещающая в себя угол в 60°.

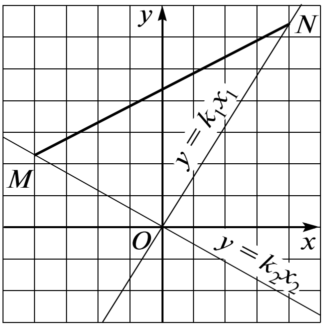


Рис. 399

1405. Пусть прямые задаются уравнениями $y_1 = k_1x_1$ и $y_2 = k_2x_2$ (рис. 399). Тогда вершины $\triangle MON$ имеют координаты: $M(x_2; k_2x_2)$, $O(0; 0)$, $N(x_1; k_1x_1)$. Если прямые перпендикулярны, то по теореме Пифагора $NM^2 = OM^2 + ON^2$, $(x_1 - x_2)^2 + (k_1x_1 - k_2x_2)^2 = x_1^2 + (k_1x_1)^2 + x_2^2 + (k_2x_2)^2$. В результате преобразований: $-2x_1x_2 - 2k_1k_2x_1x_2 = 0$, $k_1k_2 = -1$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Составьте уравнение окружности, если точки $A(-2; 5)$ и $B(5; -19)$ являются концами её диаметра.

2. Запишите уравнения оси абсцисс и оси ординат.

3. Запишите уравнения прямой, если она пересекает оси координат в точках (0; 4) и (8; 0).

4. Запишите уравнения прямой, которая образует с осью x угол, равный 60°, и проходит через точку (0; –3).

5. Найдите точки пересечения с осями координат прямой, заданной уравнениями: а) $x + y - 7 = 0$; б) $x - y + 7 = 0$; в) $x + y - c = 0$.

6. Чему равно расстояние от начала координат до прямой: а) $x + y - 6 = 0$; б) $x + y + 8 = 0$.

М **7.** Докажите, что окружность $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 25$: а) касается оси y; б) пересекается с осью x; в) не пересекается с прямой $y = -9$.

8. Расстояние от начала координат до прямой m равно 3. Пересекается ли прямая m с окружностью $x^2 + y^2 = 16$?

12.3. Векторы на плоскости (2 ч)

Понятие «вектор» вводится на основе естественного и наглядного представления о направленном отрезке.

При изучении темы основное внимание следует уделить формированию у учащихся умения выполнять действия над векторами в координатной и геометрических формах. Изучение векторов в данном курсе в основном имеет целью познакомить учащихся с одним из эффективных методов геометрии: векторным методом решения задач.

В электронном приложении к этому пункту освещается материал пункта полностью, и его использование будет полезно при изучении этой темы.

При изучении § 12.3 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— изображать на чертежах и рисунках векторы, сумму и разность двух векторов, вектор, равный произведению заданного вектора на число, заданных геометрически;

— оперировать с векторами: находить сумму и разность двух векторов, заданных геометрически, находить вектор, равный произведению заданного вектора на число;

— определять координаты вектора по координатам его начала и конца;

— находить для векторов, заданных координатами: длину вектора, координаты суммы и разности двух и более векторов, координаты вектора $\lambda\vec{a}$ по координатам $\vec{a}$, применяя при необходимости сочетательный, переместительный и распределительный законы;

— применять при решении задач на вычисление и доказательство сумму и разность двух векторов, произведение вектора на число.

Учащиеся получат возможность научиться: устанавливать взаимное расположение прямых; применять при решении задач на вычисление и доказательство векторный метод.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

Объяснение материала удобно организовать в форме беседы через систему упражнений. После выполнения каждого из них или в процессе решения формулируются определения, вводится новая терминология, объясняются правила.

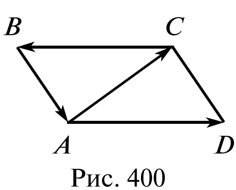


Рис. 400

(1) Формулировка: «Направленный отрезок называется вектором» — опирается на рисунок 481У.

На закрепление определения вектора выполнить следующие у п р а ж н е н и я.

1. Выпишите все векторы, изображённые на рисунке 400.

2. Изобразите векторы $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$.

② Следующие у п р а ж н е н и я позволяют ввести понятия: равных векторов, коллинеарных векторов и модуль вектора.

1. $ABCD$ — квадрат? O — точка пересечения диагоналей. а) Почему в каждой из пар $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{OD}$ векторы равны? б) Модули векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны. Почему векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CO}$ не равны? в) Почему в каждой из пар $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{OC}$ векторы не равны? г) Почему векторы $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{BD}$ не равны?

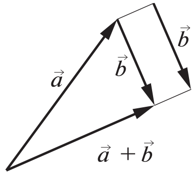
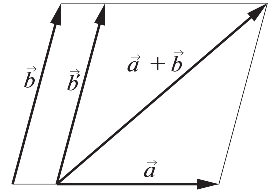
2. В прямоугольнике $ABCD$ стороны AB и AD соответственно равны 8 см и 15 см. Чему равны модули векторов $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$? б) Докажите, что векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ коллинеарны.

3. В равностороннем $\triangle ABC$, сторона которого равна 6 см, проведена средняя линия DF, параллельная стороне BC. а) Докажите, что векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DB}$ равны. б) Чему равны модули векторов $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$? в) Докажите, что векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{FD}$ коллинеарны.

Из определения равных векторов и модуля вектора следует: «Векторы равны тогда и только тогда, когда они одинаково направлены и имеют равные модули».

③ Описание способов построения суммы векторов можно дать в виде а л г о р и т м а по шагам (табл. 10).

Таблица 10

<table>
<tr><td>Правило треугольника</td><td>Правило параллелограмма</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>1) От конца вектора $\vec{a}$ отложить вектор $\vec{b}'$, равный вектору $\vec{b}$;</td><td>1) От конца вектора $\vec{a}$ отложить вектор $\vec{b}'$, равный вектору $\vec{b}$;</td></tr>
</table>

2) провести вектор из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}'$. Полученный вектор и будет суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$	2) на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}'$ как на сторонах построить параллелограмм; 3) провести из общего начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор — диагональ параллелограмма. Полученный вектор и будет суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

При объяснении определения произведения вектора на число следует подчеркнуть, что это произведение — вектор, и ответить на в о п р о с ы.

1. Какой из рисунков 401, *а* или *б* соответствует:

а) правилу параллелограмма сложения векторов;

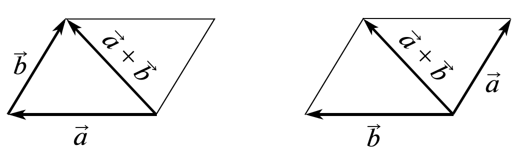
б) правилу треугольника сложения векторов?

2. Вектор $\overrightarrow{NO} = \vec{a}$ (рис. 402). В квадрате $ABCD$ выразите векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DA}$ через вектор $\vec{a}$.

3. Векторы $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{DA} = \vec{b}$ (рис. 403). В параллелограмме $ABCD$ выразите векторы $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{BD}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

(4) Введение координат вектора удобно провести с использованием плаката (рис. 404), сопровождая объяснение в о п р о с а м и.

1. Какая точка является началом вектора $\vec{a}$?



а) *б*)

Рис. 401

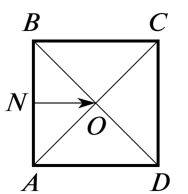


Рис. 402

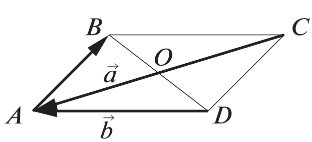


Рис. 403

2. Какая точка является концом вектора $\vec{a}$?

3. Как вычисляются координаты вектора $\vec{a}$?

4. Как вычисляется модуль вектора $\vec{a}$?

5. Какие координаты имеют равные векторы?

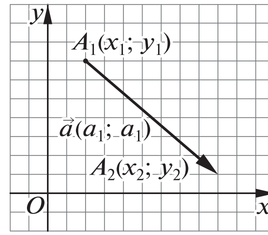


Рис. 404

Для закрепления учебного материала провести устные вычисления и заполнить пропуски таблицы 11.

Таблица 11

A_1		A_2		$\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}$		$\lvert\vec{a}\rvert$
x_1	y_1	x_2	y_2	a_1	a_2	
3	2	8	14			
		6	8		8	10
8	5	–7	13			
1	–9		12	20		
14		17	2		–4	
		12	27	10		26

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — параграф; № 1408 (последнее задание) и 1411; дома — № 1—11В, № 1408, 1409, 1410, 1412 и 1413.

На втором уроке: в классе — № 1414, 1417, 1419 и 1420; дома — № 1415, 1416 и 1418.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Объясните, что такое вектор и как он обозначается.
2. Какие векторы называются одинаково направленными?
3. Объясните, какие векторы называют равными.
4. Какие векторы называются коллинеарными?
5. Объясните, что такое модуль вектора.
6. Объясните, что такое нулевой вектор.
7. Дайте определение произведения вектора на число.

8. Дайте определение суммы векторов.

9. Объясните, что значит сложить два вектора по правилу параллелограмма.

10. Объясните, что значит сложить два вектора по правилу треугольника.

11. Объясните, что такое координаты вектора.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

№ 1408, 1409, 1410, 1414 и 1417 .

1410. Прямая $3x - 2y = 0$ параллельна данной прямой и проходит через начало координат. Точка (2; 3) принадлежит прямой $3x - 2y = 0$. Вектор $\overrightarrow{OB}(2; 3)$ коллинеарен прямым $3x - 2y + 1 = 0$, $3x - 2y = 0$, не является единичным. $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{13}$. Значит, $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ — единичный вектор, коллинеарный прямой $3x - 2y + 1 = 0$.

1411. От произвольной точки плоскости (рис. 405, *а*) отложим вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис. 405, *б*). От точки $A_1(O)$ отложим вектор, равный $\overrightarrow{OA_2}$. Продолжим откладывать векторы, соответственно равные $\overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{OA_4}$, $\overrightarrow{OA_5}$. Полученный пятиугольник — правильный, так как исходный пятиугольник был правильный. Отсюда следует утверждение задачи.

1413. Медианы $\triangle ABC$ пересекаются в точке M (рис. 406). $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

1414. 1) На прямой BM(рис. 407, *а*) отложим вектор $\overrightarrow{B_1M}$, равный $\overrightarrow{MB}$, так что его конец совпадает с точкой M. $\triangle ALB_1 = \triangle CLM$ по первому признаку равенства

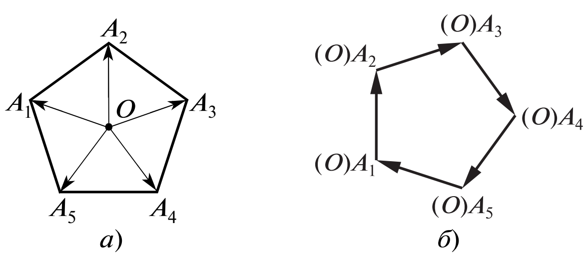


Рис. 405

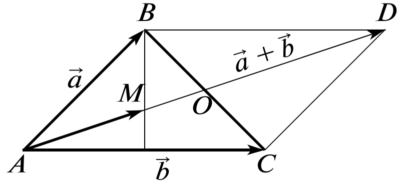


Рис. 406

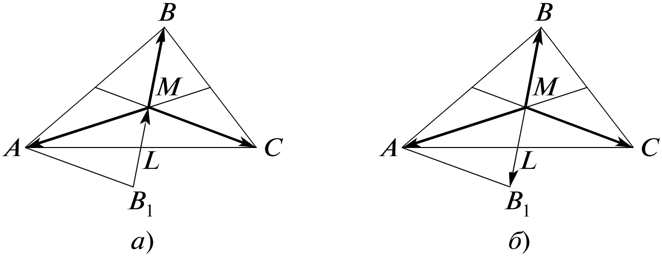


Рис. 407

треугольников. Отсюда $AB_1 = MC$, а значит, $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{MC}$. Из $\triangle AMB_1$ следует $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$. 2) На прямой BM (рис. 407, *б*) от точки M отложим вектор $\overrightarrow{MB_1}$, равный $\overrightarrow{MB}$ по модулю, но противоположно направленный. По условию $\overrightarrow{MB_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}$, т. е. $AMCB_1$ — параллелограмм. AC и MB_1 — его диагонали, значит, $AL = LC$, а следовательно, BL — медиана.

1415. Решение задачи следует из рисунка 408.

$$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{A_1M_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{A_1C_1}) =$$

$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{CC_1}) =$$

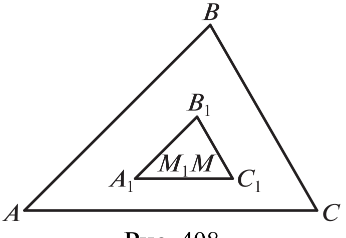


Рис. 408

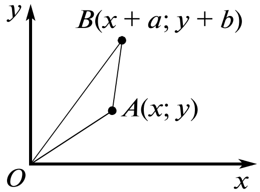


Рис. 409

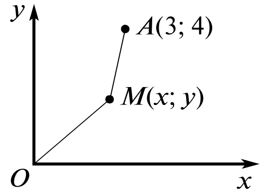


Рис. 410

$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}) = \overrightarrow{AA_1}$;

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1M_1}$. Значит, точки M и M_1 совпадают.

1417. Введём систему координат (рис. 409) и рассмотрим точки $A(x; y)$ и $B(x + a; y + b)$. В $\triangle OAB$: $OB = \sqrt{(x - a)^2 + (y + b)^2}$; $OA = \sqrt{x^2 + y^2}$; $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$. В силу неравенства треугольника:

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y + b)^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1417. Введём систему координат (рис. 410) и рассмотрим точки $A(3; 4)$ и $M(x; y)$. В $\triangle OAB$ $AM = \sqrt{(3 - x)^2 + (4 - y)^2}$; $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$. По условию $OM + AM = 5$. $OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Значит, точка M лежит на отрезке OA.

1418. По условию $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CD}$ (рис. 411). Изменим направление векторов $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{DC}$. В полученное соотношение подставим $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$ и получим $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC}$, отсюда

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}.\ \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}).$$

1419. Построим $\triangle A_1B_1C_1$ так, что точка H будет центром описанной около него окружности (рис. 412).

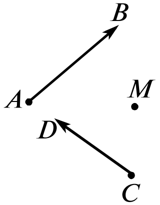


Рис. 411

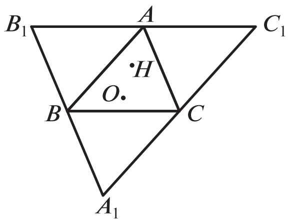


Рис. 412

Тогда точки A, B и C — середины сторон $\triangle ABC$. Стороны $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ параллельны, так как высоты $\triangle ABC$ являются серединными перпендикулярами $\triangle A_1B_1C_1$. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ с коэффициентом подобия 2. Отсюда следует:

$$\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HC_1};\ \overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HA_1};\ \overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HB_1}.$$

$$\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{HO} - \frac{1}{2}\overrightarrow{HC_1};\ \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HO} - \frac{1}{2}\overrightarrow{HA_1};$$

$$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HO} - \frac{1}{2}\overrightarrow{HB_1}.\ \overrightarrow{HC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HB_1} + \overrightarrow{HA_1});$$

$$\overrightarrow{HA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HC_1} + \overrightarrow{HB_1});\ \overrightarrow{HB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HA_1} + \overrightarrow{HC_1}).$$

Отсюда $\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HC_1} + \overrightarrow{HA_1} + \overrightarrow{HB_1}$.

$$\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = 3\overrightarrow{HO} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{HA_1} + \overrightarrow{HB_1} + \overrightarrow{HC_1}) =$$

$$= 3\overrightarrow{HO} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}).$$

$$3\overrightarrow{HO} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB});\ 2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}.$$

1420. Сделать поворот на 90°.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Даны точки $A(1; -3)$ и $B(2; 0)$. Найдите такую точку $C(x; y)$, чтобы векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$ были равны?

2. Найдите координаты начала вектора $(-3; 2)$, если его конец находится в точке $(1; -1)$.

3. Даны векторы $\vec{m}(4; -3)$ и $\vec{n}(-2; 1)$. Найдите координаты и модули векторов $\vec{m} + \vec{n}$; $\vec{m} - \vec{n}$.

12.4. Скалярное произведение векторов (2 ч)

Вводится ещё одна операция над векторами, а именно, скалярное произведение векторов. Определение скалярного произведения векторов, как и определения ранее введённых действий над векторами, даётся в геометрической форме, а его координатная форма вводится позднее.

Определение скалярного произведения векторов и теоремы 12.3 задают метод нахождения угла между векторами. Кроме того, введение скалярного произведения векторов позволяет определять перпендикулярности векторов и скалярный квадрат.

В электронном приложении к этому пункту освещается весь материал пункта полностью. Поскольку материал пункта сложный, использование приложения поможет в работе учителя и будет способствовать усвоению темы.

При изучении § 12.3 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— формулировать и объяснять понятие скалярного произведения векторов;

— формулировать, объяснять и доказывать свойства скалярного произведения векторов;

— находить скалярное произведение векторов; угол между векторами;

— решать задачи на вычисление и доказательство, применяя определение скалярного произведения векторов, свойства скалярного произведения векторов.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

(1) При введении определения скалярного произведения векторов используется понятие «угол между векторами». Во всех известных современных учебниках геометрии это понятие вводится и отрабатывается. Здесь возникает некоторая трудность для понимания, так как два вектора, как правило, расположены на плоскости так, что не имеют общих точек, поэтому полезно обсудить с учащимися этот вопрос. Угол между векторами не зависит от выбора точки, от которой откладываются векторы. Важно при объяснении скалярного произведения векторов обратить внимание учащихся на то, что результатом перемножения двух векторов является число. На закрепление определения — у п р а ж н е н и е по готовому чертежу: «$\triangle ABC$ — равносторонний с высотой BD и со стороной, равной 3. Найдите скалярное произведение векторов: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BD}$» и № 1421 а), б), 1422 (первое задание).

(2) Из определения скалярного произведения векторов в учебнике делаются два вывода об условии их кол-

линеарности и условии их перпендикулярности. Полезно сообщить учащимся ещё два следствия: «скалярное произведение векторов положительно (отрицательно), если угол между векторами острый (тупой)».

M ③ Рассмотрев распределительный закон скалярного произведения векторов, можно вместе с учащимися обсудить переместительный и сочетательный законы и выполнить задание.

1. Докажите, что $(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$.

2. Докажите, что $(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}$.

3. Докажите, что $(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

Далее № 1421 в), 1422, и 1423.

④ Следует заметить, что определение скалярного произведения векторов и теорема 12.3 позволяют находить угол между векторами, на закрепление следующие упражнения.

1. Найдите угол φ между векторами $\vec{a}(1;\ \sqrt{3}\,)$ и $\vec{b}\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. Найдите угол φ между векторами $\vec{a}(2;\ 0)$ и $\vec{b}(-2;\ 2)$.

3. Определите, какие из векторов $\vec{a}(1;\ 3)$, $\vec{b}\left(2;\ -\frac{1}{3}\right)$ и $\vec{c}\left(-\frac{1}{2};\ -3\right)$ перпендикулярны.

⑤ При решении задач № 1425 и 1426 следует обратить внимание учащихся, что координаты вектора, перпендикулярного к данной прямой $ax + by + c = 0$, не зависят от свободного члена c. Другими словами, поскольку все прямые с коэффициентом $k = \frac{a}{b}$ параллельны, то координаты вектора, перпендикулярного данной прямой $(a;\ b)$, а коллинеарного — $(b;\ -a)$.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — параграф; № 1421 (а, б), 1422, 1423 (а), 1424 (а, б, г) и 1425; дома — № 1—5В; № 1421 (в), 1423 (а), 1424 (в, д) и 1426.

На втором уроке: в классе — № 1427, 1428, 1430 (в) и 1431; дома — № 1429 и 1430 (а, б).

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Дайте определение скалярного произведения векторов.
2. Докажите, что $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$.
3. Чему равен угол между коллинеарными векторами?
4. При каком условии векторы перпендикулярны?
5. Запишите и докажите формулу скалярного произведения векторов в декартовой системе координат.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

№ № 1421, 1422, 1424 и 1425.

1425. $\left(\frac{3}{\sqrt{13}}; -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ — единичный вектор, коллинеарный прямой (см. № 1423). Тогда $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ — единичный вектор, перпендикулярный прямой $2x + 3y - 1 = 0$.

1427. Заметим, что при переносе правой части в левую получим в левой части квадрат суммы векторов. Отсюда, в силу того, что скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля, следует данное равенство.

1428. Введём систему координат, при этом $A(0; 0)$, $B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $C(1; 0)$, $M(x; y)$ — произвольная точка вне $\triangle ABC$.

Тогда $\overrightarrow{AB}\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{CM}(x; y)$.

По условию $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 1$, значит, $\frac{1}{2}(x - 1) + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1$; $x - 1 + \sqrt{3}y = 2$. Отсюда $x + \sqrt{3}y - 3 = 0$.

1429. В равенство (рис. 413) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ подставим выражения $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}) + \overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}) = 0$. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CM} + (\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}) = 0$. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$ и $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, так как $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$,

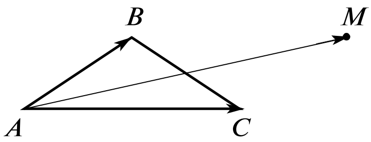


Рис. 413

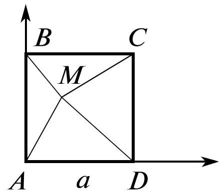


Рис. 414

и значит, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ — тождество, а M — любая точка плоскости.

1430. $\overrightarrow{MA}(-x;\ -y)$; $\overrightarrow{AD}(a;\ 0)$; $\overrightarrow{AC}(a;\ a)$; $|\overrightarrow{AD}| = a$; $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}\,a$ (рис. 414). $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}$. (*) а) В равенство $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ подставим выражения (*) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$. Сгруппируем все члены выражения, содержащие $\overrightarrow{MA}$, и при переносе в левую часть равенства изменим направление векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$. Отсюда $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$, то $\overrightarrow{MA} \cdot 2\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos 45° = a^2$. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{DA} = ax$; $2ax = a^2$; $x = \frac{1}{2}a$. б) В равенство $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$ подставим выражения (*) $2(\overrightarrow{MA})^2 + \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, отсюда $2(\overrightarrow{MA})^2 + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$. Перейдём к координатной записи: $2(x^2 + y^2) + 2(-ax - ay) + a^2 = 0$. После преобразований $\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}a\right)^2 + \left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}a\right)^2 = 0$. в) В равенство $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{AB})^2$ подставим выражения (*) $2(\overrightarrow{MA})^2 + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB})^2$. Перейдём к координатной записи: $2(x^2 + y^2) + 2(-ax - ay) + a^2 = a^2$. После преобразований

$$\left(x - \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}a\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}a\right)^2.$$

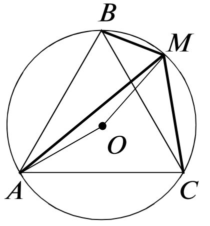


Рис. 415

1431. $(\overrightarrow{MA})^2 + (\overrightarrow{MB})^2 + (\overrightarrow{MC})^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 = 3(\overrightarrow{MO})^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{OB})^2 = 6R^2$ (рис. 415).

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. При каком значении x векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, если: а) $\vec{a}(4;\ 5)$ и $\vec{b}(x;\ -6)$; б) $\vec{a}(x;\ -1)$ и $\vec{b}(3;\ 2)$; в) $\vec{a}(0;\ -3)$ и $\vec{b}(5;\ x)$.

2. Вычислите $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$, если $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$ и угол между векторами равен 60°.

3. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ и $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, если $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 4$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны.

4. Найдите угол, лежащий против основания равнобедренного треугольника, если медианы, проведённые к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.

12.5. Координатный и векторный методы (3 ч)

Требование к уровню усвоения темы формулируют следующим образом: «Выпускник получит возможность овладеть координатным и векторным методами решения задач на вычисление и доказательство». Значит, тема должна быть изложена на уроке, однако как организовать контроль за усвоением данной темы и в каком объёме требовать от учащихся воспроизведения учебного материала, решать учителю. При этом урок лучше организовать в форме лекции. Основная цель такого урока — познакомить учащихся с примерами применения координатного метода. Поэтому в этом пункте не даётся планирование изучения материала.

При изучении § 12.3 учащиеся получат возможность применять при решении задач на вычисление и доказательство координатный и векторный методы.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

1 Материал параграфа является обобщением всей темы «Координаты и векторы», то вся работа организу-

ется через решение задач. При обсуждении векторного метода доказательства теоремы о высотах треугольника предложить учащимся вспомнить, как эта теорема доказывалась раньше; затем поиск нового доказательства провести в форме фронтальной беседы и оценить, какой из известных учащимся методов проще, понятнее, а может быть, и интереснее.

(2) На применение координатного метода, на обучение умению правильно выбирать систему координат № 1432 и 1433.

(3) Задачи параграфа позволяют достаточно глубоко проработать предлагаемые методы.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — пункты: выбор системы координат, задачи на коллинеарность векторов; № 1432 и 1435; дома — повторить вопросы, связанные с теоремой о высотах треугольника (§ 5.4 ***Задача 2***; § 8.1; *теорема 8.1*; § 8.4 *теорема 8.4*); № 1433, 1434, 1436 и 1437.

На втором уроке: в классе — № 1438, 1440, 1443, 1444; дома — № 1441, 1442 и 1445.

На третьем уроке: в классе — № 1446, 1447, 1449; дома — № 1439, 1446 и 1448.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

№ 1432, 1434, 1437, 1439, 1441, 1444 и 1445.

1432. По данным рисунка 416 и по условию составим уравнение: $x^2 + y^2 + (x - 2)^2 + y^2 = 3$, преобразуем его, получим уравнение окружности $(x - 1)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ с центром в точке (1; 0) и радиусом $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

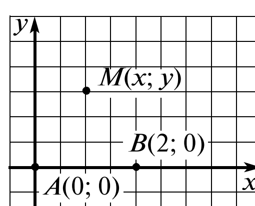


Рис. 416

1434. В соответствии с обозначениями, данными на рисунке 417, по условию задачи составим уравнение:

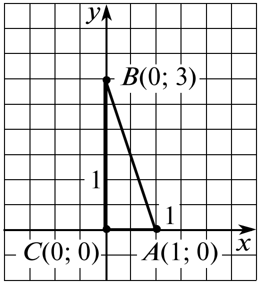


Рис. 417

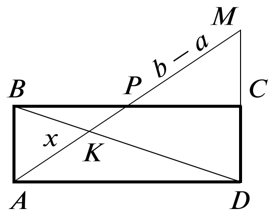


Рис. 418

$(x-1)^2 + y^2 + x^2 + (y-3)^2 = 2(x^2 + y^2)$. После преобразования получим уравнение прямой: $x + 3y - 5 = 0$.

1435. Из подобия $\triangle AKD$ и $\triangle PKB$ (рис. 418): $\dfrac{BK}{KD} = \dfrac{a-x}{x}$. Из подобия $\triangle AKB$ и $\triangle MKD$: $\dfrac{BK}{KD} = \dfrac{x}{b-x}$. Из этих двух соотношений получим $x = \dfrac{ab}{a+b}$.

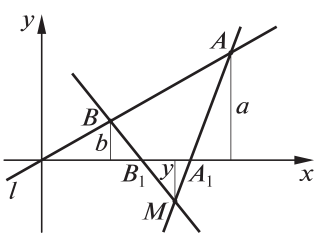


Рис. 419

1436. Примем прямую l за ось x, а точку пересечения прямых AB и l за начало координат (рис. 419). Из чертежа видно, что данные в условии задачи два отношения $\dfrac{MA}{MA_1}$ и $\dfrac{MB}{MB_1}$ могут быть выражены через y, a и b ($b < a$) из соответствующих подобных треугольников. При этом возможны три случая: 1) $y_1 < b$; 2) $b < y_2 < a$; 3) $y_3 \geqslant a$. 1) $\dfrac{MA}{MA_1} = \dfrac{a-y}{y}$; $\dfrac{MB}{MB_1} = \dfrac{b-y}{y}$; $\dfrac{a-y}{y} + \dfrac{b-y}{y} = k$. Отсюда $y = \dfrac{a+b}{k+2}$. 2) $\dfrac{MA}{MA_1} = \dfrac{a-y}{y}$; $\dfrac{MB}{MB_1} = \dfrac{y-b}{y}$; $\dfrac{a-y}{y} + \dfrac{y-b}{y} = k$. Отсюда $y = \dfrac{a-b}{k}$. 3) $\dfrac{MA}{MA_1} = \dfrac{a-y}{y}$; $\dfrac{MB}{MB_1} = \dfrac{y-b}{y}$; $\dfrac{y-a}{y} + \dfrac{y-b}{y} = k$. Отсюда $y = \dfrac{a+b}{2-k}$.

а) $y_1 = y_2 = 1$, т. е. искомое геометрическое место точек — прямая, параллельная прямой l и проходящая через точку B. б) $y_1 = \frac{12}{7}$; $y_2 = \frac{8}{3}$; $y_3 = 12$; но по условию в первом случае $y_1 < b$, значит, искомое ГМТ — две прямые, параллельные прямой l, лежащие по ту же сторону от прямой l, что и точки A и B на расстоянии $\frac{8}{3}$ и 12.

в) $y_1 = \frac{6}{5}$; $y_2 = \frac{4}{3}$; $y_3 = -6$; но по условию в первом случае $y_1 < b$, а в третьем $y_3 \geqslant a$, значит, искомое геометрическое место точек — прямая, параллельная прямой l, лежащая по ту же сторону от прямой l, что и точки A и B, на расстоянии $\frac{4}{3}$.

1437. Косинус угла между прямыми AM и DK равен косинусу угла между векторами $\overrightarrow{AM}\left(\frac{1}{2}a;\ a\right)$ и $\overrightarrow{DK}\left(-a;\ \frac{1}{3}a\right)$. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DK} = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^2 =$

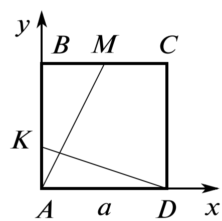


Рис. 420

$= \frac{1}{6}a^2$ (рис. 4120, $|\overrightarrow{AM}| = \frac{\sqrt{10}}{3}a$ и $|\overrightarrow{DK}| = \frac{\sqrt{5}}{2}a \cdot \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

1438. Заметим, что возможны два случая расположения вершин A и B (рис. 421). Рассмотрим один из них, решение второго аналогично. Обозначим сторону треугольника через a. Проекция стороны AB на прямую l — отрезок A_1B_1 (рис. 421, *а*) равна $a \cdot \cos(60° - \alpha)$ с одной стороны и 6 — с другой, т. е. $a \cdot \cos(60° - \alpha) = 6$. Проек-

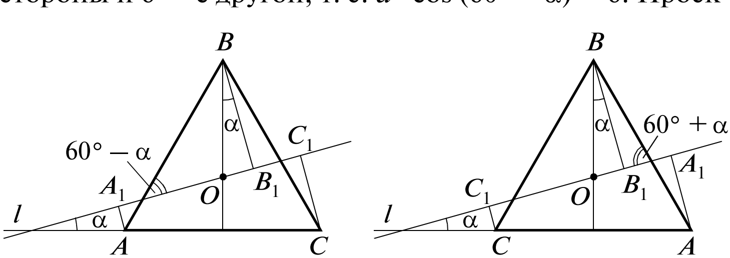


Рис. 421

ция стороны AC на прямую $l - A_1C_1$ равна $a \cdot \cos\alpha$ с одной стороны и $6 + x$ — с другой, т. е. $a \cdot \cos\alpha = 6 + x$. Отрезок BO равен $\frac{\sqrt{3}}{3}a$. Проекция отрезка BO на прямую l — $BO_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}a \cdot \sin\alpha$ с одной стороны и 1 — с другой, т. е. $\frac{\sqrt{3}}{3}a \cdot \sin\alpha = 1$. Из решения полученной системы уравнений $x = 3$. Следовательно, $OC_1 = 4$.

1439. Поскольку $AM = CB$, то (рис. 422) получим: $\left(\frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{x+a}{2}\right)^2 = y^2 + (x - a)^2$. После преобразования получим $3x^2 - 10ax + 3y^2 + 3a^2 = 0$; $x^2 - 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot ax + y^2 + a^2 = 0$, что даёт уравнение окружности $\left(x - \frac{5}{3}a\right)^2 + y^2 = \left(\frac{4}{3}a\right)^2$ с центром в точке $\left(\frac{5}{3}a; 0\right)$ и радиусом $\frac{4}{3}a$. Искомым геометрическим местом точек будет полученная окружность за исключением точек $\left(\frac{1}{3}a; 0\right)$ и $(3a; 0)$.

1440. Заметим (рис. 423), что: $AM^2 = x^2 + y^2$, $BM^2 = x^2 + (y - 2)^2$, $CM^2 = (x - 2)^2 + (y - 2)^2$, $DM^2 = (x - 2)^2 + y^2$. $AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = x^2 + y^2 + x^2 + (y - 2)^2 + (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (x - 2)^2 + y^2 = 4(x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4) = 4[(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 2]$. Заметим, что $(x - 1)^2 + (y - 1)^2$ является правой частью уравнения единичной окружности с центром в точке $O(1; 1)$ и, зна-

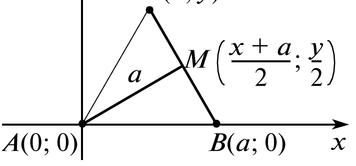


Рис. 422

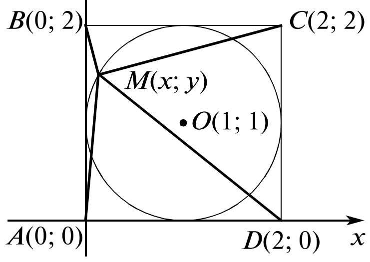


Рис. 423

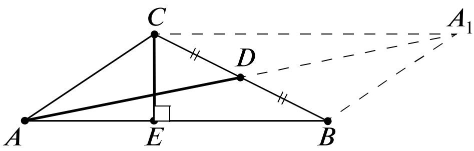


Рис. 424

чит, равна 1. Отсюда сумма квадратов расстояний равна 12. Значит, сумма расстояний равна $2\sqrt{3}$.

1441. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CE$ (рис. 424). $\triangle ABC$ равновелик $\triangle ABA_1$. $S_{\triangle ABA_1} = \frac{1}{2} \cdot 2AD \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2CE \cdot h$ (по условию $AD = CE$). Отсюда $h = \frac{1}{2}AB$. Значит, точка E — середина стороны AB, а CE — медиана и высота $\triangle ABC$. Значит, $\triangle ABC$ — равнобедренный ($AB = AC$). Отсюда медиана AD, равная CE, является высотой. Следовательно, $\triangle ABC$ — равносторонний и точка C — единственная.

Контрольная работа № 10

Вариант 1

1. Найдите координаты вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - \frac{1}{7}\vec{b}$, если $\vec{a}(-1; 2)$ и $\vec{b}(14; 7)$.

А. (0; 3). Б. (–4; 3). В. (–5; 5). Г. (–4; 5).

2. В трапеции $ABCD$ $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно. Выразите вектор $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 425).

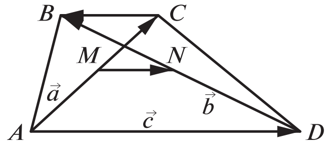


Рис. 425

А. $\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$. В. $\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

Б. $\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. Г. $\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

3. Упростите выражение $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA}$.

Ответ: ______________________________________

4. Даны три коллинеарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Известно, что $2\vec{a} + 0{,}5\vec{b} - \vec{c} = 0$ и $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$. Найдите $|\vec{c}|$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены.

Ответ: ______________________________________

5. Дан квадрат $ABCD$, O — точка пересечения диагоналей квадрата. Докажите, что

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 0$.

Вариант 2

1. Найдите координаты вектора $\vec{c} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$, если $\vec{a}(-2; 1)$; $\vec{b}(1; 0)$.

А. (2; 1). Б. (1,5; 1). В. (0; 1). Г. (–1; –0,5).

2. В $\triangle ABC$ $\overrightarrow{BA} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$. Отрезок BB_1 — медиана $\triangle ABC$. Выразите вектор $\overrightarrow{BB_1}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 426).

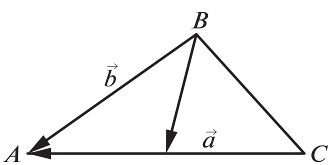


Рис. 426

А. $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$. В. $\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

Б. $\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\vec{a}$. Г. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

3. Упростите выражение $\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{KC}$.

Ответ: ______________________________________

4. Даны три коллинеарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Известно, что $3\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c} = 0$ и $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{c}| = 4$. Найдите $|\vec{b}|$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ сонаправлены.

Ответ: ______________________________________

5. Дан прямоугольник $ABCD$, O — точка пересечения диагоналей прямоугольника. Докажите, что

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 0$.

Глава 13
Преобразования плоскости (*8 ч*)

Номенклатура содержания, определяемая «Примерными программами основного общего образования» как геометрические преобразования, содержит примеры движений фигур: симметрии фигур (осевая и центральная), параллельный перенос, поворот, а так же понятия о гомотетии и подобие фигур. Введение в «Примерные программы...» этой темы обосновано не только и не столько необходимостью ознакомить учащихся с реально существующими и часто встречающимися в обыденной жизни отношениями между реальными объектами, сколько потребностями самого предмета геометрии. Понятие движения важно, прежде всего, тем, что, опираясь на него, можно ввести общее понятие равенства геометрических фигур. Это, в свою очередь, необходимо для обоснования правил построения фигур с заданными свойствами, а точнее, для этапа «исследование» в задачах на построение.

В учебнике изложение темы «Преобразования плоскости» дано в трёх фрагментах: в главе 2 «Основные свойства плоскости», в главе 6 «Подобие» и в главе 13 «Преобразования плоскости». Первый фрагмент состоит из двух частных видов движения: центральной и осевой симметрии. Введение этих движений необходимо автору для полноты изложения свойств прямой и плоскости. Кроме того, в начале изложения курса вводится понятие геометрического равенства, которое опирается на интуитивное понимание учащимся понятия совмещения. С другой стороны, при столь раннем введении двух видов симметрии автор не рассматривает свойства симметричности четырёхугольников непосредственно в процессе изучения свойств четырёхугольников. Во втором фрагменте вводится понятие подобия треугольников и даётся объяснение обобщения понятия подобия для случая произвольных фигур. Третий фрагмент, рассматриваемая глава 13, содержит общее понятие движения и ещё два частных случая движения: параллельный перенос и поворот, и является заключительной темой курса планиметрии. Здесь автор доказывает теорему о том, что любое движение плоскости задаётся движением трёх её точек, не лежащих на одной прямой. Такой подход к обоснованию эквивалентности двух определений равенства треугольников является для школьного курса геометрии весьма оригинальным и достаточно наглядным. Как было сказано выше, традиционно для достижения наибольшей доступности и наглядности представления движения в виде композиции простейших движений выбирают две симметрии, поворот на некоторый угол и параллельный перенос. Этого вполне достаточно, чтобы учащиеся получили представление о сложности произвольных движений, поскольку в реальных задачах обычно используется разложение движения на повороты, параллельные переносы и иногда на отражения. В учебнике предпринята попытка дать более универсальное представление о всех движениях, как сохраняющих, так и меняющих ориентацию, в виде композиций некоторого минимального числа простейших движений, а именно, в виде композиции только осевых симметрий. Такое представление обладает внутренней эстетической красотой, поскольку, несмотря на его малую эффективность, позволяет посмотреть на произвольные движения с единой простой точки зрения. К недостаткам такого представления можно отнести тот факт, что при практическом применении даже простейший параллельный перенос будет строиться как композиция двух осевых симметрий, и тем самым задействовать в рассуждениях и построениях большее число вспомогательных фигур, чем прямое построение параллельного переноса.

«Планируемые результаты обучения основного общего образования» в требованиях к геометрической подготовке учащихся требование к уровню изучения данной темы формулируют следующим образом: «Выпускник получит возможность приобрести опыт применения идей движения при решении задач на вычисления и доказательства». Значит, тема должна быть изложена на уроке, однако, как организовать контроль за усвоением данной темы и в каком объёме требовать от учащихся воспроизведения учебного материала, решать учителю. При этом уроки лучше организовать в форме лекций. Основная цель таких уроков — познакомить учащихся с примерами преобразования движения — симметрия относительно точки и прямой, параллельный перенос, поворот — учащиеся должны усвоить на уровне практических применений.

В результате изучения главы 13 учащиеся должны достичь следующих результатов:

— формулировать, иллюстрировать и объяснять формулировки: центральной симметрии, симметрии относительно прямой, параллельного переноса, поворота;

— изображать, обозначать и распознавать на рисунке точки и простейшие фигуры, симметричные данным относительно точки; симметричные данным относительно прямой, в которые переходят данные фигуры при параллельном переносе; в которые переходят данные фигуры при повороте.

Учащиеся получат возможность научиться: иллюстрировать и объяснять понятия: движения и его свойства; применять при решении простейших задач на доказательство, построения и вычисления идеи движения.

13.1. Движения плоскости (*1 ч*)

Вводимые в параграфе определение движения, а также свойства движения в дальнейшем не применяются в качестве аппарата для решения задач и изложения теории. Кроме того, как было сказано выше, вся тема идёт согласно «Планируемым результатам обучения основного общего образования» в ознакомительном порядке, т. е. не требовать от учащихся воспроизведения доказательств. Форма проведения урока — лекция.

В результате изучения § 13.1 учащиеся получат возможность иллюстрировать и объяснять понятие «движения плоскости», объяснять свойство движения: два движения, выполненные последовательно, являются движением, применять при решении простейших задач на доказательство, построения и вычисления идеи движения.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

1 При введении определения преобразования плоскости следует обратить внимание на взаимно однозначное соответствие точек данной фигуры и точек её образа. На закрепление № 1451.

2 При введении определения движения плоскости обратить внимание на его важнейшее с в о й с т в о: сохранять расстояние между точками. Для проверки правильности усвоения определения — упражнения.

1. Точки A и B при движении переходят в точки A' и B'. Чему равно расстояние между точками A и B, если $A'B' = 7$?

2. Точки A и B при движении переходят в точки A' и B'. Чему равно расстояние между точками A' и B', если $AB = 6$?

Это же определяющее свойство движения используется при решении задачи № 1454, на что следует обратить внимание учащихся при комментарии к заданию на дом. Далее ответить на вопрос: «Является ли преобразование, обратное движению, движением?»

Теорема 13.1 позволяет сделать следующие выводы (предлагаются как задачи).

1. При движении прямые переходят в прямые (№ 1452), полупрямые в полупрямые, отрезки в отрезки.

2. При движении сохраняются углы между полупрямыми.

3. При движении треугольник переходит в равный ему треугольник.

4. При движении любая фигура переходит в равную ей фигуру (№ 1452).

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На уроке: в классе — параграф; № 1451, 1452 и 1455; дома — № 1—5В; № 1453, 1454 и 1456.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Дайте определение преобразования плоскости.

2. Дайте определение движения плоскости.

M 3. Сформулируйте и докажите теорему о двух последовательных движениях плоскости.

M 4. Сформулируйте и докажите теорему о задании движения тремя точками плоскости.

M 5. Сформулируйте и докажите теорему о задании движения плоскости не более, чем тремя симметриями.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

№ 1453, 1454 и 1455 .

1451. Нет. По определению: «задано преобразование плоскости, если указан способ, с помощью которого каждой точке A плоскости ставится в соответствие точка A' этой же плоскости, при этом различным

Рис. 427

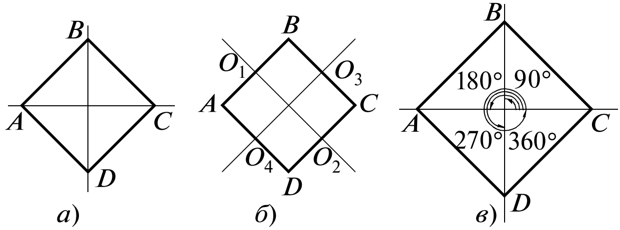


Рис. 428

точкам A и B соответствуют различные точки A' и B'». Через точку A проведём прямую, перпендикулярную данной прямой. Все точки прямой A_1A_2 будут иметь одну и ту же проекцию — точку A' (рис. 427).

1452. По определению: «если в результате движения точки A и B переходят в точки A' и B', то $AB = A'B'$». Пусть точки A, B и C переходят в точки A', B' и C'. При этом выполняются равенства $AB + BC = AC$, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$. Следовательно, выполняется и равенство $A'B' + B'C' = A'C'$. Исходя из определения окружности как ГМТ, равноудалённых от данной точки, получим, что окружность переходит в окружность того же радиуса.

1453. Квадрат $ABCD$ переходит сам в себя при симметрии: 1) относительно прямых AC и BD (рис. 428, *а*); 2) относительно прямых O_1O_2 и O_3O_4 (рис. 428, *б*); 3) поворота на 90°, 180°, 270° и 360° относительно точки пересечения прямых AC и BD (или O_1O_2 и O_3O_4) (рис. 503, *в*). При этом следует заметить, что симметрия относительно центра квадрата совпадает с поворотом на 180°.

1454. Пусть точка M имеет координаты $(x; y)$. Поскольку в результате движения точки A, B и M переходят в точки A', B' и M' и при этом расстояние между точками сохраняется. $AM = \sqrt{34}$, $BM = \sqrt{113}$. $A'M' = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$, $B'M' = \sqrt{(x-7)^2 + (y-3)^2}$. $AM = A'M'$ и $BM = B'M'$; $\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{34}$ и $\sqrt{(x-7)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{113}$. Отсюда получаем систему $x^2 + y^2 - 14x - 6y = 55$ и $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 21$. После решения системы уравнений получим $x_1 = x_2 = -\frac{17}{5}$, $y_1 = \frac{26}{5}$ и $y_2 = \frac{4}{5}$, $M_1\left(-\frac{17}{5}; \frac{26}{5}\right)$ и $M_2\left(-\frac{17}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

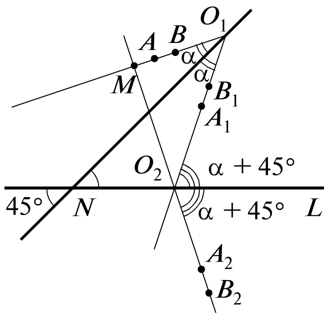


Рис. 429

1455. Обозначим данные прямые NO_1 и NO_2, где N — точка их пересечения (рис. 429). Пусть прямая AB пересекает прямую NO_1 под углом α. При симметрии относительно прямой NO_1 прямая AB перейдёт в прямую A_1B_1. При этом в силу свойства 3 (§ 2.2) «симметричные фигуры равны», $\angle AO_1N = \angle A_1O_1N = \alpha$. Аналогично при симметрии относительно прямой NO_2 прямая A_1B_1 перейдёт в прямую A_2B_2, при этом $\angle A_1O_2L = \angle A_2O_2L$. $\angle A_2O_2L = \alpha + 45°$, так как $\angle A_2O_2L$ является внешним для $\triangle NO_1O_2$ при вершине O_2. Рассмотрим $\triangle O_2MO_1$, где M — точка пересечения прямых AB и A_2B_2. Так как $\angle A_2O_2O_1$ является внешним для $\triangle O_2MO_1$ при вершине O_2, то $\angle A_2O_2O_1 = \angle O_2MO_1 + \angle MO_1O_2$. Отсюда $\angle O_2MO_1 = \angle A_2O_2O_1 - \angle MO_1O_2 = 2\alpha + 90° - 2\alpha = 90°$. Следовательно, прямые AB и A_2B_2 перпендикулярны.

1456. См. доказательство теоремы 12.3.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

М **1.** Докажите, что при движении параллельные прямые переходят в параллельные прямые.

М **2.** Докажите, что при движении: а) параллелограмм переходит в параллелограмм; б) трапеция переходит в трапецию.

13.2. Виды движений плоскости (2 ч)

В параграфе рассматриваются такие виды движения, как поворот и параллельный перенос, которые являются результатом последовательного выполнения двух симметрий относительно двух осей: в первом случае пересекающихся, во втором — параллельных.

В результате изучения § 13.2 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— иллюстрировать и объяснять определение параллельного переноса и поворота;

— строить на чертежах и рисунках точки и простейшие фигуры, в которые переходят данные фигуры при параллельном переносе, в которые переходят данные фигуры при повороте.

Учащиеся получат возможность научиться объяснять параллельный перенос, как результат последовательного выполнения двух симметрий относительно двух параллельных осей, объяснять поворот, как результат последовательного выполнения двух симметрий относительно двух пересекающихся осей, применять при решении простейших задач на доказательство, построение и вычисление идеи движения.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

1 Прежде чем начать доказательство теоремы 13.4, необходимо рассмотреть понятие параллельного переноса. Для этого можно использовать рисунок 430 или более наглядный рисунок 431. А также можно проиллюстрировать деталями из доступных орнаментов. Для вывода формул, которые в декартовой системе координат позволяют задавать параллельный перенос, можно решить № 1457. Полученные формулы $x_{B'} = x_B + x_{\overrightarrow{AA'}}$, $y_{B'} = y_B + y_{\overrightarrow{AA'}}$ полезно запомнить.

По результатам доказательства теоремы 12.4 выясняется, что параллельный перенос является результатом

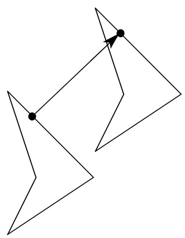


Рис. 430

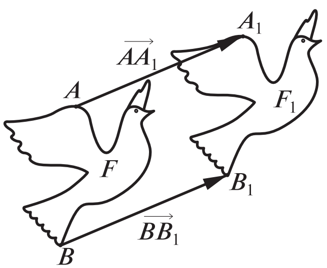


Рис. 431

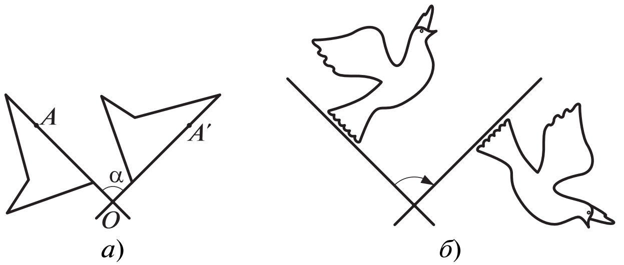


Рис. 432

последовательного выполнения двух симметрий относительно двух параллельных осей. Далее предложить следующие в о п р о с ы.

Последовательно выполнено два параллельных переноса, модули векторов которых равны q и g.

1. Сколько осевых симметрий будет при этом выполнено?
2. Чему равно расстояние между осями симметрии?
3. Какое движение задают данные параллельные переносы?

(2) Практика показывает, что как само определение поворота, так и построение фигур, в которые переходят данные фигуры, вызывает определённые трудности у учащихся. Поэтому необходимо рассмотреть понятие поворота, а потом доказательство теоремы 13.5, или используя рисунок 432, *а*, или более наглядный рисунок 432, *б*, деталями из доступных орнаментов.

В результате доказательства теоремы 13.5 выясняется, что поворот является результатом последовательного выполнения двух симметрий относительно двух пересекающихся осей, далее предложить в о п р о с: «Каким движением будет движение, полученное в результате последовательно выполненных двух поворотов с общим центром, углы которых равны α и β» и решить № 1462.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На первом уроке: в классе — пункты: параллельный перенос, поворот; № 1457 (а), 1458 (б) и 1462; дома — № 1—4В, № 1457 (б, в), 1458 (а) и 1460.

На втором уроке: в классе — № 1—2ДЗ, № 1459, 1461 (в) и 1464; дома — № 1461 (а, б), 1463 и 1465.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Дайте определение параллельного переноса.
2. Дайте определение поворота.
3. Сформулируйте и докажите теорему о том, что параллельный перенос является результатом последовательного выполнения двух симметрий относительно двух параллельных осей.
4. Сформулируйте и докажите теорему о том, что поворот является результатом последовательного выполнения двух симметрий относительно двух пересекающихся осей.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

№ 1457, 1458, 1460, 1461, 1462 и 1465.

1457. По определению параллельного переноса $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. Координаты вектора $\overrightarrow{AA'}$ определяются из условия а) (3; 1). Координаты точки B' определяются по формулам $x_{B'} = x_B + x_{\overrightarrow{AA'}}$, $y_{B'} = y_B + y_{\overrightarrow{AA'}}$, $B'(4; -2)$.

1458. а) Поскольку при параллельном переносе все точки прямой $2x - 3y = 1$ переместятся в одном направлении и на одно расстояние, то новая прямая будет параллельна исходной, т. е. $2x - 3y = b$. Вектор переноса $\overrightarrow{AA'}$ имеет координаты (5; –9). Точка на прямой $2x - 3y = 1$ имеет координаты $(x; y)$, а на прямой $2x - 3y = b$ — координаты $(x + 5; y - 9)$. Отсюда $2(x + 5) - 3(y - 9) = b$, $b = 38$. Значит, $2x - 3y = 38$.

1459. Пусть вектор переноса $(a; b)$. Точка $(x; y)$ лежит на прямой $y = 3x - 2$, а точка с координатами $(x + a; y + b)$ лежит на прямой $y = 3x + 4$. Отсюда $b = 3a + 6$. Точка $(x_1; y_1)$ лежит на прямой $3x + 2y = 2$, а точка с координатами $(x_1 + a; y_1 + b)$ лежит на прямой $6x + 4y = 3$. Отсюда $6a + 4b + 1 = 0$. После решения системы уравнений относительно a и b получим вектор переноса $\left(-\frac{25}{18}; \frac{11}{6}\right)$.

1460. Вектор (0; 1) при повороте на 30° перейдёт в вектор того же модуля, и начало его находится в начале координат. Поэтому его конец находится в точке $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

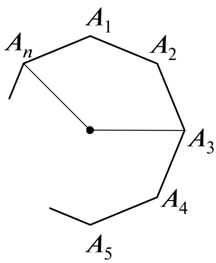


Рис. 433

1461. По теореме 12.5 при симметрии относительно двух осей, пересекающихся под углом α, получается поворот на угол 2α. Значит, вершина A_k (рис. 433) при повороте на 2α займёт место вершины A_l такой, что $\angle A_kOA_l = 2\alpha$ (вершины A_k и A_l не обязательно соседние). При повороте на угол, равный 2α, многоугольник займёт первоначальное положение m раз, при этом вершина A_k побывает на месте каждой из вершин многоугольника, а сам многоугольник повернётся вокруг центра n раз. Значит: $2\alpha \cdot m = 360° \cdot n$.

а) $60° \cdot m = 360° \cdot n$; $n = 10$, $m = 6$.

б) $20° \cdot m = 360° \cdot n$; $n = 10$, $m = 18$.

в) $174° \cdot m = 360° \cdot n$; $n = 87$, $m = 180$.

1462. Сначала проведём симметрию относительно прямой, проходящей через середину отрезка AA' (точка O_1) перпендикулярно ему (рис. 434, *а*). При этом точка A перейдёт в точку A', а точка B перейдёт в точку B_1'. Затем проведём прямую, проходящую через середину отрезка $B'B_1'$ (точку O_2) перпендикулярно ему (рис. 434, *б*). При этом точка A' останется на месте, а точка B_1' перейдёт в точку B'. Отрезки $A'B'$ и $A'B_1'$ равны, так как каждый из них равен отрезку AB (один по условию, другой в силу свойств симметрии). Следовательно, $\triangle B'A'B_1'$ — равнобедренный. Значит, прямая, проходящая через середину отрезка BB' перпендикулярно ему, является медианой $\triangle B'A'B_1'$ и проходит че-

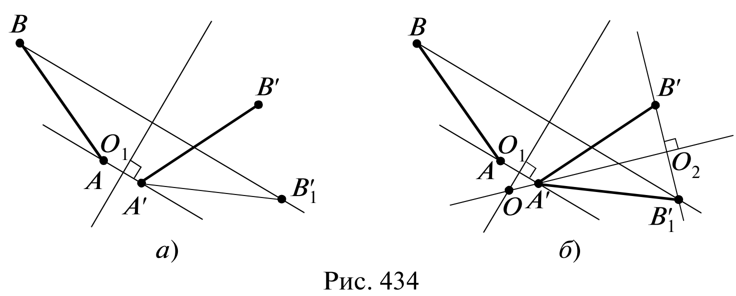


Рис. 434

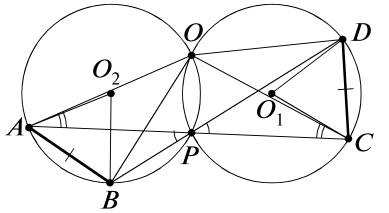


Рис. 435

рез точку A'. Две прямые, относительно которых были проведены симметрии, позволившие перевести отрезок AB в равный ему отрезок $A'B'$, пересекаются в точке O. Значит, по теореме 12.5 полученное движение является поворотом около точки O.

1463. $\angle APB = \angle CPD$, как вертикальные (рис. 435), значит, $\angle AO_2B = \angle CO_1D$, как центральные для равных вписанных углов. $\triangle AO_2B = \triangle CO_1D$, как равнобедренные треугольники с равными основаниями и углами, противолежащими основаниям. Следовательно, радиусы окружностей равны. $\angle OAP = \angle OCP$, как опирающиеся на равные дуги в равных окружностях. Отсюда $\triangle AOC$ — равнобедренный и $AO = OC$.

Аналогично, $\angle AOB = \angle COD$, как опирающиеся на равные дуги в равных окружностях. Следовательно, $\angle BOD = \angle AOC - \angle AOB + \angle COD = \angle AOC$. Значит, при повороте вокруг точки O на $\angle AOC$ луч OB перейдёт в луч OD. $\angle OBP = \angle ODP$, как опирающиеся на равные дуги в равных окружностях. Отсюда $\triangle BOD$ — равнобедренный и $BO = OD$.

1464. Повернём прямую l вокруг точки A на 60°, и получим прямую l_1 (рис. 436, *а*). На прямой l возьмём

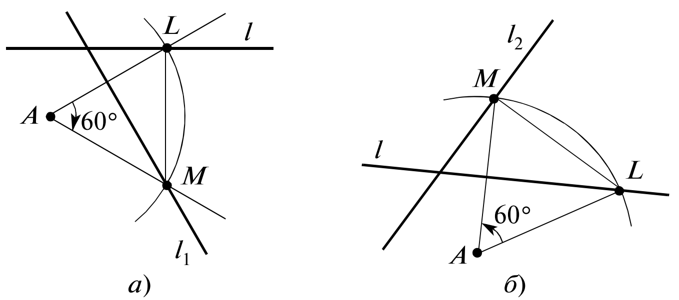


Рис. 436

произвольную точку L, которая при этом повороте перейдёт в точку M, лежащую на прямой l_1, причём $AL = AM$. В $\triangle LAM$: $\angle LAM = 60°$ и $AL = AM$, а значит, $\triangle LAM$ — равносторонний. Точка M — искомая, так как получена поворотом точки A на угол 60° вокруг точки L, лежащей на прямой l. Поскольку точка L — произвольная, то геометрическим местом точек M является вся прямая l_1. Аналогично, прямую l можно повернуть вокруг точки A на 60° против часовой стрелки, и получим прямую l_2 (рис. 436, *б*).

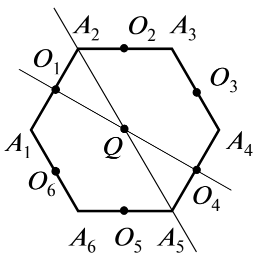


Рис. 437

1465. 1) Симметрия относительно точки Q. 2) Симметрия относительно прямых, проходящих через вершины: A_1A_4, A_2A_5 и A_3A_6. 3) Симметрия относительно прямых, проходящих через середины сторон: O_1O_4, O_2O_5 и O_3O_6. 4) Поворот вокруг точки Q на угол: 60°, 120°, 180°, 240°, 300°, 360° (рис. 437). Всего 12 движений, переводящих шестиугольник в себя.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Каким движением будет движение, полученное в результате последовательно выполненных поворота и параллельного переноса?

2. Каким движением будет движение, полученное в результате последовательно выполненных параллельного переноса и поворота?

13.3. Гомотетия (2 ч)

В § 13.3 рассматривается новое преобразование плоскости — гомотетия и её свойства. Гомотетия является примером такого преобразования плоскости, при котором сохраняются углы, а расстояния между точками изменяются в соответствии с заданным коэффициентом гомотетии. Урок лучше организовать в форме лекции.

Использовать материал из рабочей тетради учитель может по своему усмотрению.

В результате изучения § 13.3 учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

— иллюстрировать и объяснять определение гомотетии;

— строить на чертежах и рисунках простейшие фигуры, гомотетичные данным.

Учащиеся получат возможность научиться применять понятие и свойства гомотетии при решении простейших задач.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕРИАЛА

При введении определения гомотетии (рис. 516У) обратить внимание учащихся на забавный рисунок учебника (с. 440) и № 1466—1467.

При рассмотрении теоремы 13.8 обратить внимание учащихся на то, что в ней соединено несколько утверждений, каждое из которых является с в о й с т в о м гомотетии.

1) Отрезок AB переходит в параллельный ему отрезок $A'B'$ такой, что $AB = |k|A'B'$.

2) Любая фигура F переходит в подобную ему фигуру F' с коэффициентом подобия k.

3) Любой элемент фигуры F переходит в соответствующий элемент фигуры F'.

После доказательства свойств гомотетии в теореме 13.8 обратить внимание учащихся на то, что гомотетия является преобразованием подобия, но подобие не всегда является преобразованием гомотетии, контрпример (рис. 438). Именно поэтому важно, чтобы на рисунке, используемом при введении определения гомотетии и доказательстве теоремы 13.8, и рисунке, используемом в контрпримере, были одни и те же фигуры, в нашем случае треугольники. На закрепление — № 1470.

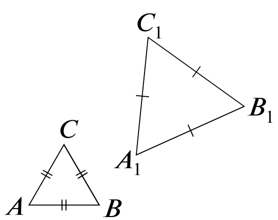


Рис. 438

Из теоремы 13.8 следуют у т в е р ж д е н и я:

1) гомотетия сохраняет углы;

2) при гомотетии прямая отображается на параллельную прямую;

3) прямая, проходящая через центр гомотетии, при гомотетии отображается на себя.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА

На уроке: в классе — параграф; № 1466, 1467 и 1470; дома — № 1—5В, № 1468, 1469, 1471 и 1472.

ВОПРОСЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. Дайте определение гомотетии.
2. Объясните, что такое коэффициент гомотетии.
3. Объясните, каким будет преобразование плоскости, если коэффициент гомотетии равен 1.
4. Объясните, какие гомотетии называются обратными.
5. Сформулируйте и докажите свойства гомотетий.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ УЧЕБНИКА

Все задачи параграфа отмечены знаком .

1466. $AB \parallel A'B'$, $OA' = k \cdot OA$, $OB' = k \cdot OB$ (рис. 439).

1467. Решение на рисунке 440.

1468. Через точки B и B' проведём прямые, перпендикулярные данной прямой, и отложим на них отрезки $BM = AB$ и $B'M' = A'B'$(рис. 441). Через точки M и M' проведём прямую до пересечения с данной прямой в точке O, которая и будет центром гомотетии. Так как $BM = AB$ и $B'M' = A'B'$, то равнобедренные и прямоугольные треугольники BMA и $B'M'A'$ подобны, $B'M' = k \cdot BM$ и $A'B' = k \cdot AB$.

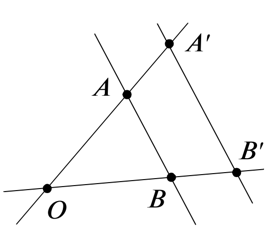


Рис. 439

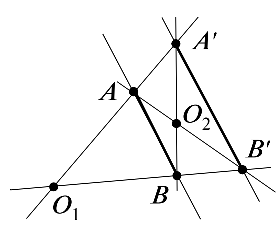


Рис. 440

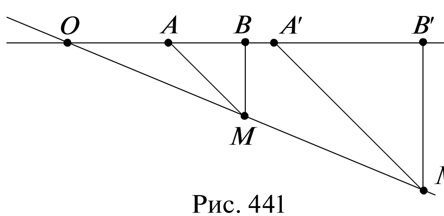
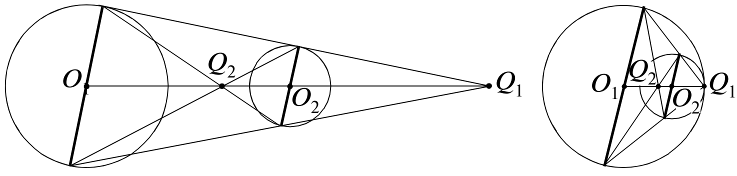


Рис. 441



а) *б*)

Рис. 442

1469. Для построения центров гомотетии (рис. 442) надо провести в окружностях параллельные диаметры и построить центры гомотетий двух отрезков (см. № 1467).

1470. Проведём прямые AA_1 и BB_1 и покажем, что точка их пересечения O является центром гомотетии (рис. 443). Предположим, что при гомотетии точка C перейдёт в точку C_2. В силу преобразования $\triangle OCA$ перейдёт в $\triangle OC_2A_1$, причём $\triangle OCA \backsim \triangle OC_2A_1$. Следовательно, $\angle CAO = \angle C_2A_1O$ и $CA \parallel C_2A_1$. А по условию $CA \parallel C_1A_1$, значит, $C_1A_1 \parallel C_2A_1$. Получили, что две параллельные прямые C_1A_1 и C_2A_1 имеют общую точку A_1, а значит, они совпадают.

Аналогично доказывается, что прямые C_1B_1 и C_2B_1 совпадают. Поскольку две прямые C_1A_1 и C_2B_1 пересекаются в одной точке, то точки C_1 и C_2 совпадают, и вершина C $\triangle ABC$ переходит в вершину C_1 $\triangle A_1B_1C_1$.

1471. Проведём гомотетию относительно точки A с коэффициентом подобия $k = \frac{1}{2}$ (рис. 444). По теоре-

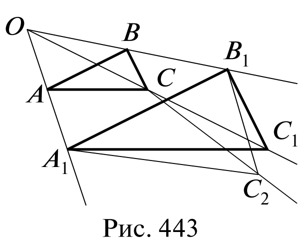


Рис. 443

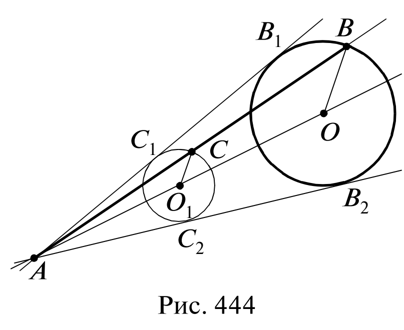


Рис. 444

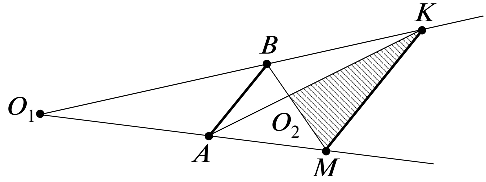


Рис. 445

ме 13.8 окружность радиуса R с центром в точке O перейдёт в окружность радиуса $\frac{1}{2}R$ с центром в точке O_1. Точка B, лежащая на окружности с центром в точке O, перейдёт в точку C — середину отрезка AB, лежащую на окружности с центром в точке O_1.

1472. Решение задачи следует из рисунка 445.

Контрольная работа № 11

Вариант 1

1. Определите по рисунку 446 вид движения. Укажите на рисунке, как оно может быть задано.

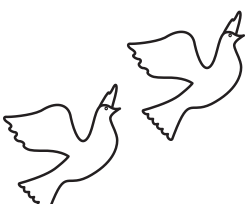


Рис. 446

А. Центральная симметрия (указать центр).

Б. Поворот (указать угол и направление).

В. Осевая симметрия (указать ось).

Г. Параллельный перенос (указать вектор).

2. Треугольник имеет три оси симметрии. Определите вид треугольника.

А. Разносторонний.
Б. Равносторонний.
В. Равнобедренный.

3. Внутри угла AOB, равного 45°, отмечена точка M. Точки M_1 и M_2 симметричны точке M относительно сторон угла. Определите угол M_1OM_2.

Ответ: ______________________________

4. Правильный многоугольник имеет две оси симметрии, пересекающиеся под углом 15°. Какое наименьшее число сторон может иметь этот многоугольник?

Ответ: ______________________________

5. В $\triangle ABC$ вершина B симметрична точке K относительно биссектрисы внутреннего угла треугольника при вершине A. Найдите отрезок CK, если $AB = 3$ см, $AC = 5$ см.

Вариант 2

1. Определите по рисунку 447 вид движения. Укажите на рисунке, как оно может быть задано.

А. Центральная симметрия (указать центр).

Б. Поворот (указать угол и направление).

В. Осевая симметрия (указать ось).

Г. Параллельный перенос (указать вектор).

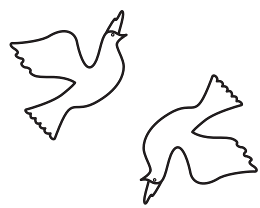


Рис. 447

2. Треугольник имеет только одну ось симметрии. Определите вид треугольника.

А. Разносторонний.
Б. Равносторонний.
В. Равнобедренный.

3. Внутри угла AOB, равного 90°, отмечена точка M. Точки M_1 и M_2 симметричны точке M относительно сторон угла. Определите угол M_1OM_2.

Ответ: ______________________________

4. Правильный многоугольник имеет две оси симметрии, пересекающиеся под углом 18°. Какое наименьшее число сторон может иметь этот многоугольник?

Ответ: ______________________________

5. В треугольнике ABC вершина B симметрична точке K относительно биссектрисы внешнего угла треугольника при вершине A. Найдите отрезок CK, если $AB = 3$ см, $AC = 5$ см.

Примерное тематическое планирование

Тема	Количество часов
7 КЛАСС **Глава 1. Чем занимается геометрия?** **Первые понятия геометрии** (5 ч)	
1.1. Геометрическое тело	1
1.2. Поверхность	
1.3. Линия	1
1.4. Точка	
1.5. От точки к телу	1
Как изучать геометрию?	
Резерв	2
Глава 2. Основные свойства плоскости (17 ч)	
2.1. Геометрия прямой линии	2
2.2. Основные свойства прямой на плоскости	2
2.3. Плоские углы	2
2.4. Плоские кривые, многоугольники, окружность	2
Систематизация и обобщение знаний	1
Контрольная работа	1
Резерв	7
Глава 3. Треугольник и окружность. **Начальные сведения** (21 ч)	
3.1. Равнобедренный треугольник	2
3.2. Признаки равенства треугольников	6

Продолжение табл.

Тема	Количество часов
Контрольная работа	
3.3. Неравенства в треугольнике. Касание окружности с прямой и окружностью	3
Систематизация и обобщение знаний	1
Контрольная работа	1
Резерв	7
Глава 4. Виды геометрических задач и методы их решения (18 ч)	
4.1. Геометрические места точек	1
4.2. Задачи на построение	2
4.3. Кратчайшие пути на плоскости	1
4.4. О решении геометрических задач	2
4.5. Доказательства в геометрии	5
Контрольная работа	1
Резерв	6
Итоговое повторение (10 ч)	9
Итого	70
8 КЛАСС **Глава 5. Параллельные прямые и углы** (18 ч)	
5.1. Параллельные прямые на плоскости	5
5.2. Измерение углов, связанных с окружностью	3

Продолжение табл.

Тема	Количество часов
5.3. Задачи на построение и геометрические места точек	3
5.4. Метод вспомогательной окружности. Задачи на вычисление и доказательство	3
Контрольная работа	1
Резерв	3
Глава 6. Подобие (20 ч)	
6.1. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат	3
6.2. Теорема Фалеса и следствия из неё	4
6.3. Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников	3
Систематизация и обобщение знаний	1
Контрольная работа	1
Резерв	8
Глава 7. Метрические соотношения в треугольнике и окружности (14 ч)	
7.1. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора	2
7.2. Тригонометрические функции. Теоремы синусов и косинусов	3
7.3. Соотношения между отрезками, возникающими при пересечении прямых с окружностью	1
Систематизация и обобщение знаний	1
Контрольная работа	1
Резерв	6

Продолжение табл.

Тема	Количество часов
Глава 8. Задачи и теоремы геометрии (10 ч)	
Итоговое повторение	8
Итого	70
9 КЛАСС **Глава 10. Площади многоугольников** (18 ч)	
10.1. Основные свойства площади. Площадь прямоугольника	2
10.2. Площади треугольника и четырёхугольника	5
10.3. Площади в теоремах и задачах	3
Систематизация и обобщение знаний	1
Контрольная работа	1
Резерв	6
Глава 11. Длина окружности, площадь круга (13 ч)	
11.1. Правильные многоугольники	3
11.2. Длина окружности	2
11.3. Длина окружности (продолжение)	1
11.4. Площадь круга и его частей	2
Систематизация и обобщение знаний	1
Контрольная работа	1
Резерв	3
Глава 12. Координаты и векторы (15 ч)	
12.1. Декартовы координаты на плоскости	1

Окончание табл.

Тема	Количество часов
12.2. Уравнение линии	2
12.3. Векторы на плоскости	2
12.4. Скалярное произведение векторов	2
12.5. Координатный и векторный методы	3
Систематизация и обобщение знаний	1
Контрольная работа	1
Резерв	15
Глава 13. Преобразования плоскости (8 ч)	
13.1. Движение плоскости	1
13.2. Виды движений плоскости	2
13.3. Гомотетия	1
Систематизация и обобщение знаний	1
Контрольная работа	1
Резерв	2
Заключительное повторение	16
Итого	70

Содержание

8 КЛАСС

9 КЛАСС